УДК 517.3

Формулы векторного анализа в бесконечномерных пространствах

© О.В. Пугачёв

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В работе получены классические формулы теории поля для случая поверхностей, «гладких» в обобщенном смысле: формула Остроградского — Гаусса, первая формула Грина. При этом используются соболевские классы функций и связанные с ними емкости. Эти результаты являются новыми как в бесконечномерных, так и в конечномерных пространствах.

Ключевые слова: *бесконечномерное пространство, емкость, поверхностная мера.*

В работах Е.И. Ефимовой и А.В. Угланова [1, 2] некоторые классические формулы, связывающие поверхностные интегралы с объемными, обобщены на бесконечномерный случай с помощью конструкции поверхностной меры, предложенной А.В. Скороходом [3] и Углановым. В настоящей работе подобные результаты получены с помощью конструкции поверхностной меры, описанной в [4], обобщающей подход П. Маллявэна [5] для негауссовского случая, при минимальных требованиях гладкости функции, задающей поверхность.

Пусть X — банахово или локально выпуклое пространство; в него непрерывно вложено сепарабельное гильбертово пространство H. Скалярное произведение в пространстве H обозначим символом $\langle\,\cdot\,;\,\cdot\,\rangle$. Обозначим через $\mathcal{H}_1$ класс операторов Гильберта — Шмидта из H в H; норма Гильберта — Шмидта определяется формулой

$$\|T\|^2_{\mathcal{H}_1} = \sum_{m=1}^{\infty} \|Te_m\|^2,$$

где $\{e_m\}$ — ортонормированный базис в пространстве H. По индукции определяются классы операторов Гильберта — Шмидта $\mathcal{H}_n$ из H в $\mathcal{H}_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots,$ при этом нормы

$$\|T\|^2_{\mathcal{H}_n(H,E)} = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \|T(e_{m_1}, \ldots, e_{m_n})\|^2_E$$

и не зависят от выбора базиса в пространстве H. При $n = 0$ естественно считать $\mathcal{H}_0 = H$.

Будем называть функцию $f\colon X \to E$ гладкой цилиндрической ($f \in \mathcal{FC}_b^\infty$), если она имеет вид $f(x) = u\big(l_1(x), \ldots, l_m(x)\big)$, где $m \in \mathbb{N}$, $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$, $l_k \in X^*$.

Определение 1. *Мера* μ *дифференцируема вдоль векторного поля* v*, если существует такая функция* δv *(дивергенция* v*), что для всякой* $\varphi \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$ *справедливо равенство*

$$\int \partial_v \varphi(x)\mu(dx) = -\int \varphi(x)\delta v(x)\mu(dx).$$

Определение 2. *Функция* $f \in L^p(\mu)$ *принадлежит соболевскому классу* $W^{r,p}(\mu)$*, если существует последовательность функций* $f_n \in \mathcal{FC}_b^\infty$*, сходящаяся к* f *в* $L^p(\mu)$ *и удовлетворяющая критерию Коши по норме*

$$\|f\|_{r,p} = \|f\|_{L^p(\mu)} + \sum_{k=1}^{r} \big\| \|D_H^k f\|_{\mathcal{H}_k} \big\|_{L^p(\mu)}.$$

Напомним определение емкости, порожденной некоторым соболевским классом $\mathcal{F}$.

