

УДК 551.466:551.467

С. В. Музылев, Т. Б. Цыбанева

## ВОЛНЫ КЕЛЬВИНА В ОДНОРОДНОМ МОРЕ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

*Приведены основы линейной теории волн Кельвина в однородном море под ледяным покровом. Найдены и проанализированы явные решения для волн Кельвина, а также соответствующие им дисперсионные уравнения. Задача рассмотрена без использования приближения гидростатики в рамках единой теории волн, распространяющихся под ледяным покровом.*

**E-mail:** [smuzylev@mail.ru](mailto:smuzylev@mail.ru); [tbt47@mail.ru](mailto:tbt47@mail.ru)

**Ключевые слова:** волны Кельвина, ледяной покров, параметр Кориолиса, приближение длинных волн, приближение гидростатики.

Теоретическое описание волновых движений в океане с учетом рельефа дна, береговых границ, вращения Земли и стратификации вод является классической проблемой геофизической гидродинамики. Среди них важную роль в динамике атмосферы и океана играют волны Кельвина — крупномасштабные волновые движения. Специфика таких гравитационных волн состоит в том, что они возникают вследствие влияния вращения Земли на волны, захваченные береговой границей. Эти волны, распространяющиеся в одном направлении, в Северном полушарии обегают контур бассейна против хода часовой стрелки, нормальная к берегу составляющая скорости тождественно равна нулю, амплитуда волн максимальна на береговой границе и экспоненциально убывает в сторону открытого моря. Волны Кельвина подразделяют на поверхностные, или баротропные, и внутренние, или бароклинные. Поверхностные волны Кельвина охватывают всю толщу жидкости от свободной поверхности моря до дна, а внутренние волны Кельвина обычно наблюдаются в слоях жидкости с большими градиентами плотности (например, в окрестности океанического термоклина). В этой работе рассмотрены только баротропные волны Кельвина.

В большинстве широко известных монографий [1—4] нет даже упоминания о возможном влиянии ледяного покрова на волны в океане и, в частности, на волны Кельвина. Вероятно, это связано с тем, что для корректного учета ледяного покрова требуется привлечение не только гидродинамических подходов, но и методов теории упругости, что существенно затрудняет исследования.

**Постановка задачи и основные уравнения теории.** Сплошной ледяной покров в достаточно естественных условиях можно рассматривать как тонкую упругую пластину, плавающую на поверхности моря. Если не интересоваться процессами, происходящими внутри льда, основные уравнения и граничные условия с учетом ледяного покрова не должны отличаться от аналогичных уравнений и условий в случае отсутствия льда на поверхности моря. Исключением является динамическое условие на границе раздела вода — лед, в котором появляются дополнительные слагаемые, обусловленные упругими свойствами льда, сил инерции и сжатия-растяжения, действующих на ледяной покров.

Рассмотрим на вращающейся Земле заполненный однородной жидкостью канал шириной  $L$ , ограниченный прямолинейными берегами при  $y = 0, L$ . Пусть ось  $y$  направлена по нормали к берегу, ось  $x$  совпадает с линией берега,  $y = 0$ , ось  $z$  направлена вертикально вверх. Будем полагать, что канал имеет постоянную глубину  $H$  и сверху, т. е. при  $z = 0$ , ограничен ледяным покровом постоянной толщины  $h$ .

Исходная линеаризованная система уравнений движения в приближении идеальной жидкости имеет следующий вид [5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где  $u, v$  — составляющие горизонтальной скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $w$  — вертикальная скорость;  $P$  — отклонение давления от гидростатического;  $\rho_w$  — плотность морской воды,  $\rho_w = \text{const}$ ;  $f$  — параметр Кориолиса,  $f = \text{const}$ . Параметр  $\varepsilon$  введен для возможности изучения перехода от общего случая, когда этот параметр равен единице, к приближению гидростатики, когда он равен нулю. Как следует из полученных далее результатов, переход к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  эквивалентен приближению длинных волн.

Уравнения (1)—(4) стандартной процедурой [5] сводятся к одному уравнению для давления  $P = P(x, y, z, t)$ :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

где  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  — лапласиан. Систему уравнений (1)—(4) дополним граничными условиями на берегах (которые будем полагать отвесными), дне канала и нижней поверхности льда. На берегах нормальная составляющая скорости равна нулю, т. е.

$$v \Big|_{y=0, L} = 0. \quad (6)$$

На дне выполняется условие непротекания жидкости, которое в рассматриваемом случае постоянства глубины океана имеет вид

$$w \Big|_{z=-H} = 0. \quad (7)$$

На нижней кромке льда ( $z = 0$ ) выполняются линеаризованные кинематические

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \quad (8)$$

и динамическое условия

$$P - g \rho_w \eta = P_a, \quad (9)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения;  $\eta = \eta(x, y, t)$  — прогиб ледяной поверхности;  $P_a = P_a(x, y, t)$  — давление непосредственно на границе раздела вода — лед.

