

Определение динамических характеристик гранулированных сред резонансным методом

© Л.Д. Акуленко^{1,2}, А.А. Гавриков¹, С.В. Нестеров¹

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Разработаны теоретические основы для определения инерционных и упругих характеристик гранулированных сред на основе резонансного метода. Проведено сравнение аналитических расчетов с экспериментальными данными. Результаты исследований гидродинамических характеристик гранулированных сред, пропитанных жидкостью, представляют интерес в научном и практическом аспектах для гидроакустики и морской геофизики.

Ключевые слова: резонансный метод, акустика неоднородных сред, гранулированные среды.

Введение. Теоретические основы резонансного метода, использующего жесткие гидроакустические трубы, разработана и применена для определения динамических свойств различных материалов в [1, 2]. Эти свойства гранулированных сред, пропитанных жидкостью, в естественных условиях удобнее исследовать с помощью резонаторов в форме прямоугольных сосудов.

Для определения динамической плотности и упругости среды использован сосуд размерами $a \times b$ с акустически мягкими стенками и дном. На горизонтальное дно сосуда помещают слой среды толщиной h , динамические свойства (плотность, вязкость, упругость и другие характеристики) которой неизвестны. Сверху среды находится слой жидкости высотой H , $H \gg h$, для которой известны (измерены или взяты из справочников) скорость звука c_1 в жидкости (при заданной температуре) и ее плотность ρ_1 . Для определения динамических характеристик гранулированной среды применим резонансный метод [1, 2].

На первом этапе исследуем теоретически элементарную задачу о собственных колебаниях жидкости без учета подстилающего слоя ($h = 0$); полученные результаты сопоставим с табличными.

В рамках линейной акустики, предполагая существование звукового потенциала $\Phi(x, y, z, t)$, связанного с звуковым давлением p и скоростью колебаний \mathbf{v} соотношениями

$$p(x, y, z, t) = \rho_1 \dot{\Phi}(x, y, z, t), \quad \mathbf{v}(x, y, z, t) = -\nabla \Phi(x, y, z, t).$$

Сформулируем следующую краевую задачу. Полагая, что акустическое воздействие гармоническое по времени $\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) e^{i\omega t}$,

потенциал удовлетворяет волновому уравнению $\ddot{\Phi} = c_1^2 \Delta \Phi$ и учитывая акустическую мягкость стенок и дна сосуда, получаем

$$\begin{cases} \Delta \varphi + k^2 \varphi = 0, & k = \frac{\omega}{c_1}, \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0, & \Omega = [0, a] \times [0, b] \times [0, H], \end{cases}$$

где k — волновое число.

Методом разделения переменных находим собственные частоты ω_{lmn} и формы колебаний φ_{lmn} :

$$\begin{aligned} \varphi_{lmn} &= \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{H}\right), \quad l, m, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{(\omega_{lmn})^2}{c_1^2} &= \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2, \quad f_{lmn} = \frac{\omega_{lmn}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ω_{lmn} , f_{lmn} — круговые и циклические частоты соответственно (индексы далее опускаются).

Определение динамической плотности. На втором этапе решим задачу на собственные частоты и формы колебаний с учетом слоя среды толщиной $h > 0$. Принимая аналогичные допущения, обозначим плотность ρ_2 и скорость звука c_2 в образце среды, собственную частоту колебаний $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{lmn}$, звуковой потенциал в жидкости $\Phi_1 = \varphi_1(x, y, z)e^{i\tilde{\omega}t}$, в образце среды $\Phi_2 = \varphi_2(x, y, z)e^{i\tilde{\omega}t}$. Аналитическое решение соответствует двум интервалам изменения координаты z :

$$\Delta \varphi_j + k_j^2 \varphi_j = 0, \quad k_j = \frac{\tilde{\omega}}{c_j}, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Условия на свободной поверхности, нижней границе и границе раздела сред для неизвестных функций φ_j имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1|_{z=H+h; x=0, a; y=0, b} &= 0, \quad \varphi_2|_{z=0; x=0, a; y=0, b} = 0, \\ \rho_1 \varphi_1|_{z=h} &= \rho_2 \varphi_2|_{z=h}, \quad (\varphi_1)'_z|_{z=h} = (\varphi_2)'_z|_{z=h}. \end{aligned} \quad (3)$$

Второе равенство (3) соответствует непрерывности звукового давления и скорости колебаний на границе раздела образца среды и жидкости.

