

## Теплопроводность текстурированного композита с анизотропными эллипсоидальными включениями

© В.С. Зарубин

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*На основе разработанной математической модели переноса тепловой энергии в композите с анизотропными включениями в форме трехосных эллипсоидов предложена процедура вычисления компонент тензора эффективной теплопроводности текстурированного композита. Рассмотрен вариант анизотропных включений, у которых главные оси тензора теплопроводности совпадают с осями симметрии эллипсоидов. Приведены расчетные зависимости для конической текстуры с учетом ее возможного рассеяния. Полученные результаты можно использовать для прогноза эффективных коэффициентов теплопроводности композитов, модифицированных наноструктурными элементами (в том числе углеродными нанотрубками). В силу электротепловой аналогии эти результаты применимы для расчета характеристик электропроводности и диэлектрической проницаемости текстурированных композитов с эллипсоидальными включениями.*

**Ключевые слова:** *текстурированный композит, анизотропные включения эллипсоидальной формы, эффективный коэффициент теплопроводности.*

**Введение.** При модификации композита армирующими элементами их пространственное расположение может существенным образом повлиять на эффективные коэффициенты теплопроводности такого композита. В идеализированном случае одинаковой ориентации анизотропных включений эллипсоидальной формы, оси симметрии которых совпадают с главными осями тензора теплопроводности включений, значения эффективных коэффициентов теплопроводности композита зависят лишь от соответствующих главных значений этого тензора и объемной концентрации  $C_V$  таких включений [1]. Но в общем случае произвольного пространственного расположения включений, определяющего текстуру композита, эти значения, являющиеся главными значениями тензора эффективной теплопроводности композита, помимо объемной концентрации будут зависеть и от линейной комбинации главных значений тензора теплопроводности эллипсоидальных включений.

**Математическая модель.** Математическая модель переноса тепловой энергии в композите, построенная в работе [1] в предположении, что одинаково ориентированные анизотропные эллипсоидальные включения не контактируют одни с другими, т. е. разделены слоем

изотропного материала матрицы, дала возможность получить оценки для главных значений  $\lambda_\alpha^o$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) тензора эффективной теплопроводности композита в виде безразмерных соотношений

$$\tilde{\lambda}_\alpha^o = \frac{\lambda_\alpha^o}{\lambda_m} = \frac{1 + (\tilde{\lambda}_\alpha - 1)(D_\alpha^o + (1 - D_\alpha^o)C_V)}{1 + (\tilde{\lambda}_\alpha - 1)D_\alpha^o(1 - C_V)}, \quad (1)$$

где  $\tilde{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha/\lambda_m$ ,  $\lambda_\alpha$  — главные значения тензора теплопроводности включений;

$$D_\alpha^o = \frac{b_1 b_2 b_3}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(b_\alpha^2 + u)f(u)}; \quad (2)$$

$\lambda_m$  — коэффициент теплопроводности матрицы ( $b_\alpha$  — полуоси эллипсоида и  $f(u) = \sqrt{(b_1^2 + u)(b_2^2 + u)(b_3^2 + u)}$ ). Отметим, что сумма коэффициентов  $D_1^o + D_2^o + D_3^o = 1$  (в частности для шарового включения  $D_\alpha^o = 1/3$ ). Интегралы в формуле (2) можно выразить через эллиптические интегралы [2, 3].

Построенную математическую модель композита [1] при отсутствии непосредственного контакта между анизотропными эллипсоидальными включениями можно видоизменить применительно к композиту, состоящему из анизотропных составных эллипсоидальных частиц, каждая из которых содержит такое включение, окруженное изотропным материалом матрицы, и геометрически подобна ему по форме с коэффициентом подобия  $K = C_V^{-1/3}$ . Поскольку каждая такая составная частица является представительным элементом структуры композита с одинаковой ориентацией эллипсоидальных включений, главные оси тензора эффективной теплопроводности такой частицы соосны с ее осями симметрии, а главные значения  $\lambda_\alpha^o$  этого тензора описываются формулой (1).