Согласно уравнению (3) и кинематическому условию (8), выражение для прогиба  $\eta(x, y, t)$  с учетом давления  $P \Big|_{z=0}$  на нижней границе льда принимает вид

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (10)$$

Будем моделировать лед лежащей в горизонтальной плоскости тонкой упругой пластиной постоянной толщины  $h$ . Это предположение хорошо подтверждается экспериментальными данными [6, 7].

С помощью уравнений для свободных колебаний такой пластины найдем давление  $P_a$  на нижней границе льда [8, 9]:

$$\frac{1}{\rho_w} P_a = \mathcal{P}\eta,$$

где

$$\mathcal{P} = B\Delta^2 + Q\Delta + M\partial^2 / \partial t^2, \quad (11)$$

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-s^2)\rho_w}, \quad Q = \frac{Kh}{\rho_w}, \quad M = \frac{\rho_I h}{\rho_w}. \quad (12)$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга;  $K$  — коэффициент сжатия льда;  $\rho_I$  — плотность льда  $\rho_I = \text{const}$ ;  $s$  — коэффициент Пуассона. Слагаемые, пропорциональные  $B$ ,  $M$  и  $Q$ , возникают соответственно вследствие упругих свойств льда, сил инерции и сжатия-растяжения, действующих на ледяной покров.

Отметим, что числовые значения механических характеристик морского льда — модуля упругости льда\* (модуля Юнга)  $E$  и коэффициента сжатия  $K$  — известны с очень небольшой точностью. Приведем характерные значения этих величин для льда. Так, среднее значение динамического модуля упругости для однолетнего льда средней толщины в Баренцевом море в декабре — апреле составляет около 8 ГПа [10]. Согласно работе [9],  $E = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2 = 6 \text{ ГПа}$ ;  $s = 0,3$ ;  $K = 10^6 \text{ Н/м}^2 = 10^{-3} \text{ ГПа}$ ;  $\rho_w = 1025 \text{ кг/м}^3$ ;  $\rho_I = 0,9\rho_w$ . При толщине льда  $h = 1 \text{ м}$  для коэффициентов в выражениях (12) получаем:  $B \approx 5 \cdot 10^5 \text{ м}^5/\text{с}^2$ ;  $Q \approx 10^3 \text{ м}^3/\text{с}^2$ ;  $M = 0,9 \text{ м}$ .

Из уравнения (11) и динамического условия (9) имеем

$$P|_{z=0} = \rho_w (g + \mathcal{P})\eta. \quad (13)$$

Отсюда в силу выражения (10) находим единственное граничное условие на нижней поверхности льда

$$\left[ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + (g + \mathcal{P}) \frac{\partial P}{\partial z} \right]_{z=0} = 0. \quad (14)$$

---

\* В дальнейшем под модулем упругости льда будем понимать его динамическое (а не статическое) значение, определяемое, например, по данным о скоростях продольных и поперечных изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове. Динамический модуль упругости является фундаментальной физической характеристикой льда и используется для численной оценки механического поведения морского ледяного покрова при динамических нагрузках, время воздействия которых значительно меньше 1 с.

Граничные условия (6) и (7) выразим через отклонение  $P$  давления от гидростатического в следующем виде:

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y=0, L} = 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0. \quad (16)$$

Таким образом, необходимо решить уравнение (5) с граничными условиями (14)—(16). Будем искать решение задачи (5), (14)—(16) в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ :

$$P(x, y, z, t) = \exp[i(kx - \omega t)] p(y, z),$$

где  $k$  — волновое число;  $\omega$  — частота. Тогда для амплитудного множителя  $p(y, z)$  получаем уравнение

$$(\omega^2 - f^2) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \omega^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - k^2 p \right) = 0 \quad (17)$$

с граничными условиями

$$\left\{ \left[ g + B \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right)^2 + Q \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) - M \omega^2 \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \varepsilon^2 \omega^2 p \right\}_{z=0} = 0, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0, \quad (19)$$

$$\left( \omega \frac{\partial p}{\partial y} + kfp \right)_{y=0, L} = 0. \quad (20)$$

**Волны Кельвина в полуплоскости.** Рассмотрим наиболее простой случай волн Кельвина в полуплоскости  $0 \leq y < \infty$ , когда ширина канала  $L \rightarrow \infty$ . Разделяя переменные в уравнении (17) и учитывая условие (19), получаем

$$p(y, z) = a \exp(-\mu y) \operatorname{ch}[\varepsilon \lambda (H + z)], \quad (21)$$