Решения краевой задачи на собственные значения и функции (2), (3) определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= B_1 \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin(\tilde{\gamma}_1(H + h - z)), \\ \varphi_2 &= B_2 \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin(\tilde{\gamma}_2 z), \\ \tilde{\gamma}_j^2 &= \frac{\tilde{\omega}^2}{c_j^2} - \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{cases} B_1 \rho_1 \sin(\tilde{\gamma}_1 H) - B_2 \rho_2 \sin(\tilde{\gamma}_2 h) = 0, \\ B_1 \tilde{\gamma}_1 \cos(\tilde{\gamma}_1 H) - B_2 \tilde{\gamma}_2 \cos(\tilde{\gamma}_2 h) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Первые два условия (3) удовлетворяются автоматически. Условия (5) определяют искомые значения собственной частоты $\tilde{\omega}$, связанные с параметрами $\tilde{\gamma}_j$ соотношениями (4). Из условия (5) следует вековое уравнение

$$\det(\tilde{\omega}) \equiv \rho_1 \tilde{\gamma}_2 \sin(\tilde{\gamma}_1 H) \cos(\tilde{\gamma}_2 h) + \rho_2 \tilde{\gamma}_1 \sin(\tilde{\gamma}_2 h) \cos(\tilde{\gamma}_1 H) = 0, \quad (6)$$

$$\tilde{\gamma}_j = \tilde{\gamma}_j(\tilde{\omega}, c_2, \rho_2), \quad j = 1, 2.$$

В уравнении (6) величины $\rho_1, H, h, a, b, c_1, l, m$ (они входят в выражения (4)) заданы; неизвестными являются $\tilde{\omega}, c_2, \rho_2$. Диссипация жидкости и среды считается малой, она входит в значения $\tilde{\omega}$ квадратическим образом и в первом приближении не учитывается, ее значение оценивается измерением полуширины резонансной кривой (принятой в радиотехнических измерениях), поскольку теоретическое определение затруднено. Добротность колебательной системы достаточно велика (затухание мало).

Уравнение (6) представим в более удобной симметричной форме:

$$\frac{\rho_1}{\tilde{\gamma}_1} \operatorname{tg}(\tilde{\gamma}_1 H) = -\frac{\rho_2}{\tilde{\gamma}_2} \operatorname{tg}(\tilde{\gamma}_2 h). \quad (7)$$

Решим уравнение (7) приближенно методом возмущений в предположении, что

$$\frac{h}{H} \ll 1, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\tilde{\omega} - \omega}{\omega} \sim \frac{h}{H}.$$

В первом приближении с учетом формулы (6) получим связь $\tilde{\omega}$ и ρ_2

$$\tilde{\gamma}_1^2 H^2 = \pi n^2 \left(1 - 2 \frac{\rho_2 h}{\rho_1 H} \right), \quad (8)$$

не содержащую неизвестной величины c_2 , что обусловлено первым условием (3) (акустически мягкое дно сосуда).

Из формулы (8) следует приближенное выражение для $\tilde{\omega}^2$, которое позволяет с квадратической погрешностью относительно h/H вычислить разность частот $\tilde{\omega}$ и ω :

$$-\Delta\omega = \tilde{\omega} - \omega = -c_1^2 \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2 \frac{\rho_2 h}{\rho_1 H} \omega^{-1}. \quad (9)$$

В выражении (9) неизвестными являются величины $\tilde{\omega}$ и ρ_2 , остальные параметры заданы. Наличие среды приводит к уменьшению собственных частот. Смысл резонансного метода заключается в измерении резонансных частот $\tilde{\omega}$, практически совпадающих с собственными частотами ω соответствующих мод колебаний l, m, n . Затем из линейного относительно неизвестной динамической плотности ρ_2 гра-

нулированной среды выражения (9) находим

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{2}{n}\right)^2 \left(\frac{c_H}{c_1}\right)^2 \frac{\Delta f}{f} \frac{H}{h}, \quad c_H = fH, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (10)$$

Индексы l , m , n у величин ρ_2 , f , Δf не указаны. Отметим, что выражение (10) содержит отношение малых величин $\Delta f/f$ и h/H . Это обстоятельство требует высокоточных измерений.