При наличии текстуры, определенной в прямоугольной декартовой системе координат с осями  $Ox_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (макроосями), необходимо для каждой составной частицы задать ориентацию ее осей симметрии  $O'\xi_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  (микроосей) относительно макроосей. Эту ориентацию можно задать матрицей направляющих косинусов

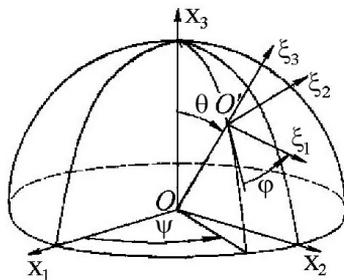
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

элементы  $a_{ik}$  которой связаны дополнительным соотношением (с учетом используемого здесь и далее правила суммирования по повторяющимся латинским индексам)

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера (единичный тензор второго ранга),  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . В этом случае каждая из строк матрицы (1) задает компоненты вектора (орта)  $e_i$  в ортогональных микроосях, а при  $i = j$  равенство (4) является условием ортогональности двух ортов  $e_i$  и  $e_j$ . Таким образом, из девяти элементов  $a_{ik}$  матрицы (3) с учетом равенства (4) независимыми будут только три. Это связано, в частности, с тем, что любую ориентацию микроосей относительно макроосей можно задать тремя угловыми координатами Эйлера: углом собственного вращения  $\varphi$ , углом прецессии  $\psi$  и углом нутации  $\theta$  [4]. Углы  $\psi$  и  $\theta$  задают направление одной из микроосей (на рисунке оси  $O'\xi_3$ ) относительно макроосей, а угол  $\varphi$ , отсчитываемый от положения меридиана с долготой  $\psi$  на сфере единичного радиуса — поворот репера микроосей вокруг микрооси  $O'\xi_3$ . Элементы матрицы (3) выражают через углы Эйлера следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \sin \varphi \sin \psi, \\ a_{12} &= -\cos \varphi \sin \psi \cos \theta - \sin \varphi \cos \psi, \\ a_{13} &= \cos \varphi \sin \theta, \quad a_{21} = \sin \varphi \cos \psi \cos \theta + \cos \varphi \sin \psi, \\ a_{22} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \quad a_{23} = \sin \varphi \sin \theta, \\ a_{31} &= -\cos \psi \sin \theta, \quad a_{32} = \sin \psi \sin \theta, \quad a_{33} = \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$



Ориентация микроосей симметрии относительно макроосей

Пусть расположение некоторой составной эллипсоидальной частицы относительно координат с макроосями  $O'x_i$  определено заданными значениями углов Эйлера  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\theta$ . По компонентам  $\lambda_{11}^0 = \lambda_1^0$ ,  $\lambda_{22}^0 = \lambda_2^0$  и  $\lambda_{33}^0 = \lambda_3^0$  тензора эффективной теплопроводности этой частицы в микроосях найдем компоненты  $\lambda_{ij}^*$  ( $j = 1, 2, 3$ ) этого тензора в макроосях с использованием элементов транспонированной матрицы  $A$  и соотношений [5]

$$\lambda_{ij}^* = \lambda_{kl}^0 a_{ki} a_{lj}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (6)$$

В соответствии с формулой (6) запишем

$$\lambda_{11}^* = \lambda_1^0 a_{11}^2 + \lambda_2^0 a_{21}^2 + \lambda_3^0 a_{31}^2, \quad (7)$$

$$\lambda_{22}^* = \lambda_1^0 a_{12}^2 + \lambda_2^0 a_{22}^2 + \lambda_3^0 a_{32}^2, \quad (8)$$

$$\lambda_{33}^* = \lambda_1^0 a_{13}^2 + \lambda_2^0 a_{23}^2 + \lambda_3^0 a_{33}^2, \quad (9)$$

$$\lambda_{12}^* = \lambda_1^0 a_{11} a_{12} + \lambda_2^0 a_{21} a_{22} + \lambda_3^0 a_{31} a_{32}, \quad (10)$$

