УДК 517.538.5+517.547.54

Об аппроксимативных свойствах некоторых модулей полианалитического типа

© К.Ю. Федоровский

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В работе изучаются задачи аппроксимации функций полианалитическими многочленами вида $p_0(z) + \overline{z}^{k_1} p_1(z) + \ldots + \overline{z}^{k_n} p_n(z)$, где $p_0, \ldots, p_n$ — многочлены комплексного переменного, а $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ — целые числа, в норме пространств L^p на границах плоских односвязных областей. Полученные условия приближаемости формулируются в терминах аналитических свойств областей, на которых рассматривается аппроксимация.

Ключевые слова: *полианалитическая функция, псевдопродолжение неванлинновского типа, L^p-аппроксимация.*

Введение. В 1970–80-х годах активно изучался вопрос о плотности в пространстве $C(X)$, состоящем из всех непрерывных на компакте $X \subset \mathbb{C}$ комплекснозначных функций с равномерной нормой, модулей вида

$$\mathcal{R}(X) + \overline{\mathfrak{z}}^{k_1} \mathcal{R}(X) + \ldots + \overline{\mathfrak{z}}^{k_n} \mathcal{R}(X),$$

где $\mathcal{R}(X)$ — пространство всех рациональных функций комплексного переменного z, полюсы которых лежат вне компакта X; $\overline{\mathfrak{z}}(z) = \overline{z}$, а $n \geqslant 1$ и $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ — целые числа. Эти модули естественно назвать рациональными модулями полианалитического типа. Историю их изучения и достаточно подробную библиографию, посвященную этому вопросу, можно найти в обзорной работе [1].

Начиная со второй половины 1980-х годов большой интерес вызывает также задача плотности в пространстве $C(X)$ полиномиальных модулей вида

$$\mathcal{P} + \overline{\mathfrak{z}}^{k_1} \mathcal{P} + \ldots + \overline{\mathfrak{z}}^{k_n} \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$ — пространство всех многочленов комплексного переменного, и ее наиболее известный частный случай, в котором $k_j = j$ при $j = 1, \ldots, n$ (задача о равномерной приближаемости функций полианалитическими многочленами). История изучения этой задачи, полученные в ней результаты и характер возникающих условий приближаемости подробно описаны в работе [1].

В настоящей статье рассмотрена другая задача похожей природы. Пусть $p \in [1, \infty]$. Всюду в дальнейшем пространство $L^p = L^p(\mathbb{T})$ — стандартное пространство Лебега на единичной окружности

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\},$$

рассматриваемое относительно нормированной меры Лебега ℓ на $\mathbb{T}$. Напомним, что $d\ell(\zeta) = |d\zeta|/(2\pi)$ и заметим, что $d\zeta = 2\pi i\zeta d\ell(\zeta)$. Всюду в дальнейшем, если иное не оговорено специально, выражение «почти всюду» будет пониматься по отношению к мере ℓ.

Как обычно, пространство $H^p(\mathbb{D})$, где $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, — классическое пространство Харди в круге $\mathbb{D}$. Напомним, что пространство $H^p(\mathbb{D})$ при $p < \infty$ состоит из всех голоморфных функций f в круге $\mathbb{D}$ таких, что

$$\lim_{r\to 1}\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p\, d\ell(\zeta) < \infty,$$

а пространство $H^\infty(\mathbb{D})$ — из всех голоморфных и ограниченных в $\mathbb{D}$ функций. При всех $p > q > 1$ справедливы включения

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^q(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D}) \quad \text{и} \quad H^p(\mathbb{D}) \subset N(\mathbb{D}),$$

где символом $N(\mathbb{D})$ обозначен класс Неванлинны в круге $\mathbb{D}$. Опуская формальное определение этого класса, напомним, что всякая функция $f \in N(\mathbb{D})$ имеет вид $f = f_1/f_2$, где $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D})$.

Далее определим класс $H^p = H^p(\mathbb{T})$, состоящий из всех функций $f \in L^p$ таких, что $\hat{f}(k) := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{\zeta}^k\, d\ell(\zeta) = 0$ для всех целых чисел $k < 0$. Если f — функция класса $H^p(\mathbb{D})$ при $p \in [1, \infty]$, то, согласно классической теореме Фату, для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ существуют угловые граничные значения (или, другими словами, некасательные предельные значения) $f(\zeta)$ функции f в точке ζ. Эти значения определяют функцию из класса H^p, называемую граничной функцией для функции f, а отображение, ставящее функции $f \in H^p(\mathbb{D})$ в соответствие ее граничную функцию, является изометрическим изоморфизмом пространств $H^p(\mathbb{D})$ и H^p. При $p = \infty$ это отображение является $*$-слабым гомеоморфизмом. Всюду в дальнейшем функции класса $H^p(\mathbb{D})$ и их граничные функции обозначены одним и тем же символом.

Пусть $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$, а $n \geqslant 1$ — целое число и $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ — набор целых чисел таких, что $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n$. Определим пространство $M^p(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ следующим образом:

$$M^p(\varphi; k_1, \ldots, k_n) := H^p + \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi}^{k_j} H^p.$$

Пространство $M^p(z; k_1, \ldots, k_n)$ состоит из функций вида

$$h_0 + \bar{z}^{k_1} h_1 + \ldots + \bar{z}^{k_n} h_n,$$

т. е. из *полианалитических функций*, а его структура очень похожа на структуру полиномиального модуля $\mathcal{P} + \bar{z}^{k_1}\mathcal{P} + \cdots + \bar{z}^{k_n}\mathcal{P}$. Это позволяет называть пространства $M^p(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ (формально говоря не являющиеся модулями) модулями полианалитического типа.