Согласно формуле (10), происходит динамическое взвешивание среды, пропитанной жидкостью. Как установлено [1,2], динамическая плотность является комплексной функцией частоты ω внешнего воздействия вследствие взаимодействия между гранулами среды и вязкой жидкостью. Выражение (10) определяет вещественную часть динамической плотности. Скорость звука c_2 в гранулированной среде отсутствует в формулах (9), (10) первого приближения по параметру h/H .

В рамках рассматриваемой постановки задачи тонкий слой среды находится в пучности скорости, т. е. в узле давления. Как показывает анализ [1,2], после определения динамической плотности среды ρ на основе вышеизложенной методики с использованием резонатора с акустически мягким дном, резонатор подлежит модификации. Относительно тонкий слой среды позволяет определить ее упругие свойства, т. е. скорость звука в ней с помощью резонансного метода, если дно резонатора будет акустически твердым или же возможно помещение образца на произвольной высоте. Стенки остаются акустически мягкими, а поверхность жидкости свободной. В этом случае слой оказывается вблизи пучности звукового давления, т. е. вблизи узловой точки скорости.

Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными. Принципиальная схема гидроакустической установки весьма проста, однако подготовка ее элементов к функционированию и измерениям сопряжена с многочисленными трудностями. Основной элемент установки — резонатор (рис. 1) имеет форму прямоугольного сосуда размерами $a = 50$ см, $b = 30$ см, $H = 30$ см; естественно, что $h + d < H$. Стенки и дно выполнены из листов жести толщиной $\delta = 0,06$ см, что позволяет считать их акустически мягкими. Это подтверждается тестовыми испытаниями, приведенными ниже.

Высота столба жидкости $h = 27$ см, в качестве которой брали прокипяченную в течение 2 ч стандартную питьевую воду для удаления растворенных в ней пузырьков воздуха [1,2]. Акустическое поле в воде возбуждалось кольцевым излучателем из сегнетовой соли диаметром 3,8 см и высотой 8 см, имеющим тонкую резиновую оболочку, заполненную касторовым маслом. Излучатель размещали в сосуде в местах пучности давления соответствующей моды и закрепляли жестко с помощью штатива. От генератора строго синусоидальных

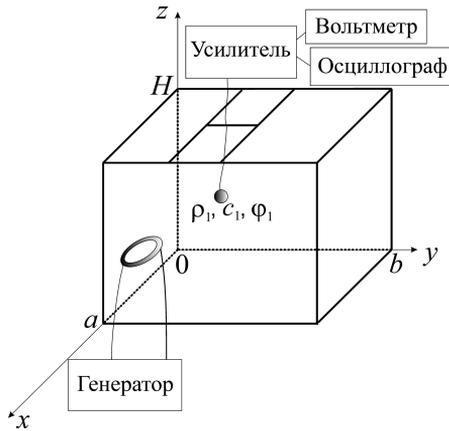


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки

колебаний на излучатель подавалось переменное электрическое напряжение звуковой частоты 20...20 000 Гц. Настройку на требуемую частоту проводили многократно (10–20 раз) и брали ее среднее значение, чтобы уменьшить погрешности ее задания.

Приемник звукового сигнала содержал чувствительный элемент — шарик из титаната бария диаметром 1,5 см. С помощью штатива и координатного устройства, укрепленного на стенке сосуда, положение центра приемника определяли весьма точно (с погрешностью 0,2 см). С приемника сигнал поступал на усилитель звуковой частоты и далее на вольтметр и осциллограф, которые служили индикатором резонанса.