где  $a$  — амплитуда волны Кельвина,  $a = \text{const}$ . Постоянные  $\mu > 0$  и  $\lambda$ , согласно уравнению (17), связаны соотношением

$$(\omega^2 - f^2)\lambda^2 + \omega^2(\mu^2 - k^2) = 0. \quad (22)$$

Из условия (20) при  $y = 0$  и соотношения (22) находим

$$\mu = \frac{fk}{\omega}, \quad \lambda = |k|. \quad (23)$$

Следовательно,  $p(y, z) = a \exp[-(fk/\omega)y] \operatorname{ch}[\varepsilon |k| (H+z)]$ . Из условия (18) находим дисперсионное уравнение для волн Кельвина в полуплоскости с учетом ледяного покрова:

$$\varepsilon \omega^2 = g_k(\omega, k) |k| \operatorname{th}(\varepsilon |k| H), \quad (24)$$

где

$$g_k(\omega, k) = g + \left[ Bk^4 \left( \frac{\omega^2 - f^2}{\omega^2} \right)^2 - Qk^2 \left( \frac{\omega^2 - f^2}{\omega^2} \right) - M\omega^2 \right]. \quad (25)$$

Как следует из выражения (25), влияние ледяного покрова в дисперсионном уравнении (24) для волн Кельвина описывается тремя слагаемыми, стоящими в квадратных скобках.

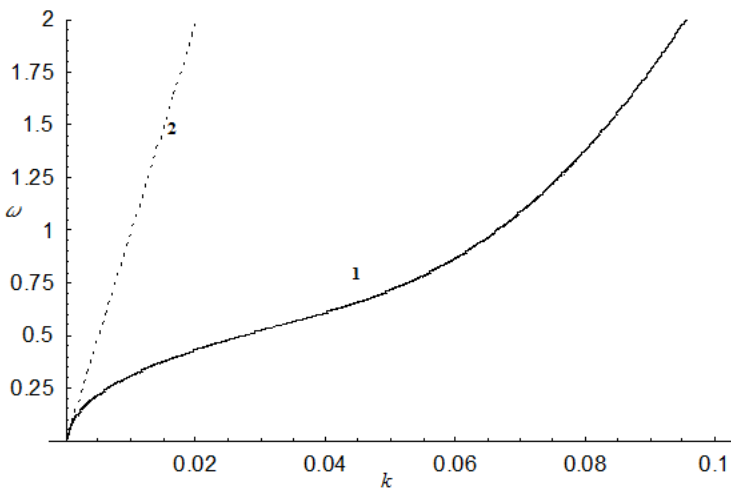
Для длинных ( $|k|H \ll 1$ ) низкочастотных ( $\omega \ll f$ ,  $\omega \ll \sqrt{g/M}$ ) волн  $\omega^2 \approx c^2 k^2$ , где  $c$  — корень уравнения, имеем

$$c^6 - (g - M\omega^2)Hc^4 - QHf^2c^2 - VHf^4 = 0. \quad (26)$$

В силу теоремы Декарта о корнях многочленов [11] уравнение (26) имеет один положительный корень  $c^2$ . Для реальных значений параметров с большой точностью

$$c^2 \approx gH + \frac{f^2(Bf^2 + QgH)}{g^2H - Qf^2} \approx gH,$$

поэтому в длинноволновом низкочастотном диапазоне ледяной покров практически не оказывает влияния на фазовую скорость волн Кельвина. Как показано на рисунке, при учете ледяного покрова волны Кельвина в низкочастотном диапазоне обладают дисперсией, хотя и весьма малой для реальных значений параметров. В этом заключается их отличие от волн Кельвина на открытой воде.



Дисперсионные кривые для волн Кельвина в случае ледяного покрова толщиной 1 м (1) и длинноволновом приближении для моря без льда (2)

Для высокочастотных волн Кельвина ( $\omega \gg f$ ) ситуация коренным образом меняется: дисперсионное уравнение не зависит от параметра Кориолиса и с большой точностью описывается выражением

$$\varepsilon \omega^2 = \left( g + Bk^4 - Qk^2 - M\omega^2 \right) |k| \operatorname{th}(\varepsilon |k| H).$$

Другими словами, дисперсионное уравнение для высокочастотных волн Кельвина практически совпадает с дисперсионным уравнением для изгибно-гравитационных волн (см. рисунок) [12, 13].

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  давление  $P$  в силу соотношения (21) перестает зависеть от глубины и дисперсионное уравнение (24) принимает вид

$$\omega^2 = \left[ g + Bk^4 \left( \frac{\omega^2 - f^2}{\omega^2} \right)^2 - Qk^2 \left( \frac{\omega^2 - f^2}{\omega^2} \right) - M\omega^2 \right] Hk^2.$$

Такой же результат можно получить, если в выражениях (21) и (24) перейти к пределу малых волновых чисел  $k$ , поэтому переход к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$  и приближение длинных волн эквивалентны.

