УДК 517.9+536+532

Точные решения и нелинейная неустойчивость реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием

© А.Д. Полянин[1, 2]

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия
[2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье рассмотрен широкий класс нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием. Получены многопараметрические точные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие произвольное число произвольных постоянных. Приведено решение, описывающие нелинейное взаимодействие стоячей волны с бегущей волной. Определена область неустойчивости решений системы с запаздыванием.

Ключевые слова: *точные решения, реакционно-диффузионные системы, нелинейные уравнения с запаздыванием, глобальная неустойчивость, обобщенное разделение переменных.*

Введение. Дифференциальные уравнения и системы уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом возникают в различных приложениях, таких как биология, биохимия, химия, биофизика, физическая химия, медицина, экология, теория климатических моделей, теория управления, экономика и многих других (см., например, работы [1–11] и ссылки в них). Отметим, что подобные уравнения встречаются в математической теории искусственных нейронных сетей, результаты которой используются для обработки сигналов и изображений и проблем распознавания образов [12–21].

В настоящей статье основное внимание уделено классу нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием следующего вида (о других нелинейных системах с запаздыванием см. разд. 5, 6):

$$u_t = k_1 u_{xx} + bu + F(u - a\bar{u}, w, \bar{w}), \tag{1}$$

$$w_t = k_2 w_{xx} + G(u - a\bar{u}, w, \bar{w}), \tag{2}$$

где $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$, $\bar{u} = u(x, t-\tau)$, $\bar{w} = w(x, t-\tau)$; $F(\dots)$, $G(\dots)$ — произвольные функции трех аргументов; τ — время запаздывания ($\tau > 0$).

В общем случае система (1)–(2) (при $\tau \neq 0$) допускает простые точные решения типа бегущей волны $u = u(z)$, $w = w(z)$, где $z = \alpha x + \beta t$ (такие решения для различных реакционно-диффузионных уравнений и систем с запаздыванием рассмотрены, например, в работах [2–7].

Список известных точных решений другого вида даже для одного нелинейного реакционно-диффузионного уравнения

$$w_t = kw_{xx} + G(w, \bar{w}), \tag{3}$$

(частный случай уравнения (2), в котором кинетическая функция G не зависит от первого аргумента) весьма невелик. Полный групповой анализ нелинейного дифференциально-разностного уравнения (3) выполнен в работе [11]; были найдены четыре уравнения вида (3), допускающие инвариантные решения, два из них малоинтересны, поскольку имеют вырожденные решения (линейные по x).

Вопросам устойчивости (обычно в линейном приближении) решений типа бегущей волны, стационарных и некоторых других решений различных реакционно-диффузионных уравнений и систем с запаздыванием посвящены многочисленные работы, например, [2, 7–10, 12–21].

Далее термин точные решения нелинейных дифференциально-разностных уравнений с частными производными (в том числе и систем вида (1)–(2)) применяется в следующих случаях:

1) решение можно выразить через элементарные функции или представить в замкнутой форме (выражается через неопределенные или определенные интегралы);

2) решение можно выразить через решения обыкновенных дифференциальных или обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (либо систем таких уравнений);

3) решение можно выразить через решения линейных уравнений в частных производных.

Допустимы также комбинации решений из пп. 1)–3).

Этот термин обобщает определение точных решений, используемое для нелинейных уравнений в частных производных [22, 23].

Замечание 1. Точные решения уравнения теплопроводности с нелинейным источником без запаздывания (при $\tau = 0$), которое является частным случаем уравнения (3) при $G(w, \bar{w}) = G(w)$, приведены, например, в работах [22, 24–26]. Наиболее полный обзор точных решений этого уравнения дан в [23]; там же описано много точных решений с обобщенным и функциональным разделением переменных нелинейных систем реакционно-диффузионных уравнений без запаздывания.

Замечание 2. Методы решения и различные приложения линейных и нелинейных обыкновенных дифференциально-разностных уравнений, которые существенно проще нелинейных дифференциально-разностных уравнений в частных производных, описаны в [27–30].

Замечание 3. Численным решениям нелинейных реакционно-диффузионных систем с запаздыванием и возникающим при этом трудностям посвящена работа [31].