Отметим, что за счет гидростатического давления жидкости увеличились эффективные размеры резонатора, поскольку стенки сосуда гибкие:

$$a^* = 51,436 \text{ см}, \quad b^* = 30,936 \text{ см}, \quad h^* = 27,468 \text{ см}.$$

Для расчетов использовали справочное значение скорости звука $c_1 = 1,469 \cdot 10^5$ см/с в воде при температуре $t_0 = 15...20^\circ\text{C}$. Предварительно было проведено тестирование установки и методики вычислений. Собственные (резонансные) частоты колебаний воды в акустически мягком сосуде сравнивали с теоретически вычисленными по формуле (1) для различных мод: $l = 1, 2, \dots, 6$; $m = 1, 2, 3$; $n = 1, 2$. В среднем они различались примерно на 1%, причем теоретически вычисленные значения оказывались выше экспериментальных, что отвечает физическим представлениям (отсутствие вязкости в модели). Результаты теста убедительно подтверждают адекватность модели акустически мягкого резонатора.

Пригодность резонатора для измерения динамической плотности проверяли на стандартном керосине, согласно справочным данным $\rho_2 = 0,76...0,78$ г/см³ при комнатной температуре. В сосуде над

столбом воды высотой $H = 26,8$ см помещали тонкий слой керосина высотой $h = 1$ см. Были измерены резонансные частоты без наличия и при наличии слоя среды (керосина). По результатам многократных измерений резонансных частот различных мод колебаний: $l = 1, \dots, 4$; $m = 1, 2, 3$; $n = 1, 2$, динамическая плотность керосина $\rho_2 = (0,76 \pm 0,02)$ г/см³.

Приведем результаты измерений динамической плотности гранулированной среды, пропитанной жидкостью. Для этого брали мелкий, хорошо окатанный кварцевый песок со средним диаметром 0,02 см, и воду, свойства которой изучены и описаны выше. Основные гранулометрические элементы среды рассматриваемого образца: пористость $\eta = 0,43$, просвет $\xi = 0,27$, статическая (низкочастотная) плотность $\rho_0 = 2,00$ г/см³ [1–6]. На основе теоретических и экспериментальных исследований [1, 2] при частоте внешнего воздействия $f \gtrsim 3500$ Гц установлено, что динамическая плотность образца существенно отличается от указанной: $\rho_2(f) < \rho_0$; она уменьшается с ростом частоты f . Это свойство теоретически подтверждается формулами (9), (10).

Для экспериментального определения динамической плотности слоя (рис. 2) пористой среды резонансным методом требуется весьма тщательная подготовка установки и среды к испытаниям. Это представляет основную и существенную трудность (ноу хау) исследований. Ниже приведены результаты измерений динамической плотности для двух вариантов образцов.

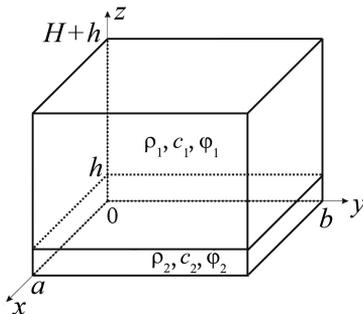


Рис. 2. Слой образца среды, расположенный на дне сосуда

Для первого образца рассмотрены резонансные колебания резонатора при $H = 26,5$ см, $h = 0,9$ см. Определен сдвиг частот и по формуле (10) вычислена динамическая плотность образца для различных мод колебаний: $l = 1, \dots, 4$; $m = 1, 2, 3$; $n = 1, 2$. При увеличении частот наблюдается тенденция уменьшения плотности от значения $\rho_2 = 1,82$ г/см³ при $f_{111} = 3860$ Гц до значения $\rho_2 = 1,6$ г/см³ при $f_{432} \approx 10543$ Гц. Среднее значение и среднеквадратическое отклонение $\rho = (1,7 \pm 0,1)$ г/см³.

Для второго образца толщиной слоя $h = 0,56$ см после аналогичных исследований определено значение $\rho_2 = (1,72 \pm 0,14)$ г/см³. Сравнение этих данных с результатами, полученными резонансным методом для резонатора с жесткими стенками, приводит по четырем замерам к значениям ρ в диапазоне $1,6 \dots 2,0$ г/см³, а среднее значение и среднеквадратическое отклонение равны $\rho = (1,75 \pm 0,15)$ г/см³.

