УДК 539.3

Д. А. Приказчиков, Е. В. Коваленко

ВЫБОР ПОТЕНЦИАЛОВ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассмотрен вопрос о введении упругих потенциалов при решении класса задач трехмерной теории упругости, в которых не учитывается антиплоское движение, с использованием интегрального преобразования Радона, позволяющего перейти к плоской задаче теории упругости в образах. Получено естественное представление в терминах трех потенциалов, рассмотрено применение этого представления на примере волны Рэлея. Показано, что в случае плоской нагрузки на границе возбуждение волны Рэлея осуществляется за счет градиентной составляющей нагрузки.

E-mail: prikazchikovda@yandex.ru

Ключевые слова: *упругие потенциалы, поверхностная динамика, асимптотическая модель, волна Рэлея.*

Введение упругих потенциалов является стандартным приемом в линейной теории упругости для изотропных сред, при этом в явной форме выделяются уравнения распространения продольной и поперечной волн. Будучи особенно эффективным в плоских задачах, введение потенциалов часто используется и в пространственных задачах. В этом случае компоненты поля перемещений $\mathbf{u}$ традиционно выражаются в терминах скалярного потенциала Φ и векторного потенциала $\mathbf{\Psi}$:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\mathbf{\Psi}. \tag{1}$$

Поскольку в соотношениях (1) участвуют четыре компоненты скалярного и векторного потенциалов, соответствующие трем компонентам перемещения, обычно вводится дополнительное условие на компоненты векторного потенциала, чаще всего, $\operatorname{div}\mathbf{\Psi} \equiv 0$ [1—3].

В работе предлагается еще один способ введения потенциалов, который ориентирован на исследования задач, в которых антиплоское движение не является объектом изучения, например, в случае задач приповерхностной динамики упругого полупространства, когда вклад волны Рэлея является доминирующим, что дает возможность применить явную асимптотическую модель для волны Рэлея [4—6]. Применение интегрального преобразования Радона [7] к пространственной задаче теории упругости приводит к плоской задаче в терминах образов преобразования Радона. При этом показано, что в случае граничных условий, соответствующих плоскому нагружению, возбуждение волны Рэлея осуществляется за счет градиентной составляющей нагрузки. Введение аналогов упругих потенциалов в образах Радона соответствует введению трех упругих потенциалов в исходной системе координат, что является упрощением, поскольку не требуется дополнительного условия на компоненты векторного потенциала. Развитие подхода может иметь серьезные приложения в смешанных задачах теории упругости [8, 9].

Введение упругих потенциалов в трехмерных задачах поверхностной динамики. Рассмотрим изотропное упругое полупространство $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \le z < \infty$. Уравнения движения в терминах компонент перемещений $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ имеют вид

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где λ, μ — параметры Ламэ, ρ — объемная плотность. Применим к уравнениям (2) интегральное преобразование Радона:

$$f^{(\alpha)}(\kappa,\alpha,z,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\kappa\cos\alpha - \eta\sin\alpha,\ \kappa\sin\alpha + \eta\cos\alpha, z, t)\,d\eta, \tag{3}$$

где $\kappa = x\cos\alpha + y\sin\alpha$, $\eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi)$. Физически преобразование Радона (3) соответствует представлению трехмерной волны в терминах суперпозиции плоских волн [7]. Получим

$$\left[(\lambda+\mu)\cos^2\alpha+\mu\right]\frac{\partial^2 u_x^{(\alpha)}}{\partial\kappa^2} + \mu\frac{\partial^2 u_x^{(\alpha)}}{\partial z^2} +$$

$$+(\lambda+\mu)\cos\alpha\left(\sin\alpha\frac{\partial^2 u_y^{(\alpha)}}{\partial\kappa^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial\kappa\partial z}\right) = \rho\frac{\partial^2 u_x^{(\alpha)}}{\partial t^2},$$

$$\left[(\lambda+\mu)\sin^2\alpha+\mu\right]\frac{\partial^2 u_y^{(\alpha)}}{\partial\kappa^2} + \mu\frac{\partial^2 u_y^{(\alpha)}}{\partial z^2} + \tag{4}$$

$$+(\lambda+\mu)\sin\alpha\left(\cos\alpha\frac{\partial^2 u_x^{(\alpha)}}{\partial\kappa^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial\kappa\partial z}\right) = \rho\frac{\partial^2 u_y^{(\alpha)}}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu)\left(\cos\alpha\frac{\partial^2 u_x^{(\alpha)}}{\partial\kappa\partial z} + \sin\alpha\frac{\partial^2 u_y^{(\alpha)}}{\partial\kappa\partial z}\right) + \mu\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial\kappa^2} +$$

$$+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial t^2}.$$

Выполним замену, соответствующую преобразованию координат:

$$u_\kappa^{(\alpha)}=u_x^{(\alpha)}\cos\alpha+u_y^{(\alpha)}\sin\alpha,\quad u_\eta^{(\alpha)}=-u_x^{(\alpha)}\sin\alpha+u_y^{(\alpha)}\cos\alpha, \tag{5}$$