Нас будет интересовать задача описания тех функций $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$, для которых пространства $M^p(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ плотны в пространстве L^p. Эта задача, как показано выше, естественно связана с задачей аппроксимации функций полианалитическими многочленами вида $p_0(z) + \overline{z}^{k_1} p_1(z) + \ldots + \overline{z}^{k_m} p_m(z)$, где $p_0, \ldots, p_m \in \mathcal{P}$, в L^p-норме на границах плоских односвязных областей, причем соответствующее пространство L^p рассматривается относительно гармонической меры на границе данной области.

Псевдопродолжение функций класса $\boldsymbol{H^\infty}(\mathbb{D})$. Пусть $\mathbb{D}_e = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ — внешность единичного круга, а $H^\infty(\mathbb{D}_e)$ — множество голоморфных и ограниченных в $\mathbb{D}_e$ функций. Как и в случае функций класса $H^\infty(\mathbb{D})$, для любой функции $f \in H^\infty(\mathbb{D}_e)$ и для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ существуют угловые граничные значения $f(\zeta)$ функции f в точке ζ, рассматриваемые относительно области $\mathbb{D}_e$.

Напомним понятие *псевдопродолжения неванлинновского типа* для голоморфных и ограниченных функций (см. определение 2 в [2]).

Определение 1. Скажем, что функция $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, если существуют две функции f_1 и f_2 класса $H^\infty(\mathbb{D}_e)$ такие, что $f_2 \not\equiv 0$ и для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняется равенство угловых граничных значений $f(\zeta) = f_1(\zeta)/f_2(\zeta)$.

Это определение является частным случаем общего понятия псевдопродолжения, введенного в работе [3] (см. также определение 2.1.2 в [4]).

Всюду в дальнейшем для произвольной функции ψ положим $\psi_*(z) = \overline{\psi(\overline{z})}$ для всех тех z, для которых ψ_* определена.

Для работы с псевдопродолжимыми функциями нам потребуется следующее утверждение, описывающее псевдопродолжение неванлинновского типа в терминах функций, определенных в $\mathbb{D}$.

Предложение 1. *Пусть $f \in H^\infty(\mathbb{D})$. Тогда функция f допускает псевдопродолжение неванлинновского типа в том и только том случае, когда найдутся две функции $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ такие, что $v \not\equiv 0$ и для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняется равенство угловых граничных значений $\overline{f(\zeta)} = u(\zeta)/v(\zeta)$.*

Доказательство. Предположим, что функция f допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, и функции f_1 и f_2 взяты из соответствующего определения. При $|z| < 1$ положим $u(z) := (f_1)_*(1/z)$ и $v(z) := (f_2)_*(1/z)$, так что $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$. Если $\zeta \in \mathbb{T}$ такая точка, в которой угловые предельные значения всех рассматриваемых функций существуют (такие точки имеют полную меру на $\mathbb{T}$), то, при некасательном стремлении $z \in \mathbb{D}$ к ζ, имеем

$$\frac{u(z)}{v(z)} = \frac{(f_1)_*(1/z)}{(f_2)_*(1/z)} = \overline{\left(\frac{f_1(z')}{f_2(z')}\right)} \to \overline{f(\zeta)},$$

поскольку $z' = 1/\overline{z} \in \mathbb{D}_e$ стремиться к ζ некасательно.

Обратно, если требуемые функции $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ существуют, то при $|z| > 1$ определим функции f_1 и f_2 так, что $f_1(z) := u_*(1/z)$ и $f_2(z) := v_*(1/z)$. При этом $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{D}_e)$. Пусть, как и ранее, ζ — это такая точка на окружности $\mathbb{T}$, в которой все рассматриваемые функции имеют угловые граничные значения. Если точка $z \in \mathbb{D}_e$ некасательно стремится к ζ, получаем, что

$$\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{u_*(1/z)}{v_*(1/z)} = \overline{\left(\frac{u(z')}{v(z')}\right)} \to f(\zeta),$$

поскольку $z' = 1/\overline{z} \in \mathbb{D}$ стремится к ζ некасательно. Таким образом, функция f допускает псевдопродолжение неванлинновского типа. $\square$

Отметим, что доказательство предложения 1 может быть получено практически дословно из доказательства предложения 2.1 в работе [5], однако оно приведено здесь для удобства читателя и согласования обозначений.

Основная теорема и ее следствия. Справедлив следующий критерий плотности пространств $M^p(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ в пространстве L^p, который формулируется в терминах свойства псевдопродолжения неванлинновского типа подходящих степеней функции φ.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$, а $n \geqslant 1$ и $k_1, \ldots, k_n$ — целые числа, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n$. Пусть также d — наибольший общий делитель чисел $k_1, \ldots, k_n$.*

1. *Пусть $p \in [1, \infty)$. Следующие условия а), б) и в) эквивалентны:*
а) пространство $M^p(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ не плотно в пространстве L^p;
б) пространство $M^p(\varphi; d)$ не плотно в пространстве L^p;
в) функция φ^d допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.

2. *Следующие условия а′) и б′):*
а′) пространство $M^\infty(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ не $*$-слабо плотно в пространстве L^∞;
б′) пространство $M^\infty(\varphi; d)$ не $*$-слабо плотно в пространстве L^∞,
и вышеприведенное условие в) эквивалентны.

