УДК 514.7

О некоторых классах дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих бесконечные серии симметрий и законов сохранения

© Н.Г. Хорькова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрен метод построения бесконечных серий симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих оператор рекурсии. Метод основан на линеаризации уравнений контактным преобразованием или с помощью накрывающих уравнений. Показано, что «линейная» симметрия линейной системы дифференциальных уравнений порождает оператор рекурсии, с помощью которого строится оператор рекурсии исходной нелинейной системы. Применение методики вычислений продемонстрировано на примерах уравнения минимальных поверхностей и уравнения Бюргерса.

Ключевые слова: *системы дифференциальных уравнений в частных производных, локальные симметрии и законы сохранения, контактные преобразования, оператор рекурсии, накрытия.*

Введение. В настоящее время многие процессы в физике, технике, биологии, экономике и других областях моделируются с использованием систем дифференциальных уравнений в частных производных. Наличие симметрий и законов сохранения у исследуемой системы может помочь в решении разнообразных задач как теоретического, так и прикладного характера. Зная, например, симметрию уравнения, можно попытаться найти инвариантное (автомодельное) решение или размножить известные решения [1–3]. В некоторых случаях полученные решения дифференциальных уравнений будут являться ответом для рассматриваемой задачи, в других случаях такие решения могут оказаться полезными при тестирования программ, используемых для численного решения дифференциальных уравнений. Кроме того, симметрии могут быть использованы для факторизации дифференциальных уравнений — процедуры, позволяющей свести исходное дифференциальное уравнение к другому с меньшим числом переменных. Можно утверждать, что многие известные методы построения точных решений дифференциальных уравнений являются следствием наличия той или иной симметрии. Отметим также, что «полная интегрируемость» систем дифференциальных уравнений тесно связана с наличием у системы бесконечных серий симметрий и законов сохранения (см., например, [4]).

В настоящей работе изложен метод построения бесконечных серий симметрий и законов сохранения с помощью оператора рекурсии для дифференциальных уравнений, которые можно преобразовать в линейное уравнение: а) контактным преобразованием; б) с помощью накрытия. В дальнейшем используются обозначения и терминология, введенные в работах [1, 2, 5].

1. Операторы рекурсии линейных систем дифференциальных уравнений. Метод построения бесконечных серий симметрий и законов сохранения основан на лемме, представленной в работе [6]. Приведем эту лемму с уточнениями и кратким доказательством. Пусть $\pi\colon E^{n+m} \to M^n$ — векторное расслоение, $\bar{X}$ и X — векторные поля на многообразиях E^{n+m} и M^n соответственно. Пара $(\bar{X}, X)$ называется Der-оператором в расслоении π, если для любой точки $a \in E^{n+m}$, $\pi_{*,a}(\bar{X}_a) = X_{\pi(a)}$, где $\pi_{*,a}$ — дифференциал отображения π, а X_a — значение векторного поля X в точке a. Отметим, что любое векторное поле Y на многообразии E^{n+m} может быть поднято на пространство джетов k-го порядка $J^k(\pi)$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$ расслоения π [1]. Поднятие векторного поля Y на пространство джетов $J^k(\pi)$ обозначим $Y^{(k)}$.

В локальных координатах (x, u) на многообразии E^{n+m} (x — координаты на базе расслоения M^n; u — координаты в слое проекции π) Der-оператор $(\bar{X}, X)$ имеет вид

$$\bar{X} = \sum \alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum \beta_j(x,u)\frac{\partial}{\partial u^j}, \quad X = \sum \alpha_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Производящей функцией векторных полей $\bar{X}^{(k)}$ является вектор-функция $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$, где

$$\varphi^j = \bar{X} \lrcorner U^j = \bar{X} \lrcorner \Big(du^j - \sum p_i^j\, dx_i\Big) = \beta_j(x,u) - \sum \alpha_i(x) p_i^j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}\colon F = 0$ — линейная система в векторном расслоении $\pi\colon E^{n+m} \to M^n$. Пусть пара $(\bar{X}, X)$ — Der-оператор в расслоении π, причем векторное поле $\bar{X}^{(\infty)}$ является инфинитезимальной симметрией системы и производящая функция этой симметрии $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ линейна по переменным u^j. Тогда существует набор функций $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in C^\infty(M)$ таких, что $[\bar{l}_F, \bar{l}_\varphi] = A \circ \bar{l}_F$, где $\bar{l}_f$ — оператор универсальной линеаризации, отвечающий функции f (черта обозначает ограничение оператора на бесконечно продолженное уравнение $\mathcal{E}^\infty$).*