Определение 3. *Для любого открытого множества* $U \subset X$ *положим*

$$C_{\mathcal{F}}(U) = \inf\big\{\|f\|_0\colon f \in \mathcal{F}, f \geqslant 0 \text{ на множестве } X$$

$$\text{и } f \geqslant 1 \text{ на множестве } U\ \mu\text{-почти всюду}\big\}$$

Для произвольного множества $A \subset X$ *положим*

$$C_{\mathcal{F}}(A) = \inf\{C_{\mathcal{F}}(U)\colon A \subset U,\ U\ -\ \text{открытое}\}.$$

Пусть $C_{\mathcal{F}}$ — некоторая емкость. Будем говорить, что функция f $C_{\mathcal{F}}$-квазинепрерывна, если существуют замкнутые множества Q_n такие, что $f|_{Q_n}$ непрерывна при каждом значении n, и $C_{\mathcal{F}}(X \backslash Q_n) < 1/n$. Известно, что для всякой функции $f \in W^{r,p}(\mu)$ существует $C_{W^{r,p}}$-квазинепрерывная μ-версия [6]. Этот факт является аналогом теоремы Лузина о С-свойстве при обобщении с мер на емкости.

Определение 4. *Емкость* $C_{\mathcal{F}}$ *называется плотной, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется компакт* $K_\varepsilon \subset X$ *такой, что* $C_{\mathcal{F}}(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Следующая теорема доказана в работе [4].

Теорема 1. *Пусть* X *— банахово пространство или пространство Фреше с вероятностной мерой* μ*; пусть* H *— сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно вложенное в* X*. Предположим, что соболевский класс* $W^{1,p}(\mu)$ *корректно определен. Тогда емкость* $C_{W^{1,p}}$ *плотна.*

Далее пусть μ — вероятностная мера на пространстве Фреше X; H — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно вложенное в X. Предположим, что соболевские классы $W^{r,p}(\mu)$ корректно определены при достаточно больших p и $r = 1, 2$.

Пусть U — μ-измеримое подмножество X, обладающее следующим свойством: существует $C_{W^{1,4}}$-квазинепрерывная функция $F \in W^{2,12}(\mu)$, такая, что $|D_H F|^{-1} \in L^{12}(\mu)$, μ дифференцируема вдоль векторного поля $D_H F$, $\delta(D_H F) \in L^2(\mu)$, и $U = F^{-1}\big((-\infty; 0)\big)$.

Назовем множество $\Sigma = F^{-1}(0)$ поверхностью множества U. На множестве Σ мы имеем условную меру $\mu_\sigma^{(0)}$; образ меры μ при отображении F на числовую ось имеет непрерывную плотность $k(t)$ [4]; образ меры $\varphi \cdot \mu$ при том же отображении обозначим через $k_\varphi(t)$. Введем меру

$$\mu_\sigma^0(dx) = k(0)|D_H F(x)| \cdot \mu_\sigma^{(0)}(dx),$$

где для $|D_H F|^2 \in W^{1,6}(\mu)$ выбрана $C_{W^{1,6}}$-квазинепрерывная версия. Эта мера имеет конечную вариацию. Нормалью к поверхности Σ будем называть вектор $n(x) = |D_H F(x)|^{-1} D_H F(x)$, $x \in \Sigma$.

Теорема 2. *Пусть $u \in W^{1,12}(\mu, H)$ — векторное поле, для которого существует дивергенция δu. Тогда функция $\langle n(x); u(x)\rangle$ имеет $C_{W^{1,6}}$-квазинепрерывную версию, и эта версия интегрируема по мере μ_σ^0, причем справедлива формула Остроградского — Гаусса:*

$$\int\limits_U \delta u(x)\mu(dx) = \int\limits_\Sigma \langle n(x); u(x)\rangle\, \mu_\sigma^0(dx). \tag{1}$$

В частности, правая часть формулы (1) *не зависит от конкретного выбора такой версии.*

Доказательство. Отметим, что интеграл в правой части

$$\int \frac{\langle D_H F(x); u(x)\rangle}{|D_H F(x)|}\mu_\sigma^0(dx) = \int \partial_u F(x) k(0)\mu_\sigma^{(0)}(dx),$$

где для $\partial_u F \in W^{1,6}(\mu)$ выбрана $C_{W^{1,6}}$-квазинепрерывная версия, и этот интеграл конечен.