Доказательство. Напомним, что пространство линейных функционалов на L^p отождествляется с пространством L^q, где $q = p/(p-1)$ — соответствующий сопряженный индекс, причем элемент $g \in L^q$ задает функционал, который действует по формуле

$$f \mapsto \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, d\ell(\zeta).$$

Докажем первое утверждение. Предположим, что функция φ^d допускает псевдопродолжение неванлинновского типа. Пусть $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ такие функции, что $\overline{\varphi}^d(\zeta) = u(\zeta)/v(\zeta)$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ (см. предложение 1). На основании теоремы IX.4.5 [6] получаем, что для любых функций $h_0, h_1, \ldots, h_n \in H^p$ выполняются равенства

$$\int_{\mathbb{T}} \big(h_0(\zeta) + \overline{\varphi(\zeta)}^d h_1(\zeta)\big) v(\zeta)\, d\ell(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \big(h_0(\zeta)v(\zeta) + h_1(\zeta)u(\zeta)\big)\, d\ell(\zeta) = 0$$

и, при $m_j = k_j/d$, $j = 1, \ldots, n$, а $k_0 = m_0 = 0$

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\Bigl(\sum_{j=0}^{n} h_j(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)}^{k_j}\Bigr) v(\zeta)^{m_n}\, d\ell(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{T}}\Bigl(\sum_{j=0}^{n} h_j(\zeta) u(\zeta)^{m_j} v(\zeta)^{m_n-m_j}\Bigr) d\ell(\zeta) = 0.$$

Если мы определим на $\mathbb{T}$ функции $g_0(\zeta) = \overline{2\pi i\zeta v(\zeta)}$ и $g(\zeta) = \overline{2\pi i\zeta v(\zeta)^{m_n}}$, то $g_0, g \in L^\infty$ и $g_0, g \not\equiv 0$ (так как $v \not\equiv 0$). Поскольку функция φ^d допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, то существуют линейные функционалы на пространстве L^p, аннулирующие пространства $M^p(\varphi; d)$ и $M^p(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ соответственно. Таким образом, оба эти пространства не плотны в L^p.

Обратно, пусть пространство $M^p(\varphi; d)$ не плотно в L^p. Тогда найдется функционал на пространстве L^p, аннулирующий $M^p(\varphi; d)$. Другими словами, найдется функция $g \in L^q$, $q = p/(p-1)$ такая, что $g \not\equiv 0$ и

$$\int_{\mathbb{T}} \bigl(h_0(\zeta) + \overline{\varphi(\zeta)}^d h_1(\zeta)\bigr)\overline{g(\zeta)}\, d\ell(\zeta) = 0 \tag{1}$$

для всех функций $h_0, h_1 \in H^p$. Рассмотрим функцию $\psi = \overline{g} \in L^q$. Полагая в равенстве (1) $h_0 \equiv \zeta^m$ при целых $m > 0$ и $h_1 \equiv 0$, находим, что при целых $k < 0$

$$\widehat{\psi}(k) = \int_{\mathbb{T}} \psi(\zeta)\overline{\zeta}^k\, d\ell(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \psi(\zeta)\zeta^{-k}\, d\ell(\zeta) = 0.$$

Из последнего равенства вытекает, что $\psi \in H^q$. Далее, полагая в формуле (1) $h_0 \equiv 0$ и $h_1 \equiv \zeta^m$ при целых $m > 0$ и рассуждая аналогично, получаем, что функция $\psi_1 = \overline{\varphi}^d\psi \in H^q$, так как $\widehat{\psi_1}(k) = 0$ при всех целых $k < 0$.

Отметим, что $\psi, \psi_1 \not\equiv 0$ и для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняется равенство $\overline{\varphi(\zeta)}^d = \psi_1(\zeta)/\psi(\zeta)$. Поскольку функции ψ и ψ_1 принадлежат пространству H^q, они являются граничными функциями для соответствующих функций класса $H^q(\mathbb{D})$. Так как класс $H^q(\mathbb{D}) \subset N(\mathbb{D})$ (класс Неванлинны в $\mathbb{D}$) и всякую функцию класса Неванлинны можно представить в виде отношения двух голоморфных ограниченных функций, то найдутся такие функции $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$, что для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняется равенство

$$\overline{\varphi(\zeta)}^d = \frac{u(\zeta)}{v(\zeta)}.$$

В силу предложения 1 это эквивалентно возможности псевдопродолжения неванлинновского типа функции φ^d.

Если пространство $M^p(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ не плотно в L^p, рассуждая аналогично, получаем, что функции φ^{k_j} при $j = 1, \ldots, n$ допускают псевдопродолжение неванлинновского типа. Пусть функции $f_{1,j}$ и $f_{2,j}$ класса $H^\infty(\mathbb{D}_e)$ таковы, что для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняются равенства $\varphi(\zeta)^{k_j} = f_{1,j}(\zeta)/f_{2,j}(\zeta)$, понимаемые в смысле угловых граничных значений функций φ, $f_{1,j}$ и $f_{2,j}$ из $\mathbb{D}$ и $\mathbb{D}_e$ соответственно. Так как d — это наибольший общий делитель чисел $k_1, \ldots, k_n$, то найдутся такие целые числа $s_1, \ldots, s_n$, что

$$d = s_1 k_1 + \ldots + s_n k_n.$$

Из этого выражения непосредственно вытекает, что для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ справедливо равенство угловых граничных значений

$$\varphi(\zeta)^d = \frac{\prod_{j=1}^n f_{1,j}(\zeta)^{s_j}}{\prod_{j=1}^n f_{2,j}(\zeta)^{s_j}},$$

т. е. что функция φ^d допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. При этом будем следовать идеям, использованным при доказательстве Теоремы 1 в [7]. Предположим, что функция φ^d допускает псевдопродолжение неванлинновского типа и найдем функции $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ такие, что $v \not\equiv 0$ и $\overline{\varphi}^d(\zeta) = u(\zeta)/v(\zeta)$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ (это возможно на основании предложения 1). Определим меры ν_0 и ν на $\mathbb{T}$ следующим образом:

$$d\nu_0(\zeta) = 2\pi i \zeta v(\zeta)\, d\ell(\zeta) = v(\zeta)\, d\zeta$$

и соответственно

$$d\nu(\zeta) = 2\pi i \zeta v(\zeta)^{m_n}\, d\ell(\zeta) = v(\zeta)^{m_n}\, d\zeta,$$