$$\lambda_{13}^* = \lambda_1^0 a_{11} a_{13} + \lambda_2^0 a_{21} a_{23} + \lambda_3^0 a_{31} a_{33}, \quad (11)$$

$$\lambda_{23}^* = \lambda_1^0 a_{12} a_{13} + \lambda_2^0 a_{22} a_{23} + \lambda_3^0 a_{32} a_{33}. \quad (12)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что переход к макроосям не нарушает симметрии тензора эффективной теплопроводности составной частицы, т. е.  $\lambda_{21}^* = \lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{31}^* = \lambda_{13}^*$  и  $\lambda_{32}^* = \lambda_{23}^*$ .

**Процедура осреднения.** Для оценки эффективных коэффициентов теплопроводности композита в целом с конкретной заданной текстурой необходимо сначала определить в общем виде процедуру осреднения компонент  $\lambda_{ij}^*(\varphi, \psi, \theta)$  тензора эффективной теплопроводности отдельных составных частиц, зависящих, согласно формулам (5) и (7)–(12), от углов  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\theta$ , определяющих ориентацию каждой из этих частиц относительно макроосей  $Ox_i$ . Рассмотрим вариант случайной (хаотической) ориентации составных частиц, при которой любое расположение микроосей частиц относительно макроосей равновероятно. Выделим в композите объем с достаточно большим числом  $N_\Sigma$  составных эллипсоидальных частиц с одинаковым тензором теплопроводности, компоненты которого заданы в микроосях, и случайной (хаотической) ориентацией главных осей этого тензора.

При  $N_\Sigma \rightarrow \infty$  можно считать, что любое расположение микроосей равновероятно и относительная плотность  $\eta_0$  распределения микрообъемов композита по возможным ориентациям этих осей имеет постоянное значение. Следовательно, плотность распределения точек пересечения единичной сферы микроосью  $O'\xi_3$  (см. рисунок) постоянна по ее поверхности, а совокупность включений, для которых эта микроось расположена в пределах элементарного телесного угла  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\psi$ , равномерно распределена по углу  $\varphi$ . Тогда в данной совокупности доля объема частиц, для которой микроось  $O'\xi_1$  находится в секторе с углом  $d\varphi$ , равна  $\eta_0 d\Omega d\varphi$ . После интегрирования по всем возможным ориентациям получим

$$\int_{\Omega} d\Omega \int_0^{2\pi} \eta_0 d\varphi = \eta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 8\pi^2 \eta_0 = 1.$$

Отсюда следует, что  $\eta_0 = 1/(8\pi^2)$ .

Если включения обладают каким-либо свойством, заданным скалярной величиной  $F(\varphi, \psi, \theta)$ , не зависящей в пределах рассматриваемого объема композита от координат  $x_i$ , то среднее значение этой

величины для такого композита со случайной ориентацией включений

$$\bar{F} = \eta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} F(\varphi, \psi, \theta) \sin \theta d\theta = \langle \eta_0 F \rangle. \quad (13)$$

При осреднении характеристик включений, выражаемых векторной величиной с проекциями  $F_k(\varphi, \psi, \theta)$ , заданными в микроосях  $O'\xi_k$ , необходимо предварительно перевести эти проекции в макрооси  $Ox_i$  по формуле  $F_i(\varphi, \psi, \theta) = a_{ki}F_k(\varphi, \psi, \theta)$ , а затем по аналогии с формулой (13) записать

$$\bar{F}_i = \eta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} a_{ki}F_k(\varphi, \psi, \theta) \sin \theta d\theta = \langle \eta_0 F_i \rangle = \langle \eta_0 a_{ki}F_k \rangle.$$