Отметим, что из выражений (21) и (23) следует равенство нулю нормальной к берегу составляющей скорости  $v(x, y, z, t)$  всюду в рассматриваемой области. Этот результат совпадает с аналогичным выводом для классических волн Кельвина.

В приближении гидростатики ( $\varepsilon = 0$ ) дисперсионное уравнение (24) для волн Кельвина принимает вид тривиального тождества. Из уравнения (3) следует, что давление  $P$  не зависит от глубины, по-

этому из условия (13) на границе раздела вода — лед во всей жидкости выполняется соотношение

$$P = \rho_w (g + \mathcal{P})\eta.$$

Тогда уравнения движения (1) и (2) можно записать как

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = -(g + \mathcal{P}) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -(g + \mathcal{P}) \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (28)$$

откуда следует, что в приближении гидростатики составляющие скорости  $u$  и  $v$ , как и давление  $P$ , не зависят от глубины. Теперь проинтегрируем уравнение неразрывности (4) по глубине от  $-H$  до  $0$  с учетом условий для вертикальной составляющей скорости на дне (7) и нижней поверхности льда (8). Найдем

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (29)$$

Уравнения (27)—(29) сводятся к единственному уравнению для прогиба  $\eta$ :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + f^2 \eta - H \left( g + B \Delta^2 + Q \Delta + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Delta \eta = 0. \quad (30)$$

Полученное уравнение имеет шестой порядок по пространственным переменным, а в полной постановке задача сводится к решению уравнения (5), имеющего лишь второй порядок по пространственным переменным. Условие равенства нулю нормальной составляющей скорости на границе рассматриваемой здесь области, согласно выражению (15), в приближении гидростатики имеет вид

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( g + B \Delta^2 + Q \Delta + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \eta \right]_{y=0, L} = 0. \quad (31)$$

Для решения уравнения (30), кроме граничного условия (31), необходимы дополнительные условия, в качестве которых можно использовать, например, условие того, что морской лед закреплен на береговой границе [14]. Однако при отказе от использования приближения гидростатики, как показано в настоящей работе, никаких дополнительных условий не требуется.

Таким образом, приближение гидростатики искусственно завышает порядок уравнений для задач, в которых учитывается влияние



ледяного покрова. Это утверждение справедливо и для теории капиллярных волн, в которой  $B = M = 0$  и  $Q \neq 0$ . Исключениями являются классический для океанологии случай открытой воды ( $B = M = Q = 0$ ) и случай моря, покрытого битым льдом ( $B = Q = 0, M \neq 0$ ), когда порядки уравнений по пространственным переменным как в приближении гидростатики, так и в полной задаче совпадают и равны двум.

Таким образом, ледяной покров существенно влияет на характеристики волн Кельвина в области коротких волн (десятки и первые сотни метров), для длинных же волн (тысяча и более метров) его роль незначительна. Приближение гидростатики искусственно завышает порядок уравнений по пространственным переменным в задачах, в которых учитывается влияние ледяного покрова.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 12-05-00889 и № 12-05-93086-Норв.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане: пер. с англ. М.: Мир, 1981.
2. Гилл А. Динамика атмосферы и океана: пер. с англ. М.: Мир, 1986.
3. Лайтхилл Д.ж. Волны в жидкостях: пер. с англ. М.: Мир, 1981.
4. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика: пер. с англ. М.: Мир, 1984.
5. Pedlosky J. Waves in the Ocean and Atmosphere. Springer, 2003.
6. Тимохов Л. А., Хейсин Д. Е. Динамика морских льдов (математические модели). Л.: Гидрометеиздат, 1987.
7. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.
9. Liu A. K., Mollo-Christensen E. Wave propagation in a solid ice pack // J. Phys. Oceanogr. 1988. Vol. 18. № 11. P. 1702–1712.
10. Гаврило В. П., Ковалев С. М., Недошивин О. А. Расчетные средне-многолетние характеристики механических свойств однолетнего льда Баренцева и Карского морей. Справ. СПб.: Гидрометеиздат, 1996.
11. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра). М.: Физматгиз, 1962.
12. Музылев С. В. Волны в океане под ледяным покровом: основы теории и модельные задачи // Современные проблемы динамики океана и атмосферы. М.: «Триада ЛТД». 2010. С. 315–345.
13. Марченко А. В. Изгибно-гравитационные волны // Тр. ИОФАН. 1999. Т. 56. С. 65–111.
14. Goldstein R. V., Marchenko A. V. “Edge waves in the fluid beneath an elastic sheet with linear nonhomogeneity”. In: Surface Waves in Anisotropic and Laminated Bodies and Defects Detection, 143–157. Kluwer, 2004.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.