Полученные результаты убедительно свидетельствуют о зависимости динамической плотности гранулированной среды, заполненной жидкостью, от частоты акустического воздействия. Физическое объяснение этой зависимости заключается в уменьшении толщины пограничного слоя жидкости, окружающей гранулы (песчинки), при увеличении частоты. Данное обстоятельство приводит к эффекту независимости колебаний жидкости и гранул среды. Следуя электромеханической аналогии, запишем выражение для $\rho(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$:

$$\rho(\infty) = \left[\frac{1}{(1 - \eta)\rho^*} + \frac{1}{\eta\rho_0} \right]^{-1},$$

где $\rho^* = 2,75$ г/см³, $\rho_0 = 1$ г/см³.

Определение скорости звука. При некоторой модификации экспериментальной установки возможно определение скорости звука в гранулированной среде, пропитанной несжимаемой жидкостью, без замены акустически мягкого дна сосуда на жесткое. Пусть слой образца в сосуде размерами $a \times b \times h$ размещается на произвольной высоте z_0 , например слой подвешен на сетке из тонкой проволоки (рис. 3).

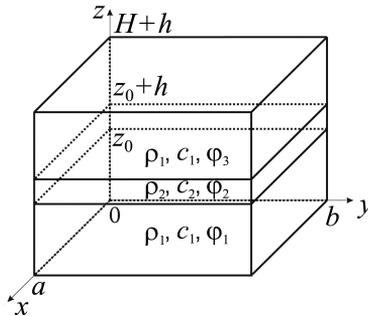


Рис. 3. Слой образца среды, расположенный на высоте z_0

В рамках предыдущих ограничений и сохраняя прежние обозначения (ρ_1, c_1 — плотность и скорость звука в жидкости, ρ_2, c_2 — в образце среды), введем звуковой потенциал φ_1 в слое жидкости под слоем гранулированной среды, φ_2 — в образце, φ_3 — в слое жидкости над слоем образца. Тогда можно сформулировать следующую краевую задачу

$$\Delta\varphi_j + k_j^2\varphi_j = 0, \quad k_s = \frac{\tilde{\omega}}{c_s}, \quad j = 1, 2, 3, \quad s = 1, 2, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1|_{z=0; x=0, a; y=0, b} &= 0, \quad \Phi_2|_{x=0, a; y=0, b} = 0, \quad \Phi_3|_{z=H+h; x=0, a; y=0, b} = 0, \\ \rho_1 \Phi_1|_{z=z_0} &= \rho_2 \Phi_2|_{z=z_0}, \quad \rho_2 \Phi_2|_{z=z_0+h} = \rho_1 \Phi_3|_{z=z_0+h}, \\ (\Phi_1)'_z|_{z=z_0} &= (\Phi_2)'_z|_{z=z_0}, \quad (\Phi_2)'_z|_{z=z_0+h} = (\Phi_3)'_z|_{z=z_0+h}. \end{aligned} \quad (12)$$

В уравнении (11) k_j — волновые числа; $\tilde{\omega}$ — собственная частота. Первое условие (12) определяется акустически мягкими стенками, дном и открытой поверхностью, два последних условия — непрерывностью акустического давления и скоростью колебаний на границе образца и жидкости.

Решение уравнения (11) с краевыми условиями (12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= B_1 \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin(\tilde{\gamma}_1 z), \\ \varphi_2 &= \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) (B_2 \sin(\tilde{\gamma}_2 z) + B_3 \cos(\tilde{\gamma}_2 z)), \\ \varphi_3 &= B_4 \sin\left(\frac{\pi l x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{b}\right) \sin(\tilde{\gamma}_1 (H + h - z)), \end{aligned} \quad (13)$$

где B_j ($j = 1, \dots, 4$) — неопределенные коэффициенты, параметры γ_j зависят от измеренной частоты $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\gamma}_j^2 = \frac{\tilde{\omega}^2}{c_j^2} - \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad j = 1, 2.$$