где, как и в доказательстве первого утверждения, $m_j = k_j/d$ при $j = 1, \ldots, n$. При этом $\nu_0 \not\equiv 0$ и $\nu \not\equiv 0$ (так как $v \not\equiv 0$). Отметим, что для любого целого $j = 1, \ldots, n$ и любой функции $h \in H^\infty$ справедливы равенства

$$\int_{\mathbb{T}} h(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)}^d\, d\nu_0(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} h(\zeta)u(\zeta)v(\zeta)\, d\zeta = 0$$

и соответственно

$$\int_{\mathbb{T}} h(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)}^{k_j}\, d\nu(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} h(\zeta)u(\zeta)^{m_j}v(\zeta)^{m_n-m_j}\, d\zeta = 0,$$

из которых непосредственно вытекает, что мера ν_0 ортогональна пространству $M^\infty(\varphi; d)$, а мера ν — пространству $M^\infty(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$. Таким образом, пространства $M^\infty(\varphi; d)$ и $M^\infty(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ не являются $*$-слабо плотными в пространстве L^∞.

Теперь пусть пространство $M^\infty(\varphi; d)$ не является $*$-слабо плотным в пространстве L^∞. Тогда существует ненулевая комплекснозначная борелевская мера μ на $\mathbb{T}$, ортогональная к $M^\infty(\varphi; d)$, т. е. для любых функций $h_0, h_1 \in H^\infty$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{T}} \big(h_0(\zeta) + h_1(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)}^d\big)\, d\mu(\zeta) = 0. \tag{2}$$

Полагая в равенстве (2) $h_0(\zeta) = \zeta^k$ при целых $k \geqslant 0$ и $h_1 \equiv 0$, а также $h_0 \equiv 0$ и $h_1(\zeta) = \zeta^k$ при целых $k \geqslant 0$ получаем, что меры μ и $\overline{\varphi}^d\mu$ ортогональны пространству $\mathcal{P}$. Из этого в силу классической теоремы братьев Рисс вытекает, что найдутся функции $g_1 \in H^1(\mathbb{D})$ и $g_2 \in H^1(\mathbb{D})$ такие, что $d\mu(\zeta) = g_1(\zeta)\,d\zeta$ и $\overline{\varphi(\zeta)}^d\mu(\zeta) = g_2(\zeta)\,d\zeta$, причем $g_1 \not\equiv 0$ и $g_2 \not\equiv 0$, так как $\mu \not\equiv 0$. Из двух последних равенств вытекает, что для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ справедливо равенство $\overline{\varphi(\zeta)}^d g_1(\zeta) = g_2(\zeta)$, понимаемое в смысле угловых граничных значений. Таким образом $\overline{\varphi(\zeta)}^d = g_2(\zeta)/g_1(\zeta)$. Заменив отношение g_2/g_1 функций класса $H^1(\mathbb{D})$ на отношение u/v двух функций класса $H^\infty(\mathbb{D})$ и применив предложение 1, получим, что функция φ^d допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.

Пусть пространство $M^\infty(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ не $*$-слабо плотно в $L^\infty(\mathbb{T})$. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении пространства $M^\infty(\varphi; d)$, можно установить, что существует ненулевая мера μ на $\mathbb{T}$, ортогональная к пространству $\mathcal{P}$ и такая, что меры $\overline{\varphi}^{k_j}\mu$ при $j = 1, \ldots, n$ тоже ортогональны к пространству $\mathcal{P}$. Из этого факта вытекает, что функции φ^{k_j} при $j = 1, \ldots, n$ допускают псевдопродолжение неванлинновского типа. Наконец, из существования целых чисел $s_1, \ldots, s_n$ таких, что $d = s_1k_1 + \ldots + s_nk_n$ и из возможности псевдопродолжения функций φ^{k_j} при $j = 1, \ldots, n$ вытекает, что и функция φ^d допускает псевдопродолжение неванлинновского типа (см. доказательство первого утверждения). □

Рассмотрим одно следствие теоремы 1, которое представляется весьма интересным и полезным. Для этого при целых $d \geqslant 1$ нам потребуется понятие *d-неванлинновской* области, которое обобщает определение 2.1, приведенное в работе [5].

Определение 2. Пусть $d \geqslant 1$ — целое число. Ограниченная односвязная область Ω в $\mathbb{C}$ называется *d-неванлинновской*, если существуют такие голоморфные и ограниченные в Ω функции U и V, что $V \not\equiv 0$ и равенство

$$\overline{w}^d = \frac{U(w)}{V(w)} \tag{3}$$

выполняется почти всюду на $\partial\Omega$ в смысле конформного отображения. Последнее означает, что если φ — это некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область Ω, то для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ справедливо равенство угловых граничных значений $\overline{\varphi(\zeta)}^d = U(\varphi(\zeta))/V(\varphi(\zeta))$.

Это определение корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора конформного отображения φ. Отметим, что в силу граничной теоремы единственности Лузина — Привалова *отношение* U/V определено в области Ω (для d-неванлинновской области Ω) единственным образом. В случае, когда Ω — жорданова область со спрямляемой границей, равенство (3) можно рассматривать как равенство угловых граничных значений почти всюду относительно длины на $\partial\Omega$. При $d = 1$ возникает понятие обычной неванлинновской области, введенное в работах [7] (определение 3) и [5] (определение 2.1), которое оказалось исключительно полезным при изучении задач равномерной аппроксимации функций полианалитическими многочленами. Изучению свойств неванлинновских областей посвящены работы [2] и [8], в которых, в частности, можно найти ряд интересных нетривиальных примеров неванлинновских областей. Отметим также, что всякая неванлинновская область будет и d-неванлинновской для любого целого числа $d > 1$.