1. Описание метода определения области неустойчивости. Изложим общую идею используемого ниже метода. Пусть вектор-функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ описывается некоторой нелинейной системой уравнений в частных производных (которая может быть как с запаздыванием, так и без запаздывания) и $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ — частное решение этой системы. Пусть удалось найти точное решение этой системы в виде суммы

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \varepsilon),$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ — некоторая достаточно гладкая по всем аргументам функция, ограниченная всюду при конечных t и зависящая от параметра ε, который не входит в рассматриваемую систему уравнений. Если функция $\mathbf{v}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} &|\mathbf{v}(\mathbf{x}, s, \varepsilon)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad (0 \leqslant s \leqslant \tau), \\ &|\mathbf{v}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)| \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \end{aligned} \tag{4}$$

решение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ является неустойчивым.

Действительно, в силу первого условия (4) и непрерывности функции $\mathbf{v}$ по параметру ε, для любого достаточно малого δ можно выбрать такое значение ε, что сначала (при $0 \leqslant s \leqslant \tau$) выполняется неравенство

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0| \leqslant \delta,$$

а при $t \to \infty$ величина $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|$ становится неограниченной. Другими словами, два решения системы $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}$, сколь угодно мало различающиеся сначала, неограниченно «разбегаются» при больших временах.

2. Область нелинейной неустойчивости системы (1)–(2). Применим описанный выше метод для анализа нелинейной неустойчивости реакционно-диффузионной системы уравнений с запаздыванием (1)–(2).

Теорема 1. *Пусть*

$$u_0 = u_0(x, t), \qquad w_0 = w_0(x, t) \tag{5}$$

— произвольное частное решение рассматриваемой системы. Тогда система (1)–(2) *при* $a > 0$ *имеет также решение*

$$u = u_0(x, t) + e^{ct} v(x, t), \qquad w = w_0(x, t), \qquad c = \frac{1}{\tau} \ln a, \qquad a > 0, \tag{6}$$

где $v = v(x, t)$ *— любое* τ*-периодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником*

$$v_t = k_1 v_{xx} + (b - c)v, \qquad v(x, t) = v(x, t - \tau). \tag{7}$$

Доказательство теоремы проводится подстановкой решения (6) в систему (1)–(2) с учетом того, что (5) является решением данной системы, а функция v удовлетворяет решению (7).

Воспользуемся теоремой 1 для получения условий неустойчивости реакционно-диффузионной системы (1)–(2). Для этого рассмотрим стационарное пространственно-периодическое решение задачи (7)

$$v = \varepsilon \sin(\sigma x + \mu), \qquad \sigma = \sqrt{\frac{b-c}{k_1}}, \qquad b \geqslant c, \tag{8}$$

где ε и μ — произвольные постоянные.

Из анализа формул (6) и (8) следует, что при выполнении условий

$$a > 1, \qquad b\tau - \ln a \geqslant 0 \tag{9}$$

(второе условие эквивалентно неравенству $b \geqslant c$) любое решение системы (1)–(2) будет неустойчивым.

Условия (9) удобно представить в более наглядном виде:

$$a > 1, \qquad b > 0, \qquad \tau \geqslant \tau_0, \qquad \tau_0 = \frac{\ln a}{b}. \tag{10}$$

Физический смысл условий (10) состоит в том, что в области параметров $a > 1$, $b > 0$ неустойчивость возникает за счет запаздывания, которое должно быть достаточно большим: $\tau \geqslant \tau_0$. Поскольку вид кинетических функций F и G не влияет на условия неустойчивости (10) реакционно-диффузионной системы (1)–(2), будем называть эти условия *глобальными условиями неустойчивости*.

Замечание 4. Хотя мы получили глобальные условия неустойчивости (10) решений нелинейной системы (1)–(2) во всей области изменения пространственной переменной $-\infty < x < +\infty$, они остаются справедливыми также для ограниченных решений соответствующих нелинейных нестационарных краевых задач с граничными условиями первого, второго и третьего рода в полуплоскости $0 \leqslant x < \infty$ (или $-\infty < x \leqslant 0$). Для доказательства этого в частном решении (8) параметр μ выбирается так, чтобы удовлетворить соответствующему однородному граничному условию. В частности, для граничных условий первого и второго рода в решении (8) надо положить $\mu = 0$ и $\mu = \pi/2$ соответственно.

Замечание 5. Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о нелинейной неустойчивости, причем все полученные выше результаты являются точными (а не линеаризованными, как в теории линейной устойчивости; не использованы также различные допущения, разложения и аппроксимации, характерные для большинства нелинейных теорий).