Краевые условия (12), соответствующие акустически мягким стенкам, дну и свободной поверхности удовлетворяются автоматически, подстановка в условия сопряжения приводит к линейной системе на неопределенные коэффициенты

$$\begin{aligned} B_1 \rho_1 \sin(\tilde{\gamma}_1 z_0) - B_2 \rho_2 \sin(\tilde{\gamma}_2 z_0) - B_3 \rho_2 \cos(\tilde{\gamma}_2 z_0) &= 0, \\ B_1 \tilde{\gamma}_1 \cos(\tilde{\gamma}_1 z_0) - B_2 \tilde{\gamma}_2 \cos(\tilde{\gamma}_2 z_0) + B_3 \tilde{\gamma}_2 \sin(\tilde{\gamma}_2 z_0) &= 0, \\ B_2 \tilde{\gamma}_2 \cos(\tilde{\gamma}_2 (z_0 + h)) - B_3 \tilde{\gamma}_2 \sin(\tilde{\gamma}_2 (z_0 + h)) + B_4 \tilde{\gamma}_1 \cos(\tilde{\gamma}_1 (H - z_0)) &= 0, \\ B_2 \rho_2 \sin(\tilde{\gamma}_2 (z_0 + h)) + B_3 \rho_2 \cos(\tilde{\gamma}_2 (z_0 + h)) - B_4 \rho_1 \sin(\tilde{\gamma}_1 (H - z_0)) &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель системы нулю, получаем вековое уравнение

$$\begin{aligned} \det(\tilde{\omega}) &= R \tilde{\Gamma}^{-1} (-\sin(\tilde{\gamma}_1 z_0) \cos(\tilde{\gamma}_1 z_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 h) \sin(\tilde{\gamma}_1 H) + \\ &+ \sin(\tilde{\gamma}_2 h) \cos(\tilde{\gamma}_1 H) - \cos^2(\tilde{\gamma}_1 z_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 h) \cos(\tilde{\gamma}_1 H)) + \\ &+ \tilde{\Gamma} R^{-1} (\sin(\tilde{\gamma}_1 z_0) \cos(\tilde{\gamma}_1 z_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 h) \sin(\tilde{\gamma}_1 H) + \\ &+ \cos^2(\tilde{\gamma}_1 z_0) \sin(\tilde{\gamma}_2 h) \cos(\tilde{\gamma}_1 H)) + \cos(\tilde{\gamma}_2 h) \sin(\tilde{\gamma}_1 H) = 0, \end{aligned}$$

где введены обозначения: $R = \rho_1/\rho_2$, $\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_1/\tilde{\gamma}_2$.

Используя метод возмущений в предположении $h/H \ll 1$, вековое уравнение можно представить в виде

$$\det(\tilde{\omega}) \approx \sin(\tilde{\gamma}_1 H) + h\tilde{\gamma}_2 \cos(\tilde{\gamma}_1 H) \frac{R\tilde{\Gamma}^{-1} + \tilde{\Gamma}R^{-1}}{2} + \\ + h\tilde{\gamma}_2 \cos(\tilde{\gamma}_1(H - 2z_0)) \frac{\tilde{\Gamma}R^{-1} - R\tilde{\Gamma}^{-1}}{2} = 0.$$

Аналогично, как и при определении динамической плотности, введем малый параметр

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{h}{H}, \quad \Delta\omega = (\omega - \tilde{\omega}).$$

Тогда вековое уравнение принимает вид

$$\det(\tilde{\omega}) \approx \sin(\gamma_1 H) + h\gamma_2 \cos(\gamma_1 H) \frac{R\Gamma^{-1} + \Gamma R^{-1}}{2} + \\ + h\gamma_2 \cos(\gamma_1(H - 2z_0)) \frac{\Gamma R^{-1} - R\Gamma^{-1}}{2} + \\ + (\gamma_1)'|_{\tilde{\omega}=\omega} \cos(\gamma_1 H) (\tilde{\omega} - \omega) = 0, \quad (14)$$

где введены обозначения:

$$\Gamma = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_2^2} - \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}, \\ \gamma_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \left(\frac{\pi l}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} = \frac{\pi n}{H}. \quad (15)$$