Приведем схему доказательства этой леммы. Так как функции F и φ линейны по переменным p_σ^j ($p_\varnothing^j = u^j$), операторы универсальной линеаризации l_F и l_φ являются поднятиями на многообразие $J^\infty(\pi)$

некоторых дифференциальных операторов $\Delta,\ \nabla : \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$. Поэтому

$$[l_F,\ l_\varphi] = [\hat{\Delta},\ \hat{\nabla}] = \widehat{[\Delta, \nabla]} = l_f$$

для некоторой функции f, линейной по переменным p^j_σ, причем из условий леммы следует, что $f \in C^\infty(J^k(\pi))$, где k — порядок системы $\mathcal{E}\colon F = 0$. Применив операторы $[l_F,\ l_\varphi]$ и l_f к вектор-функции $(p^1_\varnothing, \ldots, p^m_\varnothing)$, получим равенство $l_F(\varphi) - l_\varphi(F) = f$, из которого следует, что $f|_\mathcal{E} = 0$. Затем докажем, что $f_i = \sum a_{ij}F_j$, где $a_{ij} \in C^\infty(M)$, т. е. $l_f = A \circ \bar{l}_F$.

Следствие. *Если условия леммы 1 выполнены, система дифференциальных уравнений имеет бесконечную серию симметрий $\bar{l}^k_\varphi(\varphi)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, порожденную оператором рекурсии $R = \bar{l}_\varphi$.*

Таким образом, для получения оператора рекурсии линейной системы надо найти ее симметрию с производящей функцией вида (1), причем функции $\beta_j(x, u)$ должны быть линейны по переменным u^j.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{E}\colon F = 0$ — линейная система с постоянными коэффициентами в векторном расслоении $\pi\colon E^{n+m} \to M^n$ и производящая функция некоторой симметрии $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ линейна по переменным p^j_σ. Тогда существует $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор A такой, что $[\bar{l}_F, \bar{l}_\varphi] = A \circ \bar{l}_F$.*

Замечание. Построенный оператор рекурсии $R = \bar{l}_\varphi$ удовлетворяет соотношению $\bar{l}_F \circ R = P \circ \bar{l}_F$, где оператор $P = \bar{l}_\varphi + A$. Сопряженное равенство $\bar{l}^*_F \circ P^* = R^* \circ \bar{l}^*_F$ показывает, что оператор P^* претендует на роль оператора рекурсии для законов сохранения. Напомним, что законы сохранения достаточно широкого класса уравнений однозначно определяются своими производящими функциями ψ, которые удовлетворяют уравнению $\bar{l}^*_F(\psi) = 0$. Однако не всякое решение данного уравнения является производящей функцией некоторого закона сохранения. Поэтому возможна ситуация, когда полученные с помощью оператора рекурсии функции, принадлежащие ядру оператора $\bar{l}^*_F$, не будут являться производящими функциями законов сохранения. Тем не менее в ряде случаев этот метод приводит к построению бесконечной серии законов сохранения. В качестве иллюстрации докажем следующее утверждение.

Предложение. *Линейное эволюционное кососопряженное уравнение $\mathcal{E}\colon u_t = f(x, u, u_1, \ldots, u_k)$ имеет бесконечную серию законов сохранения с производящими функциями $\psi_s = \bar{D}^{2s}_t(u) = \bar{l}^{2s}_f(u)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Очевидно, что $\psi_s \in \ker \bar{l}^*_F$, где $\bar{l}_F = \bar{D}_t - \bar{l}_f$, $\bar{l}^*_F = -\bar{l}_F$. Осталось лишь проверить выполнение критерия, обеспечивающего существование закона сохранения с производящей функцией

ψ [1]: должен существовать самосопряженный оператор ∇, для которого выполнено равенство $\bar{l}_{\psi} + \bar{\triangle}^* = \bar{\nabla} \circ \bar{l}_F$, где $\bar{l}_F^*(\psi) = \triangle(F)$.