В данном случае интерес представляет характеристика включений, заданная тензором второго ранга (тензором теплопроводности) с компонентами  $\lambda_{kl}^0(\varphi, \psi, \theta)$ ,  $l = 1, 2, 3$ . Тогда с учетом их преобразования по формуле  $\lambda_{ij}(\varphi, \psi, \theta) = a_{ki}a_{lj}\lambda_{kl}^0(\varphi, \psi, \theta)$  операцию осреднения можно представить в виде

$$\bar{\lambda}_{ij} = \eta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} a_{ki}a_{lj}\lambda_{kl}^0(\varphi, \psi, \theta) \sin \theta d\theta = \langle \eta_0 a_{ki}a_{lj}\lambda_{kl}^0 \rangle. \quad (14)$$

Поскольку в отдельно взятой составной частице компоненты тензора эффективной теплопроводности не зависят от углов Эйлера, при хаотической ориентации осей симметрии частиц формула (14) с учетом равенств  $\lambda_{kl}^0 = \lambda_k^0$  при  $k = l$  и  $\lambda_{kl}^0 = 0$  при  $k \neq l$  принимает вид

$$\bar{\lambda}_{ij} = \eta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha i}a_{\alpha j}\lambda_{\alpha}^0 \sin \theta d\theta. \quad (15)$$

Например, используя формулы (5), (9) и (15), при  $i = j = 3$  находим

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{33} &= \eta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} (\lambda_1^0(\cos \varphi \sin \theta)^2 + \lambda_2^0(\sin \varphi \sin \theta)^2 + \lambda_3^0 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= (\lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0)/3 = \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

Такой же результат, но после более громоздких вычислений, можно получить для  $\bar{\lambda}_{11}$  и  $\bar{\lambda}_{22}$ . Непосредственной проверкой можно убедиться, что  $\bar{\lambda}_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Например, с учетом формул (11) и (15)

находим

$$\bar{\lambda}_{13} = \bar{\lambda}_{31} = \eta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} (\lambda_1^0 a_{11} a_{13} + \lambda_2^0 a_{21} a_{23} + \lambda_3^0 a_{31} a_{33}) \sin \theta d\theta = 0,$$

поскольку подынтегральная функция, согласно формулам (5), является линейной комбинацией  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$ . Аналогичная ситуация возникает при вычислении  $\bar{\lambda}_{31} = \bar{\lambda}_{13}$  и  $\bar{\lambda}_{23} = \bar{\lambda}_{32}$ . В соотношении для  $\bar{\lambda}_{12} = \bar{\lambda}_{21}$  в подынтегральную функцию войдут слагаемые, содержащие произведения  $a_{11} a_{12}$ ,  $a_{21} a_{22}$  и  $a_{31} a_{32}$ . Из формул (5) следует, что эта функция будет линейной комбинацией  $\sin 2\varphi$  и  $\sin 2\psi$ , при интегрировании это приведет к нулевому результату.

Таким образом, при хаотической ориентации анизотропных частиц, теплопроводность которых характеризует один и тот же тензор второго ранга с главными значениями  $\lambda_k^0$ , осреднение по всем ориентациям таких частиц приводит к не зависящей от направления скалярной характеристике, равной  $\bar{\lambda}$ . Эту характеристику можно трактовать как диагональный компонент изотропного тензора с компонентами  $\tilde{\lambda}_{ij} = \bar{\lambda} \delta_{ij}$ , а операцию осреднения заменить равенством первых (линейных) инвариантов изотропного тензора и тензора теплопроводности анизотропной частицы, т. е.  $\tilde{\lambda}_{ij} \delta_{ij} = 3\bar{\lambda} = \lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0$ . Отметим, что такой подход справедлив для частиц любой формы и размеров при условии равномерного распределения анизотропных частиц в объеме композита по всем возможным ориентациям главных осей их тензора теплопроводности. Тогда при хаотической ориентации таких частиц различного размера, заполняющих всю область, занятую рассматриваемым композитом, тензор эффективной теплопроводности этого композита будет изотропным, а его эффективный коэффициент  $\lambda^*$  теплопроводности с учетом формулы (1) можно представить в безразмерном виде

$$\tilde{\lambda}^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_m} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \tilde{\lambda}_\alpha = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1 + (\tilde{\lambda}_\alpha - 1)(D_\alpha^0 + (1 - D_\alpha^0)C_V)}{1 + (\tilde{\lambda}_\alpha - 1)D_\alpha^0(1 - C_V)}. \quad (16)$$