Приведем несколько простых примеров d-неванлинновских областей в классе жордановых областей с аналитическими границами. Так, круг $\mathbb{D}$ является неванлинновской областью, а область $G_{a,b}$, ограниченная эллипсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ при $a > b > 0$, — нет. Более того, область $G_{a,b}$ не будет d-неванлинновской ни при каком целом $d \geqslant 1$. В то же время область $G'_{a,b}$, ограниченная образом этого эллипса при инверсии с центром в начале координат, будет неванлинновской областью.

Для любого целого числа $d > 1$ нетрудно привести пример области, которая является d-неванлинновской, но не неванлинновской. Для этого достаточно рассмотреть образ единичного круга $\mathbb{D}$ при отображении $\Phi_d(z) = \sqrt[d]{a - z}$, где $|a| > 1$, конформном в $\mathbb{D}$. В самом деле, всюду на границе области $\Phi_d(\mathbb{D})$ выполняется равенство

$$\overline{w} = \sqrt[d]{\frac{|a|^2 - \overline{a}w^d - 1}{a - w^d}},$$

а функция, стоящая в правой части последнего равенства имеет точки ветвления в области $\Phi_d(\mathbb{D})$. Остается заметить, что $\overline{w}^d$ совпадает на границе области $\Phi_d(\mathbb{D})$ с отношением двух многочленов.

Отметим также, что в соответствии с предложением 1 ограниченная односвязная область Ω является d-неванлинновской областью если и только если функция φ^d, где φ — это конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на Ω, допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.

Теперь пусть μ — некоторая конечная комплекснозначная борелевская мера в $\mathbb{C}$, а $L^q(\mu)$ при $q \in [1, \infty]$ — пространство Лебега суммируемых функций, рассматриваемое относительно меры μ. При целых числах $k_1, \ldots, k_n$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n$, пусть $P^q(\mu; k_1, \ldots, k_n)$ — замыкание в $L^q(\mu)$ полиномиального модуля $\mathcal{P} + \overline{\mathfrak{z}}^{k_1}\mathcal{P} + \ldots + \overline{\mathfrak{z}}^{k_n}\mathcal{P}$, а $P^\infty(\mu; k_1, \ldots, k_n)$ — $*$-слабое замыкание этого же модуля в $L^\infty(\mu)$. Кроме того, пусть Ω — жорданова область в $\mathbb{C}$, а φ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на Ω. Из классической теоремы Каратеодори о продолжении вытекает, что φ продолжается до гомеоморфизма замкнутого круга $\overline{\mathbb{D}}$ на $\overline{\Omega}$. Справедливо следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть Ω и φ такие, как указано выше, $q \in [1, \infty]$, $n \geqslant 1$ — целое число, а $\omega = \omega(\varphi(0), \cdot, \Omega)$ — гармоническая мера на $\partial\Omega$, рассматриваемая относительно точки $\varphi(0) \in \Omega$. Тогда $P^q(\omega; k_1, \ldots, k_n) = L^q(\omega)$, где $k_1, \ldots, k_n$ — такие целые числа, что $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n$, если и только если Ω не является d-неванлинновской областью, где d — наибольший общий делитель чисел $k_1, \ldots, k_n$.*

Структура пространства $M^2(\varphi; k_1, \ldots, k_n)^{\perp}$. Всюду в этом разделе будем считать, что целые числа $n \geqslant 1$ и $k_1, \ldots, k_n$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n$, фиксированы, а d — наибольший общий делитель чисел $k_1, \ldots, k_n$.

Утверждение теоремы 1 интересно рассмотреть подробнее в случае, когда $p = 2$. При этом L^2 — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, d\ell(\zeta)$, а структура ортогонального дополнения к $M^2(\varphi; k_1, \ldots, k_n)$ допускает достаточно простое явное описание.

Используем следующие стандартные обозначения: A^* — оператор, сопряженный к оператору A, $\ker A$ — ядро оператора A, $H^{\perp}$ — ортогональное дополнение к подмножеству $H \subset L^2$.

Для функции $\varphi \in L^{\infty}$ рассмотрим оператор умножения $M_{\varphi} \colon g \mapsto \varphi g$, действующий в пространстве L^2. Нам также понадобится оператор проектирования Рисса $P \colon L^2 \to H^2$, действующий следующим образом: если $g = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k$, то $Pg = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k$. Определим также оператор Тёплица $T_{\varphi} \colon H^2 \to H^2$, действующий следующим образом $T_{\varphi} \colon g \mapsto P(\varphi g)$ при $g \in H^2$. Другими словами, $T_{\varphi} = PM_{\varphi}$.

Напомним также, что H^2_0 — подпространство, состоящее из таких функций h класса H^2, голоморфное продолжение которых в $\mathbb{D}$ обладает свойством $h(0) = 0$. Пусть также $\overline{H^2_0} = \{\overline{h} \colon h \in H^2_0\}$. Хорошо известно, что пространство L^2 разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств:

$$L^2 = H^2 \oplus \overline{H^2_0}.$$

Это разложение позволяет представлять операторы, действующие в пространстве L^2 в виде операторных 2×2-матриц. Такое представление мы будем называть матричным представлением рассматриваемых операторов.

Теперь пусть φ — фиксированная функция класса $H^{\infty}(\mathbb{D})$. В этом случае матричное представление операторов M_{φ} и $M^*_{\varphi} = M_{\overline{\varphi}}$ соответственно имеет вид

$$M_{\varphi} = \begin{pmatrix} T_{\varphi} & X_{\varphi} \\ 0 & Y_{\varphi} \end{pmatrix}, \qquad M^*_{\varphi} = \begin{pmatrix} T^*_{\varphi} & 0 \\ X^*_{\varphi} & Y^*_{\varphi} \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем для упрощения обозначений при целых $k \geqslant 1$ положим $T_k\colon = T_\varphi^k$, $S_k\colon = (Y_\varphi^*)^k$ и введем операторы

$$E_{k,\varphi} := [T_k^*, T_k] = T_k^* T_k - T_k T_k^*, \quad E'_{k,\varphi} := [S_k^*, S_k] = S_k^* S_k - S_k S_k^*,$$

где $[A^*, A] = A^*A - AA^*$ — коммутатор операторов A^* и A.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Тогда справедливы утверждения.