3. Точные решения нелинейной системы (1)–(2) при $a > 0$. Для построения точных решений системы (1)–(2) при $a > 0$ используем формулу (6) и уравнение (7), которые фигурируют в формулировке теоремы 1.

В общем случае для произвольных кинетических функций $F(\zeta, w, \bar{w})$ и $G(\zeta, w, \bar{w})$ в качестве частного решения (5) системы (1)–(2) можно взять решение одного из следующих трех видов:

$$u_0 = \varphi(t), \; w_0 = \psi(t) \text{ (пространственно-однородное решение);} \tag{11а}$$

$$u_0 = \varphi(x), \; w_0 = \psi(x) \text{ (стационарное решение);} \tag{11б}$$

$$u_0 = \varphi(z), \; w_0 = \psi(z), \quad z = \alpha x + \beta t \text{ (бегущая волна),} \tag{11в}$$

где α и β — произвольные постоянные (последнее решение включает в себя первые два как частные случаи). Решения (11а)–(11в) описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Например, для решения типа бегущей волны (11в) имеем систему

$$\begin{gathered}\beta\varphi'(z) = k_1\alpha^2\varphi''(z) + b\varphi(z) + F\big(\varphi(z) - a\varphi(z - z_0), \psi(z), \psi(z - z_0)\big),\\ \beta\psi'(z) = k_2\alpha^2\psi''(z) + G\big(\varphi(z) - a\varphi(z - z_0), \psi(z), \psi(z - z_0)\big), z_0 = \beta\tau.\end{gathered} \tag{12}$$

Общее τ-периодическое решение уравнения (7) можно представить в виде

$$v = \theta_1(x, t; b - c), \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}\theta_1(x, t; b) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n x}\big[A_n\cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n\sin(\beta_n t - \gamma_n x)\big] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x}\big[C_n\cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n\sin(\beta_n t + \gamma_n x)\big],\end{gathered} \tag{14}$$

$$\beta_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \;\; \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} - b}{2k_1}\right)^{1/2}, \;\; \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2 + \beta_n^2} + b}{2k_1}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Здесь A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, для которых ряды в формулах (13)–(15) и производные $(\theta_1)_t$ и $(\theta_1)_{xx}$ сходятся (сходимость, например, заведомо можно обеспечить, если положить $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ при $n > N$, где N — произвольное натуральное число).

Выделим следующие частные случаи:

1) τ-периодические по времени t решения уравнения (7), затухающие при $x \to \infty$, описываются формулами (13)–(15) при $A_0 = B_0 = 0$, $C_n = D_n = 0$, $n = 1,\, 2,\, \ldots;$

2) τ-периодические по времени t решения уравнения (7), ограниченные при $x \to \infty$, описываются формулами (13)–(15) при $C_n = D_n = 0$, $n = 1,\, 2,\, \ldots;$

3) стационарное решение описывается формулами (13)–(15) при $\beta_0 = \lambda_0 = 0$, $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$, $n = 1,\, 2,\, \ldots$

Формулы (6), (11), (13)–(15) и обыкновенные дифференциально-разностные уравнения (12) описывают многопараметрические точные решения широкого класса нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием вида (1)–(2) при $a > 0$, которые представляют собой суперпозицию бегущих волн и решений с обобщенным разделением переменных. В качестве конкретного примера приведем любопытное точное решение системы (1)–(2), являющееся следствием формулы (6) и стационарного решения уравнения (7), когда частное решение (5) выбирается в виде бегущей волны (11в):

$$\begin{gathered} u = \varphi(z) + e^{ct}[A\sin(\sigma x) + B\cos(\sigma x)], \qquad w = \psi(z), \\ z = \alpha x + \beta t, \quad c = \frac{\ln a}{\tau}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{b-c}{k_1}}\,, \end{gathered} \tag{16}$$

где A, B, α, β — произвольные постоянные, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются нелинейной системой обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (12). При $a = 1$, что соответствует $c = 0$, решение (16) можно трактовать как нелинейную суперпозицию бегущей волны с периодической стоячей волной.

4. Точные решения нелинейной системы (1)–(2) при $a < 0$.

Теорема 2. *Пусть* (5) — *произвольное частное решение реакционно-диффузионной системы с запаздыванием* (1)–(2) *при* $a < 0$. *Тогда эта система имеет также решение*

$$u = u_0(x,t) + e^{ct}v(x,t), \quad w = w_0(x,t), \quad c = \frac{1}{\tau}\ln|a|, \quad a < 0, \tag{17}$$

где $v = v(x,t)$ — *любое* τ-*апериодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником*

$$v_t = k_1 v_{xx} + (b-c)v, \qquad v(x,t) = -v(x,t-\tau). \tag{18}$$

Доказательство теоремы проводится подстановкой решения (17) в систему (1)–(2) с учетом того, что (5) является решением данной системы, а функция v удовлетворяет (18).