С учетом формулы (15) выражение (14) можно записать следующим образом:

$$\det(\tilde{\omega}) \approx (-1)^n \left(h \frac{R\Gamma^{-1}\gamma_2 + \Gamma R^{-1}\gamma_1}{2} + \\ + h(2 \cos^2(\gamma_1 z_0) - 1) \frac{\Gamma R^{-1}\gamma_2 - R\Gamma^{-1}\gamma_1}{2} + (\gamma_1)'|_{\tilde{\omega}=\omega} (\tilde{\omega} - \omega) \right) = 0.$$

Отсюда найдем собственную частоту $\tilde{\omega}$ и сдвиг частот $\Delta\omega$:

$$\tilde{\omega} = -\frac{\gamma_1 c_1^2}{\omega H} \left(h\gamma_2 \frac{R\Gamma^{-1} + \Gamma R^{-1}}{2} + \\ + h\gamma_2(2 \cos^2(\gamma_1 z_0) - 1) \frac{\Gamma R^{-1} - R\Gamma^{-1}}{2} - \frac{\omega^2 H}{\gamma_1 c_1^2} \right), \quad (16)$$

$$\Delta\omega = \tilde{\omega} - \omega = \frac{h}{H} \frac{\gamma_1 \gamma_2 c_1^2}{\omega} (R\Gamma^{-1} + \cos^2(\gamma_1 z_0)(\Gamma R^{-1} - R\Gamma^{-1})).$$

Выражения (16) можно существенно упростить, если предположить, что образец среды помещен в пучность давления акустической волны, $\cos(\gamma_1 z_0) = 0$. Последнее предположение вполне реализуемо

при возможности помещения слоя среды на произвольной высоте, так как нахождение пучности давления обеспечено подвижностью приемника, прикрепленного к координатному устройству. Таким образом, выражение (16) принимает вид

$$\tilde{\omega} = -\frac{c_1^2}{\omega H} \left(h(\gamma_2)^2 R - \frac{\omega^2 H}{c_1^2} \right) = -R \frac{h}{H} \frac{c_1^2 \gamma_2^2}{\omega} + \omega, \quad (17)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{h}{H} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{c_1^2 \gamma_2^2}{\omega^2} = -\frac{h}{H} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{c_1^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right).$$

Из последнего выражения (17) найдем скорость звука в образце гранулированной среды, пропитанной несжимаемой жидкостью,

$$c_2 = \left(\frac{1}{\omega^2} \left(\left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right) - \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{H}{h} \frac{\rho_2}{c_1^2 \rho_1} \right)^{-1/2},$$

$$c_2 = \left(\frac{1}{c_1^2} - \left(\frac{\pi n}{\omega H} \right)^2 - \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{H}{h} \frac{\rho_2}{c_1^2 \rho_1} \right)^{-1/2}, \quad (18)$$

$$c_2 = \left(\frac{1}{c_1^2} - \left(\frac{n}{2c_H} \right)^2 - \frac{\Delta f}{f} \frac{H}{h} \frac{\rho_2}{c_1^2 \rho_1} \right)^{-1/2}, \quad c_H = f H, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

и модуль объемной упругости

$$K_2 = \rho_2 c_2^2 = \left(\frac{1}{\rho_2 \omega^2} \left[\left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right] - \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{H}{h \rho_1 c_1^2} \right)^{-1}. \quad (19)$$

Отметим, что в формулах (18), (19) плотность среды ρ_2 можно найти обычным статическим взвешиванием, поскольку в пучности давления звуковой волны (и соответственно узле скорости) частицы среды не движутся.