1. *Пусть* $k \geqslant 1$ *— целое число. Тогда* $\ker E_{k,\varphi} = \{h \in H^2\colon \overline{\varphi}^k h \in H^2\}$, *а* $\ker E'_{k,\varphi} = \{b \in \overline{H}_0^2\colon \varphi^k b \in \overline{H}_0^2\}$. *При этом следующие условия эквивалентны:*

а) $\ker E_{k,\varphi} \neq \varnothing$;

б) $\ker E'_{k,\varphi} \neq \varnothing$;

в) функция φ^k *допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.*

2. *Для любых целых* $n \geqslant 1$ *и* $k_1, \ldots, k_n$ *таких, что* $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n$

$$M^2(\varphi; k_1, \ldots, k_n)^\perp = \bigcap_{j=1}^n \ker E'_{k_j,\varphi}.$$

Другими словами,

$$M^2(\varphi; k_1, \ldots, k_n)^\perp = \{b \in \overline{H}_0^2\colon \varphi^{k_j} b \in \overline{H}_0^2 \text{ при } j = 1, \ldots, n\}.$$

Доказательство. Первое утверждение этой теоремы можно найти в работе [9], однако мы приведем соответствующее полное рассуждение, так как оно необходимо для понимания доказательства второго утверждения теоремы.

Из матричных представлений операторов M_φ и M_φ^* вытекает, что

$$M_\varphi^k = \begin{pmatrix} T_k & X_k \\ 0 & S_k^* \end{pmatrix}, \qquad M_\varphi^{k*} = \begin{pmatrix} T_k^* & 0 \\ X_k^* & S_k \end{pmatrix},$$

где оператор X_k, действующий из пространства $\overline{H}_0^2$ в пространство H^2 определятся индуктивно: $X_1 = X_\varphi$ и $X_{k+1} = T_k X_\varphi + X_k Y_\varphi$ при $k \geqslant 1$.

Пусть $B_k = [M_\varphi^{k*}, M_\varphi^k]$. Так как $B_k g = \overline{\varphi}^k \varphi^k g - \varphi^k \overline{\varphi}^k g = 0$ для любой функции $g \in L^2$, то оператор B_k равен нулю, а матричное представление для оператора B_k имеет вид:

$$B_k = \begin{pmatrix} E_{k,\varphi} - X_k X_k^* & T_k^* X_k - X_k S_k \\ X_k^* T_k - S_k^* X_k^* & X_k^* X_k - E'_{k,\varphi} \end{pmatrix},$$

справедливы операторные равенства $E_{k,\,\varphi} = X_k X_k^*$ и $E'_{k,\,\varphi} = X_k^* X_k$. Из этих равенств вытекает, что $\ker E_{k,\,\varphi} = \ker X_k^*$ и $\ker E'_{k,\,\varphi} = \ker X_k$.

Чтобы вычислить ядро оператора $E_{k,\,\varphi}$ запишем произвольный элемент $g \in L^2$ в виде «двумерного» вектора $g = (h, b)$, где $h = Pg \in H^2$ и $b = g - Pg \in \overline{H}_0^2$. При этом $M_\varphi^{k*} g = (T_k^* h, X_k^* h + S_k b)$. Итак, пространство $\ker E_{k,\,\varphi} = \ker X_k^*$ состоит их всех элементов $h \in H^2$ таких, что $X_k^* h = 0$. Другими словами, пространство $\ker E_{k,\varphi}$ состоит их всех

$h \in H^2$ таких, что $M_\varphi^{k*}((h,0)) = (T_k^* h, 0)$ или, что эквивалентно, из всех тех $h \in H^2$, для которых $M_\varphi^{k*} h \in H^2$. Остается заметить, что

$$\{h \in H^2 \colon M_\varphi^{k*} h \in H^2\} = \{h \in H^2 \colon \overline{\varphi}^k h \in H^2\}.$$

Ядро оператора $E'_{k,\varphi}$ вычисляется аналогично. Поскольку $M_\varphi^k(h,b) = (T_k h + x_k b, S_k^* b)$, имеем

$$\begin{aligned}\ker E'_{k,\varphi} = \ker X_k = \{b \in \overline{H}{}_0^2 \colon X_k b = 0\} = \\ = \{b \in \overline{H}{}_0^2 \colon M_\varphi^k((0,b)) = (0, S_k^*, b)\} = \\ = \{b \in \overline{H}{}_0^2 \colon M_\varphi^k b \in \overline{H}{}_0^2\} = \{b \in \overline{H}{}_0^2 \colon \varphi^k b \in \overline{H}{}_0^2\}.\end{aligned}$$

Перейдем к доказательству эквивалентности утверждений а), б) и в). Докажем, что утверждения а) и в) эквивалентны, т. е. пространство $\ker E_{k,\,\varphi} \neq \varnothing$, если и только если функция φ^k допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.

Пусть $\ker E_{k,\,\varphi} \neq \varnothing$. Это означает, что существует функция $h \in H^2$ такая, что $h \not\equiv 0$ и $h_1 = \overline{\varphi}^k h \in H^2$, следовательно, $\overline{\varphi}^k = h_1/h$. Так как $H^2(\mathbb{D}) \subset N(\mathbb{D})$, то найдутся две функции $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ такие, что для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняется равенство угловых граничных значений $\overline{\varphi\zeta}^k = h_1(\zeta)/h(\zeta) = u(\zeta)/v(\zeta)$. Из этого с учетом предложения 1 вытекает, что функция φ^k допускает псевдопродолжение неванлинновского типа.