Для построения точных решений системы (1)–(2) при $a < 0$ используем формулу (17) и уравнение (18).

В общем случае для произвольных кинетических функций $F(\zeta, w, \bar{w})$ и $G(\zeta, w, \bar{w})$ в качестве частного решения (5) системы (1)–(2), как и ранее, можно взять пространственно-однородное решение (11а), стационарное решение (11б), или решение типа бегущей волны (11в). В частности, решение типа бегущей волны (11в) описывается системой обыкновенных дифференциально-разностных уравнений (12).

Общее τ-апериодическое решение уравнения (18) можно представить в виде

$$v = \theta_2(x, t; b - c), \tag{19}$$

где

$$\theta_2(x, t; b) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n x}\big[A_n \cos(\beta_n t - \gamma_n x) + B_n \sin(\beta_n t - \gamma_n x)\big] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x}\big[C_n \cos(\beta_n t + \gamma_n x) + D_n \sin(\beta_n t + \gamma_n x)\big], \tag{20}$$

$$\beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{\tau},\ \lambda_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2}-b}{2k}\right)^{1/2},\ \gamma_n = \left(\frac{\sqrt{b^2+\beta_n^2}+b}{2k}\right)^{1/2}, \tag{21}$$

A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, для которых ряды в (19)–(21) и производные $(\theta_2)_t$ и $(\theta_2)_{xx}$ сходятся. Затухающие при $x \to \infty$ решения задачи (18) (τ-апериодические по времени t) определяются формулами (19)–(21) при $C_n = D_n = 0$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$

Формулы (17), (11), (19)–(21) и обыкновенные дифференциально-разностные уравнения (12) описывают многопараметрические точные решения широкого класса нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием вида (1)–(2) при $a < 0$, которые представляют собой суперпозицию бегущих волн и решений с обобщенным разделением переменных.

5. Многокомпонентные нелинейные системы с запаздыванием. Рассмотрим многокомпонентную нелинейную систему реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + bu + F(x, t, u - a\bar{u}, w_1, \bar{w}_1,\ \ldots,\ w_m, \bar{w}_m), \\ (w_n)_t &= k_n(w_n)_{xx} + G_n(x, t, u - a\bar{u}, w_1, \bar{w}_1,\ \ldots,\ w_m, \bar{w}_m), \\ n &= 1, 2,\ \ldots,\ m, \end{aligned} \tag{22}$$

где $u = u(x,t)$, $\bar{u} = u(x, t-\tau)$, $w_n = w_n(x,t)$, $\bar{w}_n = w_n(x, t-\tau_n)$; $F(\ldots)$, $G_n(\ldots)$ — произвольные функции своих аргументов; τ, τ_n — времена запаздывания.

Система (22) обобщает систему (1)–(2) сразу по трем направлениям:

1) число уравнений системы может быть произвольным;

2) кинетические функции F, G_n дополнительно могут явно зависеть от независимых переменных x и t;

3) времена запаздывания могут быть разными ($\tau \neq \tau_n$, $\tau_i \neq \tau_j$).

Ниже приведены основные результаты для системы (22).

Теорема 3. *Пусть*

$$u_0 = u_0(x,t), \qquad w_{n0} = w_{n0}(x,t), \qquad n = 1, 2, \ldots, m, \tag{23}$$

— произвольное решение рассматриваемой системы. Тогда система (22) *при* $a > 0$ *имеет также решение*

$$u = u_0(x,t) + e^{ct} v(x,t), \quad w_{n0} = w_{n0}(x,t), \quad c = \frac{1}{\tau} \ln a, \quad a > 0, \tag{24}$$

где $v = v(x,t)$ *— любое* τ*-периодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником* (7).

Следствие теоремы 3 с использованием частного решения (8): при выполнении условий (10) любое решение системы (22) будет неустойчивым (глобальные условия неустойчивости).