Из соотношений (18), (19) также следует, что если из каких-либо соображений известны плотность и скорость звука в исследуемой неоднородной среде, можно найти толщину h слоя

$$h = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\Delta\omega H \omega}{c_1^2} \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} - \left(\frac{\pi l}{a} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right)^{-1}.$$

Воспользуемся измерениями [7] плотности и скорости звука в гранулированной среде для определения с помощью формулы (17) возможного сдвига частот при проведении эксперимента. Кроме этих параметров введем также параметры экспериментальной установки:

$$H = 26,5 \text{ см}, \quad a = 51,436 \text{ см}, \quad b = 30,936 \text{ см}, \quad h = 0,9 \text{ см}$$

$$l = m = n = 1, \quad c_1 = 1495 \text{ м/с}, \quad \rho_1 = 1,00 \text{ г/см}^3.$$

Тогда при известных значениях ρ_2 , c_2 можно вычислить сдвиг частот для некоторых произвольно выбранных образцов грунта Черного

и Баренцева морей:

$\Delta\omega/2\pi$, Гц	-35,5	59,3	-15,7	-75,0
ρ_2 , г/см ³	1,91	1,50	2,20	1,56
c_2 , м/с	1 495	1 390	1 720	1 280

Подобный сдвиг частот (несколько десятков герц) легко обнаруживается и регистрируется, что убедительно свидетельствует о возможности определения скорости звука в гранулированной среде, пропитанной жидкостью, описанным выше способом.

Выводы. Построена механическая модель гранулированных сред, пропитанных несжимаемой жидкостью. Поставлена задача определения ее динамических характеристик: плотности и упругости. На основе адекватной математической модели аналитически вычислены собственные частоты главной и более высоких мод гидроупругой системы и найдены их сдвиги по отношению к частотам невозмущенной системы (без наличия среды).

Резонансные кривые и сдвиги частот, определяемые высокоточными экспериментальными измерениями, позволяют найти динамическую плотность и скорость звука (упругость) среды с относительно малой погрешностью. В качестве гидроакустических установок использовали резонаторы на основе прямоугольных сосудов с акустически мягкими стенками и дном. Сосуды заполнены несжимаемой жидкостью с открытой поверхностью (водой, керосином, нефтью и т. д.) и содержат образцы исследуемых гранулированных сред. Результаты имеют важное научное и прикладное значение для гидроакустики гранулированных сред, пропитанных жидкостью, наглядно демонстрируют зависимость характеристик неоднородных сред от частот воздействия и подтверждают пригодность модели акустически мягкого резонатора на основе прямоугольного сосуда.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на определение диссипативных свойств сред, как, например, в работе [2] на экспериментальных установках в виде гидроакустических труб.

Отметим, что резонансным методом также можно исследовать эффективные характеристики эмульсий, если их разместить на дне сосуда или на поверхности жидкости (см. выше тестовый эксперимент, в котором на свободной поверхности помещался керосин).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00247-а, 11-01-00472-а, 12-01-00020-а, 12-01-00789-а, 13-01-00384-а), а также гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-369.2012.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нестеров В. С. Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации. *Акустич. журнал*, 1959, т. 5, вып. 3, с. 337–344.
- [2] Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Исследование инерционных и упругих свойств пропитанных жидкостью гранулированных сред резонансным методом. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2002, № 5, с. 145–156.
- [3] Скучик Е. *Основы акустики*. Т. 1. Москва, Изд-во иностр. лит., 1958, 618 с.
- [4] Лейбензон Л. С. *Собрание трудов*. Т. 2. *Подземная гидрогазодинамика*. Москва, Изд-во АН СССР, 1953, 544 с.
- [5] Маскет М. *Течение однородных жидкостей в пористой среде*. Москва — Ленинград, Гостоптехиздат, 1949, 628 с.
- [6] Терцаги К. *Строительная механика грунта на основе его физических свойств*. Москва — Ленинград, Госстройиздат, 1933, 391 с.
- [7] Нестеров С. В. Сравнительный анализ механических свойств грунтов Черного и Баренцева морей. *Теоретические и экспериментальные исследования волновых процессов в океане. Сборник научных трудов*, Севастополь: Морской гидрофизический институт АН УССР, 1991, с. 140–147.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В. Определение динамических характеристик гранулированных сред резонансным методом. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/666.html>

Акуленко Леонид Денисович — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотруд. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, проф. кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kumak@ipmnet.ru

Гавриков Александр Александрович — мл. науч. сотруд. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. e-mail: gavrikov@ipmnet.ru

Нестеров Сергей Владимирович — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотруд. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.