Обратно, если функция φ_k допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, то, согласно предложению 1, существуют две функции $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ такие, что $v \not\equiv 0$ и $\overline{\varphi(\zeta)}^k = u(\zeta)/v(\zeta)$ для почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$ (равенство, как и ранее, понимается в смысле угловых граничных значений). Это означает, что $v \in H^2$ и $\overline{\varphi}^k v = u \in H^2$, т. е. $v \in \ker E_{k,\varphi}$. Так как $v \not\equiv 0$, то $\ker E_{k,\varphi} \neq \varnothing$.

Теперь покажем, что эквивалентны утверждения а) и б). Отметим, что оператор $S_\varphi = Y_\varphi^*$ удовлетворяет соотношению

$$S_\varphi = J T_{\varphi_*} J, \tag{4}$$

где оператор J в L^2 определяется следующим образом: $(Jg)(z) = g(\overline{z})$ при $g \in L^2$. При этом $J^* = J$ и $J^2 = I$ (тождественный оператор). Напомним, что функция ψ_* определяется соотношением $\psi_*(z) = \overline{\psi(\overline{z})}$ (для всех тех значений z, для которых она определена). Из равенства (4) вытекает, что

$$S_k = S_\varphi^k = J T_{\varphi_*} J,$$

а из последнего равенства непосредственно следует, что

$$E'_{k,\,\varphi} = [S_k^*, S_k] = J\big(T_{\varphi_*}^{k*} T_{\varphi_*}^k - T_{\varphi_*}^k T_{\varphi_*}^{k*}\big) J = J E_{k,\,\varphi_*} J. \tag{5}$$

Так как функции φ^k и φ_*^k допускают или не допускают псевдопродолжение неванлинновского типа одновременно, то ядра операторов $E_{k,\varphi}$

и E_{k,φ_*} тривиальны или нетривиальны одновременно. В силу формулы (5) ядра операторов $E_{k,\,\varphi_*}$ и $E'_{k,\,\varphi}$ также тривиальны или нетривиально одновременно. Таким образом, первое утверждение теоремы 2 доказано.

Теперь докажем второе утверждение теоремы. Пусть

$$Q^2(\varphi; k_1,\, \ldots,\, k_n) := \bigl\{b \in \overline{H}{}^2_0\colon \varphi^{k_j} b \in \overline{H}{}^2_0,\ j = 1,\, \ldots,\, n\bigr\}.$$

Как показано при доказательстве первого утверждения теоремы,

$$Q^2(\varphi; k_1,\, \ldots,\, k_n) = \bigcap_{j=1}^{n} \ker E'_{k_j,\varphi}.$$

Проверим, что любой элемент $g \in Q^2(\varphi; k_1,\, \ldots,\, k_n)$ будет ортогонален к пространству $M^2(\varphi; k_1,\, \ldots,\, k_n)$. Для этого положим $k_0 = 0$ и заметим, что для любых функций $h_0, h_1,\, \ldots,\, h_n \in H^2$ верно равенство

$$\Bigl\langle g, \sum_{j=0}^{n} \overline{\varphi}^{k_j} h_j \Bigr\rangle = \sum_{j=0}^{n} \bigl\langle g\varphi^{k_j}, h_j\bigr\rangle,$$

а так как $\bigl\langle g\varphi^{k_j}, h_j\bigr\rangle = 0$ при $g \in Q^2(\varphi; k_1,\, \ldots,\, k_n)$, то $g \perp M^2(\varphi; k_1,\, \ldots,\, k_n)$. Обратно, пусть функция $g \in L^2$ ортогональна пространству $M^2(\varphi; k_1,\, \ldots,\, k_n)$. Тогда для любого $j \in \{0, 1,\, \ldots,\, n\}$ справедливо равенство (как и выше считаем, что $k_0 = 0$)

$$0 = \bigl\langle g, \overline{\varphi}^{k_j} h\bigr\rangle = \bigl\langle g\varphi^{k_j}, h\bigr\rangle,$$

верное для любой функции $h \in H^2$. В силу этих равенств функции $g, \varphi^{k_1} g,\, \ldots,\, \varphi^{k_n} g$ принадлежат пространству $\overline{H}{}^2_0$, а это в точности означает, что $g \in Q^2(\varphi; k_1,\, \ldots,\, k_n)$. $\square$

Завершающие замечания. Приведем один простой пример, иллюстрирующий полученные результаты. Пусть $a \in \mathbb{C}$, причем $|a| > 1$. Напомним, что функция $\varPhi_2(z) = \sqrt{a - z}$, рассмотренная выше, обладает тем свойством, что функция $\varPhi_2^2$ допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, а сама функция $\varPhi_2$ — нет. Согласно теореме 1, пространство $M^2(\varPhi_2; 2, 3)$ плотно в пространстве L^2, а пространство $M^2(\varPhi_2; 4, 6)$ — нет. В самом деле, при $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$ получаем, что $d = 1$, а функция $\varPhi_2$ не допускает псевдопродолжения неванлинновского типа. Если $k_1 = 4$, а $k_2 = 6$, то $d = 2$ и функция $\varPhi_2^2(z) = a - z$ допускает требуемое псевдопродолжение. Отметим также, что пространство $M^2(\varPhi_2; 2)$ также не плотно в пространстве L^2.

Более того, применяя теорему 2 получаем

$$Q^2(\varPhi_2; 2) = \Bigl\{b \in \overline{H}{}^2_0\colon b = \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s \overline{z}^s,\ \beta_1 = 0\Bigr\},$$

$$Q^2(\varPhi_2; 4, 6) = Q^2(\varPhi_2; 6) = \Bigl\{b \in \overline{H}{}^2_0\colon b = \sum_{s=1}^{\infty} \beta_s \overline{z}^s,\ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0\Bigr\}.$$

Таким образом, L^2-замыкания пространств $M^2(\Phi_2; 2)$ и $M^2(\Phi_2; 4, 6)$ не равны. Этот факт вытекает из следующего общего свойства рассматриваемых объектов.