Пусть ω_1 — положительная четная C^∞-функция с носителем $[-1; 1]$, $\int \omega_1(t)dt = 1$; $\omega_N(t) = N\omega_1(Nt)$. Введем функции

$$\chi_N(x) = \int\limits_{F(x)}^{+\infty} \omega_N(t)dt.$$

Очевидно, что $\chi_N \in W^{2,12}(\mu)$, $\chi_N = 1$ на $F^{-1}\big((-\infty; -1/N]\big)$, $\chi_N = 0$ на $F^{-1}\big([1/N; +\infty)\big)$. Пусть функции $\chi_{N,k} \in \mathcal{FC}_b^\infty(X)$, $k = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены и приближают χ_N по норме $\|\cdot\|_{2,12}$. Перейдя к подпоследовательности, можем также считать, что $\chi_{N,k} \to \chi_N$ μ-почти всюду. По определению дивергенции,

$$\int \chi_{N,k}(x)\delta u(x)\mu(dx) = -\int \partial_u \chi_{N,k}(x)\mu(dx).$$

В обеих частях этого равенства можно перейти к пределу при $k \to \infty$:

$$\int \chi_N(x)\delta u(x)\mu(dx) = -\int \partial_u \chi_N(x)\mu(dx).$$

Ввиду того, что $\mu(\Sigma) = 0$ и $\forall x \notin \Sigma$ функция $\chi_N(x) \to I_U(x)$ при $N \to \infty$, левая часть стремится, согласно теореме Лебега, к $\int_U \delta u(x)\mu(dx)$ при $N \to \infty$. Правая часть

$$\int \partial_u F(x)\omega_N\big(F(x)\big)\mu(dx) = \int\limits_{-1/N}^{1/N} k_{\partial_u F}(t)\omega_N(t)dt \to$$

$$\to k_{\partial_u F}(0) = \int \partial_u F(x)k(0)\mu_\sigma^{(0)}(dx) \quad \text{при} \quad N \to \infty. \qquad \square$$

Следствие 1 (формула интегрирования по частям для подмножества). *В векторном поле* $u(x) = \varphi(x)h$, $\varphi \in W^{1,12}(\mu)$, $h \in H \cap H(\mu)$. *Тогда* δu *существует и формула* (1) *принимает вид*

$$\int\limits_U \big(\partial_h\varphi(x) + \varphi(x)\delta h(x)\big)\mu(dx) = \int\limits_\Sigma \varphi(x)\,\langle n(x); h\rangle\,\mu_\sigma^0(dx),$$

где подынтегральное выражение в правой части $C_{W^{1,6}}$*-квазинепрерывно.*

Следствие 2. *Пусть пространство* H *вложено посредством оператора Гильберта — Шмидта в пространство*

$$H(\mu) = \{h \in X\colon \delta h \in L^2(\mu)\}$$

и $f \in W^{2,12}(\mu)$. *Тогда выполнена первая формула Грина:*

$$\int\limits_U \Delta f(x)\mu(dx) + \int\limits_U \sum_{j=1}^{\infty} \partial_{e_j} f(x)\delta e_j(x)\mu(dx) = \int\limits_\Sigma \partial_{n(x)} f(x)\mu_\sigma^0(dx),$$

если $\Delta f = \sum_j \partial_{e_j}^2 f \in L^1(\mu)$, *а для функции* $\partial_n f$ *выбрана* $C_{W^{1,6}}$*-квазинепрерывная версия.*

Доказательство. Положим $u = D_H f$. Чтобы применить теорему 2, нам остается проверить существование дивергенции векторного поля u. Рассмотрим векторные поля $u_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_{e_j} f \cdot e_j$. Их дивергенции

$$\delta u_n = \sum_{j=1}^{n} \partial_{e_j}^2 f + \sum_{j=1}^{n} \partial_{e_j} f \cdot \delta e_j$$