Теорема 4. *Пусть* (23) *— произвольное решение реакционно-диффузионной системы с запаздыванием* (22)*. Тогда при* $a < 0$ *эта система имеет также решение*

$$u = u_0(x,t) + e^{ct} v(x,t), \quad w_{n0} = w_{n0}(x,t), \quad c = \frac{1}{\tau} \ln |a|, \quad a < 0, \tag{25}$$

где $v = v(x,t)$ *— любое* τ*-апериодическое решение линейного уравнения теплопроводности с источником* (18).

Для построения точных решений системы (22) используются формулы (24) (при $a > 0$) и (25) (при $a < 0$), где функция v определяется по формулам (13)–(15) (при $a > 0$) и (19)–(21) (при $a < 0$). Если кинетические функции F, G_n не зависят явно от x и t, в качестве частного решения (23) системы (22) можно взять решение одного из следующих трех видов:

$$u_0 = \varphi(t), \ w_{n0} = \psi_n(t) \text{ (пространственно-однородное решение);} \tag{26а}$$

$$u_0 = \varphi(x), \ w_{n0} = \psi_n(x) \text{ (стационарное решение);} \tag{26б}$$

$$u_0 = \varphi(z), \ w_{n0} = \psi_n(z), \ z = \alpha x + \beta t \text{ (бегущая волна).} \tag{26в}$$

Если кинетические функции F, G_n зависят явно от t (но не зависят явно от x), в качестве частного решения (23) системы (22) можно взять решение вида (26а); если кинетические функции F, G_n зависят явно от x (но не зависят явно от t), то в качестве частного решения (23) системы (22) можно взять решение вида (26б).

6. Другие реакционно-диффузионные системы уравнений. Рассмотрим некоторые другие нелинейные реакционно-диффузионные системы уравнений с запаздыванием, допускающие точные решения. Для краткости будем приводить только системы уравнений и указывать вид точных решений (возникающие при этом системы обыкновенных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, как правило, будут опускаться).

Система 1. Рассмотрим нелинейную систему уравнений с запаздыванием

$$
\begin{aligned}
u_t &= k_1 u_{xx} + uF\Big(\frac{\bar{u}}{u}, \frac{\bar{w}}{w}\Big),\\
w_t &= k_2 w_{xx} + wG\Big(\frac{\bar{u}}{u}, \frac{\bar{w}}{w}\Big),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

в которую входят две произвольные функции двух аргументов.

1.1. Система (27) допускает четыре точных решения с разделяющимися переменными:

$$
\begin{aligned}
&u=[A_1\cos(\alpha x)+A_2\sin(\alpha x)]\varphi(t), && w=[B_1\cos(\beta x)+B_2\sin(\beta x)]\psi(t);\\
&u=[A_1e^{-\alpha x}+A_2e^{\alpha x}]\varphi(t), && w=[B_1e^{-\beta x}+B_2e^{\beta x}]\psi(t);\\
&u=[A_1\cos(\alpha x)+A_2\sin(\alpha x)]\varphi(t), && w=[B_1e^{-\beta x}+B_2e^{\beta x}]\psi(t);\\
&u=[A_1e^{-\alpha x}+A_2e^{\alpha x}]\varphi(t), && w=[B_1\cos(\beta x)+B_2\sin(\beta x)]\psi(t),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где A_1, A_2, B_1, B_2, α, β — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются соответствующей системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений. Для иллюстрации приведем только систему, соответствующую первому решению (28):

$$
\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -k_1\alpha^2\varphi(t) + \varphi(t)F\left(\frac{\varphi(t-\tau)}{\varphi(t)}, \frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}\right),\\
\psi'(t) &= -k_2\beta^2\psi(t) + \psi(t)G\left(\frac{\varphi(t-\tau)}{\varphi(t)}, \frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}\right).
\end{aligned}
$$

Замечание 6. Решения вида (28) допускает более общая система (27), у которой функции F и G дополнительно явно зависят также от третьего аргумента t.

Замечание 7. Решения вида (28) допускает более общая система (27) с двумя различными запаздываниями, которые могут зависеть от времени: $u = u(x,t)$, $\bar{u} = u(x, t-\tau_1)$, $w = w(x,t)$, $\bar{w} = w(x, t-\tau_2)$, $\tau_1 = \tau_1(t)$, $\tau_2 = \tau_2(t)$.