и положим

$$u_\eta^{(\alpha)}=0. \tag{6}$$

Последнее предположение (6) означает, что из рассмотрения исключаются решения антиплоской задачи. Подобное упрощение часто является оправданным, например, в случае исследования поля волны Рэлея, так как антиплоские движения не соответствуют распространению поверхностной волны.

Преобразуя уравнения движения (4), получаем

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_\kappa^{(\alpha)}}{\partial \kappa^2}+\mu\frac{\partial^2 u_\kappa^{(\alpha)}}{\partial z^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial \kappa\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_\kappa^{(\alpha)}}{\partial t^2},\\(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_\kappa^{(\alpha)}}{\partial \kappa\partial z}+\mu\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial \kappa^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 u_z^{(\alpha)}}{\partial t^2}.\end{gathered} \tag{7}$$

Уравнения (7) в образах преобразования Радона формально соответствуют уравнениям движения плоской задачи теории упругости. Следовательно, можно ввести аналоги упругих потенциалов в образах Радона:

$$u_\kappa^{(\alpha)}=\frac{\partial\varphi^{(\alpha)}}{\partial\kappa}-\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial z},\quad u_z^{(\alpha)}=\frac{\partial\varphi^{(\alpha)}}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial\kappa}. \tag{8}$$

Теперь покажем, как меняются граничные условия в терминах напряжений в рамках предлагаемого подхода. Зададим граничные условия на поверхности $z=0$ в виде

$$\sigma_{zz}=P(x,y,t),\quad \sigma_{xz}=Q_x(x,y,t),\quad \sigma_{yz}=Q_y(x,y,t). \tag{9}$$

В силу линейности задачи граничные условия (9) распадаются на два типа: для нормальной $(Q_x=Q_y=0)$ и плоской $(P=0)$ нагрузки соответственно. В случае нормальной нагрузки граничные условия, преобразованные по Радону, принимают вид

$$\sigma_{\kappa z}^{(\alpha)} = \mu\left(\frac{\partial u_\kappa^{(\alpha)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(\alpha)}}{\partial \kappa}\right) = 0,$$
$$\sigma_{zz}^{(\alpha)} = \lambda\frac{\partial u_\kappa^{(\alpha)}}{\partial \kappa} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z^{(\alpha)}}{\partial z} = P^{(\alpha)}, \tag{10}$$

где $P^{(\alpha)}$ — образ Радона заданной нагрузки P.

В случае плоской нагрузки в соответствии с теоремой Гельмгольца запишем

$$Q_x = \frac{\partial Q_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial Q_0}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

В этом случае для граничных условий (9) после преобразований получим

$$\sigma_{\kappa z}^{(\alpha)} = \mu\left(\frac{\partial u_\kappa^{(\alpha)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(\alpha)}}{\partial \kappa}\right) = \frac{\partial Q_0^{(\alpha)}}{\partial \kappa},$$
$$\sigma_{zz}^{(\alpha)} = \lambda\frac{\partial u_\kappa^{(\alpha)}}{\partial \kappa} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_z^{(\alpha)}}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Из уравнений (11) следует, что возбуждение поверхностной волны в этом случае связано лишь с градиентной составляющей плоской нагрузки Q_0, что соответствует предположению о том, что антиплоское движение не соответствует распространению поверхностной волны. Таким образом, полученные для образов Радона краевые задачи (7)—(10) и (7)—(11) формально соответствуют плоской задаче теории упругости.

Преобразуя соотношения (8) с учетом (5) и (6), для компонент перемещения получаем

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}. \tag{12}$$

Потенциалы ψ_1 и ψ_2 в представлении (12) определяются как прообразы Радона величин $\psi_1^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}\cos\alpha$ и $\psi_2^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}\sin\alpha$. Очевидно, что в плоскостях Oxz и Oyz выражения (12) можно упростить и преобразовать к стандартному виду плоского потенциального представления.