сходятся в $L^1(\mu)$, и в равенстве

$$\int \partial_{u_n}\varphi(x)\mu(dx) = -\int \varphi(x)\delta u_n(x)\mu(dx), \quad \varphi \in \mathcal{F}C_b^\infty(X),$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\delta u = \sum_{j=1}^{\infty} \partial_{e_j}^2 f + \sum_{j=1}^{\infty} \partial_{e_j} f \cdot \delta e_j;$$

в частности, эта сумма не зависит от выбора базиса в H. □

Следствие 3. Пусть μ — радоновская вероятностная мера на пространстве Фреше X. Предположим, что $j_H(X^*) \subset H(\mu)$. Пусть F и G — две $C_{W^{1,4}}$-квазинепрерывные функции, удовлетворяющие всем условиям, перечисленным в начале раздела, отвечают одним и тем же U и Σ с точностью до множеств нулевой $C_{W^{1,4}}$-емкости. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис H такой, что $e_j \in j_H(X^*)$. Тогда для всех векторных полей вида $u = \varphi e_j$, $\varphi \in \mathcal{FC}_b^{\infty}(X)$, по формуле (1) получаем

$$\int\limits_{F^{-1}(0)} \langle n_F(x); u(x)\rangle \, \mu_\sigma^{0(F)}(dx) = \int\limits_{G^{-1}(0)} \langle n_G(x); u(x)\rangle \, \mu_\sigma^{0(G)}(dx),$$

значит, при всех $j = 1, 2, \ldots$ совпадают меры

$$\langle n_F(x), e_j\rangle \, \mu_\sigma^{0(F)}(dx) = \langle n_G(x), e_j\rangle \, \mu_\sigma^{0(G)}(dx)$$

(на множестве $F^{-1}(0) \triangle G^{-1}(0)$ они обращаются в нуль). Обозначим эти меры через ξ_j. Рассмотрим меру $\lambda = \mu_\sigma^{0(F)} + \mu_\sigma^{0(G)}$. Меры ξ_j абсолютно непрерывны относительно λ и имеют плотности f_j. Определим меру μ_σ^0 формулой

$$\mu_\sigma^0(dx) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j^2(x)\right)^{1/2} \lambda(dx).$$

Ясно, что $\mu_\sigma^0(dx) = |n_F(x)| \mu_\sigma^{0(F)}(dx) = |n_G(x)| \mu_\sigma^{0(G)}(dx)$, и поскольку $|n_F| = 1$ $\mu_\sigma^{0(F)}$-почти всюду, а $|n_G| = 1$ $\mu_\sigma^{0(G)}$-почти всюду, отсюда вытекает совпадение мер $\mu_\sigma^{0(F)}$ и $\mu_\sigma^{0(G)}$ с мерой μ_σ^0. Именно на основании этих соображений был введен нормировочный множитель $|D_H F|$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ефимова Е.И., Угланов А.В. Формулы векторного анализа на банаховом пространстве. *Докл. АН СССР*, 1983, т. 271, № 6, с. 1302–1306.

[2] Угланов А.В. Формула Ньютона — Лейбница на банаховых пространствах и приближение функций бесконечномерного аргумента. *Известия АН СССР. Сер. Математика*, 1987, т. 51, № 1, с. 152–170.

[3] Скороход А.В. *Интегрирование в гильбертовом пространстве*. Москва, Наука, 1975, 230 с.

[4] Пугачёв О.В. Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах. *Теория вероятн. и примен.*, 2008, т. 53, № 1, с. 178–189.

[5] Airault H., Malliavin P. Intégration géométrique sur l'espace de Wiener. *Bull. Sci. Math.*, 2e serie, 1988, vol. 112, pp. 3–52.

[6] Богачев В.И. *Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна*. Москва — Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008, т. 1, 2, 544 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Пугачёв О.В. Формулы векторного анализа в бесконечномерных пространствах. *Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 4*. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/math/663.html

Пугачёв Олег Всеволодович — д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана. e-mail: opugachev@yandex.ru