1.2. Нелинейная система с запаздыванием (27) допускает также решение в виде произведения бегущих волн

$$
u = \exp(\alpha_1 x + \beta_1 t)\varphi(z),\ \ w = \exp(\alpha_2 x + \beta_2 t)\psi(z),\ \ z = \lambda x + \gamma t, \tag{29}
$$

где α_1, α_2, β_1, β_2, γ, λ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются соответствующей системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

1.3. Система (27) допускает решения

$$
\begin{aligned}
&u = e^{\lambda_1 t}\Big\{\theta_1(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_{1n}(x)\cos(\alpha_n t) + \psi_{1n}(x)\sin(\alpha_n t)]\Big\},\\
&w = e^{\lambda_2 t}\Big\{\theta_2(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_{2n}(x)\cos(\alpha_n t) + \psi_{2n}(x)\sin(\alpha_n t)]\Big\},\\
&\alpha_n = \frac{2\pi n}{\tau},
\end{aligned}
\tag{30}
$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные постоянные; N — любое натуральное число (при сходимости соответствующих рядов допускается также $N = \infty$), а функции $\theta_1(x)$, $\varphi_{1n}(x)$, $\psi_{1n}(x)$, $\theta_2(x)$, $\varphi_{2n}(x)$, $\psi_{2n}(x)$ описываются соответствующими системами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1.4. Система (27) допускает решения

$$
\begin{aligned}
&u = e^{\lambda_1 t}\sum_{n=1}^{N}[\varphi_{1n}(x)\cos(\beta_n t) + \psi_{1n}(x)\sin(\beta_n t)],\\
&w = e^{\lambda_2 t}\sum_{n=1}^{N}[\varphi_{2n}(x)\cos(\beta_n t) + \psi_{2n}(x)\sin(\beta_n t)],\\
&\beta_n = \pi(2n+1)/\tau,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные постоянные, а функции $\varphi_{1n}(x)$, $\psi_{1n}(x)$, $\varphi_{2n}(x)$, $\psi_{2n}(x)$ описываются соответствующими системами линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1.5. Система (27) допускает также два решения, представляющих собой комбинацию решений вида (30) и (31). Первое из этих решений имеет вид

$$
\begin{aligned}
&u = e^{\lambda_1 t}\Big\{\theta(x) + \sum_{n=1}^{N}[\varphi_{1n}(x)\cos(\alpha_n t) + \psi_{1n}(x)\sin(\alpha_n t)]\Big\},\ \alpha_n = \frac{2\pi n}{\tau},\\
&w = e^{\lambda_2 t}\sum_{n=1}^{N}[\varphi_{2n}(x)\cos(\beta_n t) + \psi_{2n}(x)\sin(\beta_n t)],\ \beta_n = \frac{\pi(2n+1)}{\tau}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Второе решение определяется формулами (32), в которых в левых частях надо поменять местами u и w (оставив правые части на месте).

Система 2. Можно рассмотреть более общую, чем (27), систему уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= k_1 u_{xx} + uF\Big(\frac{w}{u}, \frac{\bar{u}}{u}, \frac{\bar{w}}{w}\Big), \\ w_t &= k_2 w_{xx} + wG\Big(\frac{w}{u}, \frac{\bar{u}}{u}, \frac{\bar{w}}{w}\Big), \end{aligned} \tag{33}$$

в которую входят две произвольные функции трех аргументов.

2.1. Система (33) допускает два точных решения с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} &u=[A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)]\varphi(t), \quad && w=[A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)]\psi(t); \\ &u=[Ae^{-\beta x}+Be^{\beta x}]\varphi(t), && w=[Ae^{-\beta x}+Be^{\beta x}]\psi(t), \end{aligned} \tag{34}$$

где A, B, β — произвольные постоянные, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются соответствующей системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений. Отметим, что в системе (33) кинетические функции F и G могут дополнительно явно зависеть также от четвертого аргумента t.

Замечание 8. Решения вида (34) допускает более общая система (33) с двумя различными запаздываниями, которые могут зависеть от времени: $u = u(x,t)$, $\bar{u} = u(x, t - \tau_1)$, $w = w(x,t)$, $\bar{w} = w(x, t - \tau_2)$, $\tau_1 = \tau_1(t)$, $\tau_2 = \tau_2(t)$.

2.2. Система (33) допускает также решение в виде произведения бегущих волн

$$u = \exp(\alpha x + \beta t)\varphi(z), \quad w = \exp(\alpha x + \beta t)\psi(z), \quad z = \lambda x + \gamma t, \tag{35}$$

где α, β, γ, λ — произвольные постоянные, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ описываются соответствующей системой нелинейных дифференциально-разностных уравнений.