Отметим, что выражения (12) можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial}{\partial z}\left(\boldsymbol{\psi}\right) + \mathbf{k}\,div\boldsymbol{\psi}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{i}\psi_1 + \mathbf{j}\psi_2$ и $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — координатные орты. Если положить $\boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{i}\psi_2 + \mathbf{j}\psi_1$, то выражение (12) также можно записать в традиционном виде:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\Psi}. \tag{14}$$

Примеры использования полученного представления (12). Рассмотрим вывод уравнения Рэлея в терминах полученного представления. Стандартные преобразования с дифференциальными операторами при подстановке (14) в уравнения движения (2) позволяют разделить систему уравнений:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = 0, \tag{15}$$

где Δ — оператор Лапласа и $c_1 = \left[\left(\lambda + 2\mu\right)/\rho\right]^{\frac{1}{2}}$ и $c_2 = \left(\mu/\rho\right)^{\frac{1}{2}}$ — скорости продольной и поперечной волн. Свободные граничные условия

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad z = 0$$

с учетом представления (12) принимают вид

$$\begin{gathered}
2\frac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{grad}_2\varphi\right) + \operatorname{grad}_2\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}\right) - \frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial z^2} = 0, \\
\kappa^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \left(\kappa^2 - 2\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}\right) = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь оператор $\operatorname{grad}_2 = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}$.

Решения для потенциалов с учетом уравнений (15) можно записать в форме бегущей волны:

$$\begin{gathered}
\varphi = A\exp\left[ik\left(x\cos\theta + y\sin\theta\right) - k\alpha z\right], \\
\boldsymbol{\psi} = \mathbf{B}\exp\left[ik\left(x\cos\theta + y\sin\theta\right) - k\beta z\right],
\end{gathered} \tag{17}$$

где k – волновое число; $\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{c^2}{c_1^2}}; \quad \beta = \sqrt{1 - \dfrac{c^2}{c_2^2}}.$

Подстановка выражения (17) в граничные условия (16) приводит к известному уравнению Рэлея

$$4\alpha\beta = \left(1 + \beta^2\right)^2.$$

По аналогии можно рассмотреть волны Рэлея — Лэмба в пластине, в случае когда нас интересует решение без учета антиплоских движений, и получить соответствующее дисперсионное соотношение.

Отметим также, что дальнейший вывод асимптотической модели для волны Рэлея [6] приводит к следующим соотношениям на поверхности $z = 0$ между потенциалами

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{2c_2^2 - c_\mathrm{P}^2}{2c_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \frac{2c_2^2 - c_\mathrm{P}^2}{2c_2^2}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{18}$$

где c_P — скорость волны Рэлея. Выражения (12) с учетом (18) соответствуют трехмерному представлению поля волны Рэлея в терминах одной гармонической функции [10].

Таким образом, получено представление (12) для компонент перемещения в терминах потенциалов для трехмерных динамических задач в случае упругого полупространства, в которых анализ не требует изучения антиплоского движения. Представление (12) дает возможность упростить решение, поскольку не требует введения дополнительного ограничения на компоненты векторного потенциала. В качестве одного из классов задач, для которого полученное представление может найти свое первоочередное применение, можно отметить задачи поверхностной и приповерхностной динамики упругого полупространства.

Авторы выражают благодарность д-ру физ.-мат. наук, проф. Ю.Д. Каплунову за плодотворные обсуждения представленной работы.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-3150.2012.8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikhlowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. Amsterdam.: North Holland, 1978.
2. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
3. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids // Amsterdam.: North Holland, 1973.

4. Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Асимптотическая модель дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // Доклады Академии наук, 2004. Т. 395. Вып. 4. С. 482–485.

5. Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D. A. Explicit models for elastic and piezoelastic surface waves. // IMA Journal of Applied Mathematics. 2006. Vol. 71. P. 768–782.

6. Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D. A. A long wave model for the surface elastic wave in a coated half space // Proceedings of the Royal Society London, Ser. A. 2010. Vol. 466. P. 3097–3116.

7. Georgiadis H. G., Lykotrafitis G. A method based on the Radon transform for three-dimensional elastodynamic problems of moving loads // Jl Elasticity. 2001. Vol. 65. P. 87–129.

8. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986.

9. Erbas B., Kaplunov J., Prikazchikov D. A. The Rayleigh wave field in mixed problems for a half-plane // IMA Journal of Applied Mathematics. 2012. doi:10.1093/imamat/hxs010.

10. Kiselev A. P., Parker D. F. Omni-directional Rayleigh, Stoneley and Scholte waves with general time dependence // Proceedings of the Royal Society London, Ser. A. 2010. Vol. 466. P. 2241–2258.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.