Предложение 2. *Пусть* $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$*, и, кроме того,* $n \geqslant 1$ *и* $k_1, \ldots, k_n$ *— целые числа, причем* $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_n$*, а* d *— наибольший общий делитель чисел* $k_1, \ldots, k_n$*. Предположим также, что функция* φ^d *допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, а функция* v*, взятая из соответствующего определения, имеет нули в* $\mathbb{D}$*.*

Если $p \in [1, \infty)$*, а* $q = p/(p-1)$*, то найдется такая функция* $g \in L^q$*, что соответствующий функционал на пространстве* L^p *аннулирует все пространства* $M^p(\varphi; md)$ *при целых* $m \geqslant 1$ *таких, что* $md < k_n$*, но не пространство* $M^p(\varphi; k_n)$*. Если* $p = \infty$*, то найдется мера на* $\mathbb{T}$*, ортогональная всем пространствам* $M^\infty(\varphi; md)$ *при целых* $m \geqslant 1$ *таких, что* $md < k_n$*, но не пространству* $M^\infty(\varphi; k_n)$*.*

Доказательство. Так как функция φ^d допускает псевдопродолжение неванлинновского типа, то, согласно предложению 1, найдутся функции $u, v \in H^\infty(\mathbb{D})$ такие, что $v \not\equiv 0$ и для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ справедливо равенство угловых граничных значений $\overline{\varphi(\zeta)}^d = u(\zeta)/v(\zeta)$. Ясно, что функции u и v можно выбрать так, что они не будут иметь общих нулей в $\mathbb{D}$. По условию функция v имеет нули в круге $\mathbb{D}$. Пусть z_0 — один из нулей функции v в $\mathbb{D}$, а B — произведение Бляшке, построенное по всем нулям функции v в $\mathbb{D}$ (с учетом их кратностей). Не приводя определения функции B (его можно найти, например, в разд. 2 гл. II книги [10]), покажем, что $B \in H^\infty(\mathbb{D})$ — такая функция, что нули B — это в точности нули функции v (с учетом их кратности) и для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ справедливо равенство $|B(\zeta)| = 1$.

Пусть числа $m_j = k_j/d$ при $j = 1, \ldots, n$. Определим функцию g на $\mathbb{T}$ следующим образом:

$$g(\zeta) = \overline{\left(\frac{2\pi i \zeta v(\zeta)^{m_n - 1} B(\zeta)}{\zeta - z_0}\right)}.$$

При этом $g \in H^\infty$, следовательно, $g \in H^q$ и для любого целого числа m, $0 \leqslant m < m_n$, и функции $h \in H^p$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbb{T}} h(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)}^{md}\,\overline{g(\zeta)}\,d\ell(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \frac{h(\zeta)u(\zeta)^m v(\zeta)^{m_n - m - 1} B(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta = 0,$$

вытекающее из интегральной теоремы Коши (так как $m < m_n$, то точка z_0 является устранимой особой точкой для подинтегральной функции в последнем интеграле). Однако

$$\int_{\mathbb{T}} h(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)}^{k_n}\,\overline{g(\zeta)}\,d\ell(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \frac{h(\zeta)u(\zeta)^{m_n} B(\zeta)}{v(\zeta)(\zeta - z_0)}\,d\zeta \neq 0$$

для любой функции $h \in H^p$ с условием $h(z_0) \neq 0$, так как функция v/B не имеет нулей в $\mathbb{D}$, а $u(z_0) \neq 0$.

При $p = \infty$ требуемую ортогональную меру можно задать в виде

$$d\nu(\zeta) = \frac{v(\zeta)^{m_n - 1} B(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta,$$

причем проверку требуемых свойств этой меры можно провести аналогично предыдущему случаю. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00434-а и 13-01-00923-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мазалов М.Я., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. Условия C^m-приближаемости функций решениями эллиптических уравнений. *Успехи матем. наук*, 2012, т. 67, вып. 6, с. 53–100.

[2] Федоровский К.Ю. О некоторых свойствах и примерах неванлинновских областей. *Тр. МИАН им. В.А. Стеклова*, 2006, т. 253, с. 204–213.

[3] Shapiro H.S. Generalized analytic continuation. *Symposia on Theor. Phys. and Math*, 1968, vol. 8, pp. 151–163.

[4] Douglas R.G., Shapiro H. S., Shields A. L. Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator. *Annales de l'institut Fourier*, 1970, vol. 20, no. 1, pp. 37–76.

[5] Кармона Х.Х., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю. О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций. *Матем. сб.*, 2002, т. 193, № 10, с. 75–98.

[6] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. Москва – Ленинград, Гостехиздат, 1952, 540 с.

[7] Федоровский К.Ю. О равномерных приближениях функций n-аналитическими многочленами на спрямляемых контурах в $\mathbb{C}$. *Матем. заметки*, 1996, т. 59, вып. 4, с. 604–610.

[8] Баранов А.Д., Федоровский К.Ю. Регулярность границ неванлинновских областей и однолистные функции в модельных подпространствах. *Матем. сб.*, 2011, т. 202, № 12, с. 3–22.

[9] Fedorovskiy K.Yu. Nevanlinna domains in problems of polyanalytic polynomial approximation. *Trends in Mathematics. Analysis and Mathematical Physics*. Basel, Switzerland, Birkhäuser Verlag, 2009, pp. 129–140.

[10] Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции*. Москва, Мир, 1984, 469 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Федоровский К.Ю. Об аппроксимативных свойствах некоторых модулей полианалитического типа. *Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 4*. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/math/664.html

Федоровский Константин Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: afky@yandex.ru