Система 3. Другим возможным обобщением системы (27) является система уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= k_1 u_{xx} + a_1 u \ln u + uF\Big(\frac{\bar{u}}{u}, \frac{\bar{w}}{w}\Big), \\ w_t &= k_2 w_{xx} + a_2 w \ln w + wG\Big(\frac{\bar{u}}{u}, \frac{\bar{w}}{w}\Big), \end{aligned} \tag{36}$$

которая имеет решение в виде произведения функций разных аргументов

$$u = \varphi_1(x)\psi_1(t), \qquad w = \varphi_2(x)\psi_2(t).$$

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ описываются двумя независимыми обыкновенными дифференциальными уравнениями и системой обыкновенных дифференциально-разностных уравнений

$$k_1\varphi_1'' = b_1\varphi_1 - a_1\varphi_1\ln\varphi_1, \qquad k_2\varphi_2'' = b_2\varphi_2 - a_2\varphi_2\ln\varphi_2;$$
$$\psi_1'(t) = b_1\psi_1(t) + \psi_1(t)F\left(\frac{\psi_1(t-\tau)}{\psi_1(t)}, \frac{\psi_2(t-\tau)}{\psi_2(t)}\right) + a_1\psi_1(t)\ln\psi_1(t),$$
$$\psi_2'(t) = b_2\psi_2(t) + \psi_2(t)G\left(\frac{\psi_1(t-\tau)}{\psi_1(t)}, \frac{\psi_2(t-\tau)}{\psi_2(t)}\right) + a_2\psi_2(t)\ln\psi_2(t),$$

где b_1 и b_2 — произвольные постоянные.

Система 4. Теперь рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + u^3F\left(\frac{w}{u}, \frac{\bar u}{u}, \frac{\bar w}{w}\right),\\ w_t &= kw_{xx} + w^3G\left(\frac{w}{u}, \frac{\bar u}{u}, \frac{\bar w}{w}\right), \end{aligned} \tag{37}$$

в которую входят две произвольные функции трех аргументов. Эта система допускает решение вида

$$u = xU(z), \qquad w = xW(z), \qquad z = t + \frac{1}{6k}x^2,$$

где функции $U(z)$ и $W(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциально-разностных уравнений

$$U''(z) + 9kU^3(z)F\left(\frac{W(z)}{U(z)}, \frac{U(z-\tau)}{U(z)}, \frac{W(z-\tau)}{W(z)}\right) = 0,$$
$$W''(z) + 9kW^3(z)G\left(\frac{W(z)}{U(z)}, \frac{U(z-\tau)}{U(z)}, \frac{W(z-\tau)}{W(z)}\right) = 0.$$

Краткие выводы. В статье исследован широкий класс нелинейных реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} u_t &= k_1u_{xx} + bu + F(u - a\bar u, w, \bar w),\\ w_t &= k_2w_{xx} + G(u - a\bar u, w, \bar w), \end{aligned}$$

где $u = u(x,t)$, $w = w(x,t)$, $\bar u = u(x, t-\tau)$, $\bar w = w(x, t-\tau)$; F и G — произвольные функции трех аргументов; τ — время запаздывания. Доказано, что при выполнении неравенств (глобальные условия неустойчивости)

$$a > 1, \qquad b > 0, \qquad \tau \geqslant \tau_0, \qquad \tau_0 = \frac{\ln a}{b}$$

любое решение рассматриваемой системы будет неустойчивым для любых кинетических функций $F(\zeta, w, \bar w)$ и $G(\zeta, w, \bar w)$. Важно подчеркнуть, что для доказательства неустойчивости решений в статье применен новый точный метод (не использующий никаких допущений и приближений), который может быть полезен для анализа других нелинейных биологических, химических, биофизических и экологических моделей с запаздыванием.

Описаны многопараметрические точные решения с обобщенным разделением переменных, содержащие произвольное число произвольных постоянных. Приведено точное решение, представляющее собой нелинейную суперпозицию бегущей волны с периодической стоячей волной. Рассмотрены также другие системы с запаздыванием, включая более сложные многокомпонентные нелинейные системы реакционно-диффузионных уравнений. Полученные результаты могут быть использованы для решения некоторых задач и тестирования приближенных аналитических и численных методов решения подобных и более сложных нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Wu J. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. New York, Springer-Verlag, 1996, 429 p.

[2] Smith H.L̇., Zhao X.-Q. Global asymptotic stability of travelling waves in delayed reaction-diffusion equations. *SIAM J. Math. Anal*, 2000, vol. 31, pp. 514–534.