Найдем сначала оператор $\triangle$:

$$\bar{l}_F^*(\psi_s) = -\bar{l}_F\big(\bar{l}_f^{2s}(u)\big) = (\bar{l}_f - \bar{D}_t)\big(\bar{l}_f^{2s}(u)\big) = \\ = \bar{l}_f^{2s}(\bar{l}_f - \bar{D}_t)(u) = \bar{l}_f^{2s}(f - u_t) = -\bar{l}_f^{2s}(F).$$

Следовательно, $\triangle = -\bar{l}_f^{2s}$, $\triangle^* = -(\bar{l}_f^*)^{2s} = -\bar{l}_f^{2s}$ и

$$\bar{l}_{\psi_s} + \bar{\triangle}^* = \bar{l}_{\bar{l}_f^{2s}(u)} - \bar{l}_f^{2s} = \bar{l}_f^{2s} - \bar{l}_f^{2s} = 0.$$

Отметим, что для функций $\bar{l}_f^{2s+1}(u)$ критерий не выполняется. $\square$

2. Построение операторов рекурсии для уравнений, линеаризуемых контактным преобразованием, на примере уравнения минимальных поверхностей.

Построение бесконечных серий симметрий и законов сохранения для нелинейных дифференциальных уравнений, которые можно тем или иным способом линеаризовать, основано на результатах, полученных в разд. 1. В этом разделе будет рассмотрен случай линеаризации уравнения с помощью контактного преобразования, в следующем — с помощью накрытия. Методику вычислений продемонстрируем на примерах конкретных уравнений.

Уравнение минимальных поверхностей

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0 \tag{2}$$

можно линеаризовать с помощью преобразования Лежандра

$$L\colon J^1(\pi) \to J^1(\pi):$$
$$\bar{x} = -u_x, \quad \bar{y} = -u_y, \quad \bar{u} = u - xu_x - yu_y,$$
$$\bar{u}_x = x, \quad \bar{u}_y = y.$$

Для преобразования вторых производных надо построить первое продолжение $L^{(1)}\colon J^2(\pi) \to J^2(\pi)$, что сделать возможно, поскольку преобразование Лежандра является контактным преобразованием. Методика построения $L^{(1)}$ приведена в монографии [1]. Производные второго порядка (для них используются стандартные обозначения r, s, t) преобразуются по следующим формулам:

$$\bar{r} = -\frac{t}{rt - s^2}, \quad \bar{s} = \frac{s}{rt - s^2}, \quad \bar{t} = -\frac{r}{rt - s^2}.$$

В результате преобразований получим линейное уравнение (черточки опустим)

$$(1 + x^2)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (1 + y^2)u_{yy} = 0. \tag{3}$$

Дальнейшая схема действий ясна: находим линейные классические симметрии уравнения (3), строим операторы рекурсии, получаем серии симметрий и законов сохранения (уравнение минимальных поверхностей является самосопряженным, так как получено из вариационного принципа) и записываем полученные объекты в координатах на исходном уравнении (2), используя преобразования $(L^{(k)})^{-1}$. Объем вычислений большой, но при необходимости предложенная схема вычислений может быть реализована.

Для демонстрации некоторых технических приемов, сокращающих объем вычислений, докажем, что алгебра симметрий уравнения минимальных поверхностей бесконечномерна, построив несколько бесконечных серий симметрий этого уравнения. Уравнение минимальных поверхностей инвариантно относительно группы вращений трехмерного пространства. Рассмотрим вращения вокруг координатных осей, дополним их до контактных преобразований $L\colon J^1(\pi) \to J^1(\pi)$, найдем соответствующие контактные поля (инфинитезимальные симметрии), затем по формуле (1) вычислим их производящие функции, которые являются линейными и будут определять операторы рекурсии уравнения (3). Приведем результаты вычислений.