**Текстурная функция.** Если ориентация частиц в композите упорядочена, т. е. композит текстурирован, то относительная плотность  $\eta(\varphi, \psi, \theta)$  распределения частиц по ориентациям микроосей зависит от угловых координат. В общем случае она может быть неоднородной в рассматриваемом объеме композита, т. е. зависеть и от координат  $x_i$ . В этом случае необходимо проводить осреднение не только по ориентациям частиц, но и по объему композита. Если функция  $\eta(\varphi, \psi, \theta)$  не зависит от координат  $x_i$  и удовлетворяет условию нормирования  $\langle \eta \rangle = 1/(8\pi^2)$ , то при осреднении характеристики частиц, выражаемой компонентами  $\lambda_{kl}(\varphi, \psi, \theta)$  тензора теплопроводности, вме-

сто формулы (14) следует записать

$$\bar{\lambda}_{ij} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \eta(\varphi, \psi, \theta) a_{ki} a_{lj} \lambda_{kl}^0(\varphi, \psi, \theta) \sin \theta d\theta = \langle \eta a_{ki} a_{lj} \lambda_{kl}^0 \rangle, \quad (17)$$

Тогда вместо формулы (16) для безразмерных компонент тензора эффективной теплопроводности композита получим

$$\tilde{\lambda}_{ij}^* = \frac{\lambda_{ij}^*}{\lambda_m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \eta(\varphi, \psi, \theta) \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha i} a_{\alpha j} \tilde{\lambda}_{\alpha}^0 \sin \theta d\theta. \quad (18)$$

Функцию  $f(\varphi, \psi, \theta) = \eta(\varphi, \psi, \theta)/\eta_0$  называют текстурной [6, 7]. В данном случае ее текущее значение равно доле объема композита, занятого составными частицами, ориентация осей симметрии которых определена текущими значениями аргументов этой функции. Вероятностная трактовка текстурной функции связана с понятием совместной плотности распределения случайного вектора [8], координатами которого являются углы Эйлера.

При хаотической ориентации составных частиц, т.е. при отсутствии у композита текстуры, зависимость от углов Эйлера исчезает и текстурная функция тождественно равна единице, что соответствует переходу формулы (17) в равенство (14). Эту функцию также можно принять равной единице в случае так называемой идеальной текстуры, когда ориентация всех анизотропных включений одинакова [1], а микрооси совпадают с соответствующими макроосями, т.е.  $\varphi = \psi = \theta = 0$  (см. рисунок) и матрица (3) станет единичной, что приведет к формуле (1).

В общем случае текстура композита может быть комбинированной, включающей набор из  $n$  дискретных идеальных текстур и непрерывно распределенную текстуру, характеризуемую функцией  $f_1(\varphi, \psi, \theta)$ . Пусть для каждой из дискретных идеальных структур ориентация микроосей определена значениями  $\varphi_{\beta}$ ,  $\psi_{\beta}$  и  $\theta_{\beta}$  ( $\beta = \overline{1, n}$ ) углов Эйлера. Тогда вместо формулы (18) следует использовать соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{ij}^* = \eta_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f_1(\varphi, \psi, \theta) \left( \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha i} a_{\alpha j} \tilde{\lambda}_{\alpha}^0 \right) \sin \theta d\theta + \\ + \sum_{\beta=1}^n v_{\beta} \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha i}^{\beta} a_{\alpha j}^{\beta} \tilde{\lambda}_{\alpha}^0, \end{aligned}$$

где  $v_{\beta}$  — доля объема композита, в которой идеальная текстура определена значениями  $\varphi_{\beta}$ ,  $\psi_{\beta}$  и  $\theta_{\beta}$ , а верхний индекс  $\beta$  у направляющих