[3] Wu J., Zou X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay. *J. Dynamics and Differential Equations*, 2001, vol. 13, no. 3, pp. 651–687.

[4] Huang J., Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka–Volterra system with delays. *J. Math. Anal. Appl*, 2002, vol. 271, pp. 455–466.

[5] Faria T., Trofimchuk S. Nonmonotone travelling waves in a single species reaction-diffusion equation with delay. *J. Differential Equations*, 2006, vol. 228, pp. 357–376.

[6] Trofimchuk E., Tkachenko V., Trofimchuk S. Slowly oscillating wave solutions of a single species reaction-diffusion equation with delay. *J. Differential Equations*, 2008, vol. 245, pp. 2307–2332.

[7] Mei M., So J., Li M., Shen S. Asymptotic stability of travelling waves for Nicholson's blowflies equation with diffusion. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2004, vol. 134, pp. 579–594.

[8] Gourley S.A., Kuan Y. Wavefronts and global stability in time-delayed population model with stage structure. *Proc. Roy. Soc. London A*, 2003, vol. 459, pp. 1563–1579.

[9] Pao C. Global asymptotic stability of Lotka — Volterra competition systems with diffusion and time delays. *Nonlinear Anal.: Real World Appl*, 2004, vol. 5, no. 1, pp. 91–104.

[10] Liz E., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S. A global stability criterion for a family of delayed population models. *Quart. Appl. Math.*, 2005, vol. 63, pp. 56–70.

[11] Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, pp. 448–466.

[12] Arik S. Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay. *Physics Letters A*, 2003, vol. 311, pp. 504–511.

[13] Cao J. New results concerning exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks. *Physics Letters A*, 2003, vol. 307, pp. 136–147.

[14] Cao J., Liang J., Lam J. Exponential stability of high-order bidirectional associative memory neural networks with time delays. *Physica D*, 2004, vol. 199, no. 3-4, pp. 425–436.

[15] Lu H.T., Chung F.L., He Z.Y. Some sufficient conditions for global exponential stability of delayed Hopfield neural networks. *Neural Networks*, 2004, vol. 17, pp. 537–444.

[16] Cao J.D., Ho D.W.C. A general framework for global asymptotic stability analysis of delayed neural networks based on LMI approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 24, pp. 1317–1329.
[17] Liao X.X., Wang J., Zeng Z. Global asymptotic stability and global exponential stability of delayed cellular neural networks. *IEEE Trans. Circ. Syst II*, 2005, vol. 52, no. 7, pp. 403–409.
[18] Song O.K., Cao J.D. Global exponential stability and existence of periodic solutions in BAM networks with delays and reaction diffusion terms. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, vol. 23, no. 2, pp. 421–430.
[19] Zhao H. Exponential stability and periodic oscillatory of bidirectional associative memory neural network involving delays. *Neurocomputing*, 2006, vol. 69, pp. 424–448.
[20] Wang L., Gao Y. Global exponential robust stability of reaction-diffusion interval neural networks with time-varying delays. *Physics Letters A*, 2006, vol. 350, pp. 342–348.
[21] Lu J.G. Global exponential stability and periodicity of reaction-diffusion delayed recurrent neural networks with Dirichlet boundary conditions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, vol. 35, pp. 116–125.
[22] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*. Москва, Физматлит, 2005, 256 с.
[23] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Second Edition*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2012, 1912 p.
[24] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.
[25] Ibragimov N.H. (Ed.) *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, V. 1, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*. Boca Raton: CRC Press, 1994, 448 p.
[26] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R. *Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2006, 498 p.
[27] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения*. Москва, Мир, 1967, 548 с.
[28] Hale J. *Functional Differential Equations*. New York, Springer-Verlag, 1977, 447 p.
[29] Kuang Y. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Boston, Academic Press, 1993, 412 p.
[30] Smith H.L. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. New York, Springer-Verlag, 2010, 183 p.
[31] Брацун Д.А., Захаров А.П. К вопросу о численном расчете пространственно-распределенных динамических систем с запаздыванием по времени. *Вестник Пермского ун-та. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2012, вып. 4 (12), с. 32–41.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Полянин А.Д. Точные решения и нелинейная неустойчивость реакционно-диффузионных систем уравнений с запаздыванием. *Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 4*. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/math/662.html

Полянин Андрей Дмитриевич — д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотруд. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, проф. кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: polyanin@ipmnet.ru