1. *Поворот в плоскости* (x, y). Контактное преобразование

$$L\colon J^1(\pi) \to J^1(\pi):$$
$$x \to x\cos t + y\sin t, \quad y \to -x\sin t + y\cos t, \quad u \to u,$$
$$p_1 \to p_1\cos t + p_2\sin t, \quad p_2 \to -p_1\sin t + p_2\cos t.$$

Контактное векторное поле:

$$X_0 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + p_2\frac{\partial}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Производящая функция: $X \lrcorner U = -yp_1 + xp_2$.

Производящая функция симметрии линеаризованного уравнения имеет вид:

$$\varphi_0 = yp_1 - xp_2.$$

2. *Поворот в плоскости* (x, u). Контактное преобразование

$$L\colon J^1(\pi) \to J^1(\pi):$$
$$x \to x\cos t + u\sin t, \quad y \to y, \quad u \to -x\sin t + u\cos t,$$
$$p_1 \to \frac{-\sin t + p_1\cos t}{\cos t + p_1\sin t}, \quad p_2 \to \frac{p_2}{\cos t + p_1\sin t}.$$

Контактное векторное поле:

$$X_1 = u\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial u} - (1 + p_1^2)\frac{\partial}{\partial p_1} - p_1p_2\frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Производящая функция: $X_1 \lrcorner U = -up_1 - x$.

Производящая функция симметрии линеаризованного уравнения имеет вид:

$$\varphi_1 = (x^2+1)p_1 + xyp_2 - xu.$$

3. *Поворот в плоскости* (y,u). Вычисления аналогичны проведенным в пп. $1, 2$. Производящая функция симметрии линеаризованного уравнения имеет вид:

$$\varphi_2 = xyp_1 + (y^2+1)p_2 - yu.$$

Таким образом, линеаризованное уравнение (3) имеет три оператора рекурсии:

$$\begin{aligned}
&R = x\bar{D}_y - y\bar{D}_x,\\
&R_1 = (1+x^2)\bar{D}_x + xy\bar{D}_y - x,\\
&R_2 = xy\bar{D}_x + (1+y^2)\bar{D}_y - y,
\end{aligned}$$

для которых выполняются следующие соотношения:

$$[R_1,R_2]=R, \quad [R,R_1]=R_2; \quad [R,\bar{l}_F]=0, \quad P_i\circ\bar{l}_F=\bar{l}_F\circ R_i,$$

где $P_1=(x^2+1)\bar{D}_1+xy\bar{D}_2+x, \;\; P_2=xy\bar{D}_1+(y^2+1)\bar{D}_2+y.$

3. Построение операторов рекурсии для уравнений, допускающих накрытие линейным уравнением. Пусть $\tau\colon\tilde{\mathcal{E}}\to\mathcal{E}^\infty$ — накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$ [1, 5], причем $\tilde{\mathcal{E}}=\mathcal{E}'^\infty$ для некоторого уравнения $\mathcal{E}'$ и $P\colon \operatorname{Sym}\mathcal{E}'^\infty\to\operatorname{Sym}\mathcal{E}^\infty$ — некоторый оператор. Тогда, если R' — оператор рекурсии уравнения $\mathcal{E}'^\infty$, то оператор $R=P\circ R'\circ P^{-1}$ должен быть оператором рекурсии уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Аналогичным образом по оператору рекурсии уравнения $\mathcal{E}^\infty$ можно построить оператор рекурсии уравнения $\mathcal{E}'^\infty$. Покажем, как работают эти простые соображения на примере уравнения Бюргерса $u_t=u_{xx}+uu_x$.

Рассмотрим одномерное накрытие уравнения Бюргерса, задаваемое полями:

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_x=\bar{D}_x+\frac{1}{2}uw\frac{\partial}{\partial w},\\
&\tilde{D}_t=\bar{D}_t+\frac{1}{2}w\Big(p_1+\frac{1}{2}u^2\Big)\frac{\partial}{\partial w}.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что накрывающим уравнением является бесконечное продолжение уравнения теплопроводности $w_t=w_{xx}$. Покажем, как найти оператор $P\colon \operatorname{Sym}\mathcal{E}'^\infty\to\operatorname{Sym}\mathcal{E}^\infty$. Нелокальные симметрии в данном накрытии имеют вид $\tilde{Э}_{\varphi,\psi}$, причем функции $\varphi,\psi\in C^\infty(\mathcal{E}'^\infty)$ удовлетворяют следующей системе уравнений ([1], [5]):

$$\begin{aligned}
&\tilde{l}_F(\varphi)=0,\\
&\tilde{D}_x(\psi)=\tilde{Э}_{\varphi,\psi}\Big(\frac{1}{2}uw\Big),\\
&\tilde{D}_t(\psi)=\tilde{Э}_{\varphi,\psi}\Big(\frac{1}{2}w\Big(p_1+\frac{1}{2}u^2\Big)\Big).
\end{aligned}$$

После преобразований последние два уравнения этой системы примут вид

$$\tilde{D}_t(\psi) - \tilde{D}_x^2(\psi) = 0,$$
$$\varphi = \frac{2}{w}\big(\tilde{D}_x(\psi) - u\psi\big).$$

Следовательно, $P = \dfrac{2}{w}(\tilde{D}_x - u)$.

Классические симметрии уравнения теплопроводности хорошо известны (см., например, [1, 3]). Операторы рекурсии для уравнения Бюргерса находятся прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
w_x &\;\to\; R_1 = D_x + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_x D_x^{-1},\\
tw_x + \frac{1}{2}xw &\;\to\; R_2 = tR_1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}D_x^{-1},\\
w_{xx} &\;\to\; R_1^2,\\
\frac{1}{2}xw_x + tw_{xx} &\;\to\; R_2 \circ R_1,\\
xtw_x + t^2 w_{xx} + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right) &\;\to\; R_2^2.
\end{aligned}$$

Выводы. Для применения изложенной выше методики необходимо линеаризовать дифференциальное уравнение. «Классическая» линеаризация представляет собой дифференциальную замену зависимых и независимых переменных (таковой, например, является линеаризация уравнения минимальных поверхностей с помощью преобразования Лежандра). Понятие линеаризации с помощью накрытия принадлежит А.М. Виноградову, автору алгебро-геометрической теории дифференциальных уравнений, который ввел понятие накрытия дифференциального уравнения (см., например, монографию [1], ее перевод [2] и имеющийся там список литературы). В частности, известная подстановка Коула — Хопфа, сводящая уравнение Бюргерса к уравнению теплопроводности, допускает трактовку в рамках теории накрытий (см., например, [1, 2]). Расширение понятия «линеаризуемого уравнения» позволило по-новому взглянуть на задачи о линеаризации конкретных уравнений и дало надежду получить при решении некоторых подобных задач положительные ответы. Отметим, что в настоящее время несмотря на накопленный теоретический и экспериментальный материал, не существует теории, позволяющей эффективно решать подобные задачи, однако нерешенные проблемы стимулируют дальнейшее развитие алгебро-геометрической теории дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. 2-е изд.* Москва, Факториал-Пресс, 2005, 380 с.

[2] Symmetries and Conservation Laws for Differential Equation of Mathemetical Phisics. *Translations of Mathematical Monographs*. Providence, RI, AMS, 1999, vol. 182, 333 p.

[3] Вербовецкий А.М., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н. *Симметрии дифференциальных уравнений*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002, 36 с.

[4] Виноградов А.М. Интегрируемость и симметрии. *Нелинейные волны. Структуры и бифуркации*. Москва, Наука, 1987, с. 279–290.

[5] Хорькова Н.Г. Нелокальные аспекты алгебро-геометрической теории дифференциальных уравнений. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, спец. вып. № 2 *Математическое моделирование в технике*, с. 205–212.

[6] Хорькова Н.Г. Об операторах рекурсии для дифференциальных уравнений в частных производных. *Геометрия, дифференциальные уравнения и механика*. Москва, Изд-во МГУ, 1986, С. 156–158.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Хорькова Н.Г. О некоторых классах дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих бесконечные серии симметрий и законов сохранения. *Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 4*. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/math/665.html

Хорькова Нина Григорьевна — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: nkhorkova@diffiety.ac.ru, ninakhorkova@yandex.ru