косинусов означает, что они должны быть вычислены по формулам (5) при таких значениях углов Эйлера. При этом текстурную функцию  $f_1(\varphi, \psi, \theta)$  следует нормировать согласно условию

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f_1(\varphi, \psi, \theta) \sin \theta d\theta = 1 - \sum_{\beta=1}^n v_{\beta}.$$

**Коническая текстура композита.** Среди непрерывно распределенных текстур композита с эллипсоидальными включениями можно выделить так называемую коническую текстуру [6], когда одноименные микрооси всех составных частиц являются образующими соосных круговых конических поверхностей и равномерно распределены по этим поверхностям, а направления двух остальных ортогональных микроосей случайны. Если ось этих поверхностей совместить с макроосью  $Ox_3$ , то текстурная функция  $F(\theta)$  в этом случае будет зависеть лишь от одной угловой координаты  $\theta$ . Тогда после осреднения по углам  $\varphi$  и  $\psi$  формулы (7) и (8) примут вид

$$\lambda_{11}^* = \lambda_{22}^* = \frac{1}{4}(\lambda_1^0 + \lambda_2^0)(1 + \cos^2 \theta) + \frac{1}{2}\lambda_3^0 \sin^2 \theta, \quad (19)$$

формула (9) перейдет в равенство

$$\lambda_{33}^* = \frac{1}{2}(\lambda_1^0 + \lambda_2^0) \sin^2 \theta + \lambda_3^0 \cos^2 \theta, \quad (20)$$

а из формул (10)–(12) (как и при хаотической ориентации микроосей) следует  $\lambda_{12}^* = \lambda_{13}^* = \lambda_{23}^* = 0$ , т.е. макроось  $Ox_3$  композита станет одной из главных осей тензора эффективной теплопроводности композита с конической текстурой. Такой композит будет обладать свойством трансверсальной изотропии относительно этой оси [7, 9].

В случае конической текстуры при осреднении допустимо ограничиться интегрированием по углу  $\theta$  в интервале  $(0; \pi/2)$ . Тогда текстурную функцию  $F(\theta)$  следует нормировать из условия

$$\int_0^{\pi/2} F(\theta) \sin \theta d\theta = 1, \quad (21)$$

причем равномерному распределению микроосей  $O'\xi_3$  по углу  $\theta$  соответствует значение  $F(\theta) \equiv 1$ . Таким образом, для главных значений тензора эффективной теплопроводности композита с конической текстурой с учетом формул (19) и (20) получим

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} ((\lambda_1^0 + \lambda_2^0)(1 + \cos^2 \theta) + 2\lambda_3^0 \sin^2 \theta) F(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (22)$$

$$\bar{\lambda}_3^* = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} ((\lambda_1^0 + \lambda_2^0) \sin^2 \theta + 2\lambda_3^0 \cos^2 \theta) F(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (23)$$

При идеальной конической текстуре микрооси  $O'\xi_3$  всех составных частиц будут образующими одной конической поверхности с заданным значением  $\gamma \in (0; \pi/2]$  полуугла раствора конуса. Тогда из условия (21) следует  $F(\theta) = 1/\sin \gamma$  и формулы (22) и (23) переходят в равенства

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{1}{4}(\lambda_1^0 + \lambda_2^0)(1 + \cos^2 \gamma) + \frac{1}{2}\lambda_3^0 \sin^2 \gamma, \quad (24)$$

$$\bar{\lambda}_3^* = \frac{1}{2}(\lambda_1^0 + \lambda_2^0) \sin^2 \gamma + \lambda_3^0 \cos^2 \gamma. \quad (25)$$

При  $\gamma = \pi/2$  текстуру называют кольцевой [6]. В этом случае из формул (24) и (25) следует

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{1}{4}(\lambda_1^0 + \lambda_2^0 + 2\lambda_3^0) \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}_3^* = \frac{1}{2}(\lambda_1^0 + \lambda_2^0).$$

Если  $\gamma = 0$ , имеем частный случай идеальной конической текстуры, называемой аксиальной [6], для которой, согласно формулам (24) и (25),

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{1}{2}(\lambda_1^0 + \lambda_2^0) \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}_3^* = \lambda_3^0.$$

В отличие от идеальной конической текстуры для реальной текстуры возможно ее некоторое рассеяние, вызванное тем, что не все одноименные микрооси частиц (в данном случае оси  $O'\xi_3$ ) строго направлены по образующим одной конической поверхности. При упрощенном описании слабого рассеяния идеальной конической текстуры можно принять, что микрооси  $O'\xi_3$  составных частиц равномерно заполняют зазор между двумя соосными круговыми коническими поверхностями, образующие которых составляют с осью углы  $\gamma + \delta$  и  $\gamma - \delta$ , причем  $\delta \leq \gamma$  и  $\gamma + \delta \leq \pi/2$ . Совместим ось этих поверхностей с макроосью  $Ox_3$ , а зазор между ними равномерно заполним микроосями  $O\xi_3$  составных частиц. Тогда условие (21) примет вид

$$\int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} F_\delta(\theta) \sin \theta d\theta = 1,$$

но в пределах интервала интегрирования  $F_\delta(\theta) = F(\gamma, \delta) = \text{const}$ . После вычисления интеграла находим  $F(\gamma, \delta) = 1/(2 \sin \gamma \sin \delta)$  и вместо формул (18) и (19) получаем соответственно

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{1}{4}(\lambda_1^0 + \lambda_2^0) & \left( 1 + \cos^2 \gamma \cos^2 \delta + \frac{1}{3} \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \right) + \\ & + \frac{1}{2} \lambda_3^0 \left( \sin^2 \gamma + \sin^2 \delta - \frac{4}{3} \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \right), \end{aligned}$$

$$\bar{\lambda}_3^* = \frac{1}{2}(\lambda_1^0 + \lambda_2^0) \left( \sin^2 \gamma + \sin^2 \delta - \frac{4}{3} \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \right) + \lambda_3^0 \left( \cos^2 \gamma \cos^2 \delta + \frac{1}{3} \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \right).$$

**Заключение.** На основе построенной в работе [1] математической модели переноса тепловой энергии в композите с анизотропными включениями в виде трехосных эллипсоидов разработана модель текстурированного композита с такими включениями. Эта модель использована для вывода расчетных зависимостей, позволяющих оценить эффективные коэффициенты теплопроводности композита с произвольной текстурной функцией, в том числе при сочетании непрерывно распределенной текстуры с набором дискретных идеальных текстур. Рассмотрены частные случаи конической текстуры, причем учтено ее возможное рассеяние. Представленные результаты можно использовать для прогноза эффективных коэффициентов теплопроводности текстурированных композитов, модифицированных эллипсоидальными включениями (в том числе наноструктурными элементами).

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ–255.2012.8).*

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с анизотропными эллипсоидальными включениями. *Наука и образование: электронное научно-техническое издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2013, № 4. DOI: 10.7463/0413.0541050.
- [2] Эшелби Дж. *Континуальная теория дислокаций*. Москва, Изд-во иностр. лит., 1963, 248 с.
- [3] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 76–85.
- [4] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 512 с.
- [5] Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука, 1968, 720 с.
- [6] Адамеску Р.А., Гельд П.В., Митюшов Е.А. *Анизотропия физических свойств металлов*. Москва, Металлургия, 1985, 136 с.
- [7] Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. Москва, Наука, 1977, 400 с.
- [8] Печинкин А.В., Зарубин В.С., Крищенко А.П., ред. *Теория вероятностей*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 456 с.
- [9] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высш. шк., 2001, 575 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Зарубин В.С. Теплопроводность текстурированного композита с анизотропными эллипсоидальными включениями. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/670.html>

Зарубин Владимир Степанович — д-р техн. наук, проф. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [zarubin@bmstu.ru](mailto:zarubin@bmstu.ru)