УДК 681.3.06(075.8)

Решение прикладных технических задач методом имитационного моделирования

© В.П. Строгалев, И.О. Толкачева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены достоинства и особенности применения одного из наиболее распространенных методов исследования операций — имитационного моделирования. Приводятся реальные примеры имитационных моделей, иллюстрирующие порядок их построения, структуру и интерпретацию полученных результатов.

Ключевые слова: *имитационное моделирование, математическая статистика, проектирование, компьютер, машинный эксперимент, метод Монте-Карло.*

Термин «имитационное моделирование» до сих пор вызывает спор среди специалистов, поскольку само сочетание слов «имитация» и «моделирование» представляется тавтологией. Однако, рассматривая исторический процесс формирования данного термина, можно прийти к выводу, что это словосочетание определяет в моделировании область, относящуюся к получению информации о сложном объекте, которая не может быть получена иным путем, кроме как в процессе эксперимента с его имитацией (моделью) на ЭВМ [1].

В данной статье под имитационной моделью мы будем понимать модель, отвечающую требованиям, выдвинутым основоположником науки об имитационном моделировании Р. Шенноном [2], одним из которых является наличие стохастичности, определяемой исходной экспериментальной информацией и подвергающейся статистической обработке. Для реализации этой модели необходимо наличие быстродействующего компьютера, обеспечивающего сам процесс моделирования.

Таким образом, имитационная модель — это эксперимент, подверженный ошибкам измерения и реализуемый на быстродействующей ЭВМ.

При создании имитационной модели любой исследуемой системы необходимо, как правило, реализовать три основных этапа:

- сбор и обработка статистического материала для описания поведения системы;
- выдвижение и подтверждение статистических гипотез, которые могут объяснить наблюдаемое поведение;
- использование этих гипотез для предсказания будущего поведения системы.

Имитационное моделирование может применяться в самых различных сферах деятельности, но наиболее эффективно оно используется при решении задач двух основных типов [3].

1. Теоретические задачи в таких областях науки, как математика, физика, химия и т. д. Среди этих задач отметим следующие:

- вычисление кратных интегралов;
- обращение матриц;
- вычисление различных констант, таких как π, *e* и т. д.
- решение задач для уравнений в частных производных;
- анализ диффузии частиц и нахождение пространственных траекторий их движения.

2. Практические задачи организационного управления, возникающие в различных отраслях человеческой деятельности. Примерами подобных задач являются:

- проектирование и анализ производственных систем;
- оценка различных систем вооружений и выявление требований к их материально-техническому обеспечению;
- определение требований к оборудованию и протоколам сетей связи;
- определение требований к оборудованию и программному обеспечению различных компьютерных систем;
- проектирование и анализ работы транспортных систем, например аэропортов, автомагистралей, портов и метрополитена;
- оценка проектов создания различных организаций массового обслуживания, например центров обработки заказов, заведений быстрого питания, больниц, отделений связи;
- анализ финансовых и экономических систем и др.

Оценивая целесообразность применения метода имитационного моделирования для исследования конкретной системы, необходимо учитывать его очевидные достоинства и недостатки. Этот метод, как правило, используется при наличии одного из следующих условий:

- не существует законченной математической постановки либо не разработаны аналитические методы решения сформулированной математической модели (модели массового обслуживания, военно-технические задачи и т. д.);
- аналитические методы имеются, но математические процедуры столь сложны и трудоемки, что имитационное моделирование дает более простой способ решения задачи;
- невозможность использования имеющихся аналитических решений ввиду слабой подготовки технического персонала;
- представляет интерес наблюдение за ходом процесса во времени, а не только оценка выходных характеристик;

- имитационное моделирование может оказаться единственной возможностью вследствие трудностей постановки экспериментов и наблюдения за явлениями в реальных условиях (космос, стратегические оборонные инициативы и проч.);
- сжатие временно́й шкалы исследуемого процесса (анализ процесса старения городов).

Дополнительным преимуществом имитационного моделирования можно считать широчайшие возможности его применения в сфере образования и профессиональной подготовки. Разработка и использование имитационной модели позволяет экспериментатору видеть и «разыгрывать» на модели реальные процессы и ситуации. В свою очередь, это должно в значительной мере помочь ему понять и прочувствовать проблему, что стимулирует процесс поиска нововведений.

Идея имитационного моделирования интуитивно привлекательна и для руководителей, и для исследователей систем благодаря своей простоте. Поэтому данный метод стремятся применять для решения каждой задачи, с которой приходится сталкиваться. И хотя людям с высокой математической подготовкой имитационный подход представляется грубым силовым приемом или последним средством, к которому следует прибегать, неопровержимый факт свидетельствует о том, что этот метод является самым распространенным инструментом в руках ученого, погруженного в проблемы управления и исследования операций (частота использования из всех методов исследования операций свыше 30 %).

Чтобы глубже проникнуть в суть разработки имитационной модели, рассмотрим простейший пример определения вероятности выпадения «орла» при подбрасывании монеты. На основе использования определения искомой вероятности как отношения числа благоприятных исходов к общему числу исходов получим, что вероятность выпадения «орла» $P_{\text{o}} = \frac{1}{2}$. Такой подход в соответствии с классификацией различных способов исследования систем можно назвать аналитическим решением соответствующей математической модели.

Построение имитационной модели начинается с подготовки исходных данных, которая заключается в подбрасывании монеты большое число раз и фиксировании числа удачных попыток выпадения «орла» (эксперимент с реальной системой). Отношение числа удачных попыток к общему числу подбрасываний при неограниченном числе подбрасываний позволяет найти закон распределения случайной величины выпадение «орла».

Чтобы не бросать монету самим, воспользуемся результатами французского естествоиспытателя XVIII в. Ж. Бюффона, который при 4 040 бросаниях монеты (n = 4 040) получил 2 048 выпадений «орла»

(n_1 = 2 048) и 1 992 выпадений «решки» (n_2 = 1 992). Совместимо ли это с гипотезой о том, что вероятность выпадения «орла» при одном бросании равна $\frac{1}{2}$?

Из математической статистики известно [3], что наиболее распространенным критерием подтверждения непараметрических гипотез (гипотеза H_0: выпадение «орла» и «решки» равновероятны) является критерий согласия Пирсона χ^2 («хи-квадрат»).

При использовании χ^2-критерия вся область изменения генеральной совокупности делится на k интервалов, которые могут иметь различную длину. По выборке составляют вариационный ряд по этим же интервалам.

По выборке вычисляют оценки параметров теоретического распределения и на его основе вычисляют вероятность P_i того, что случайная величина принимает значение из i-го интервала, при этом $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1.$ Теоретические частоты находятся в виде $m_i = nP_i$.

Гипотеза H_0 верна, если теоретические и эмпирические частоты m_i и n_i достаточно мало отличаются друг от друга. Для проверки гипотезы H_0 используется статистика $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$, которая имеет χ^2-распределение с числом степеней свободы $\nu = k - r - 1$, где r — количество параметров теоретического распределения, оценки которых вычислялись по выборке.

Полученное значение статистики сравнивается с табличным значением χ^2-критерия на уровне доверительной вероятности $(1 - \alpha)$ и при превышении этого значения χ^2 гипотеза H_0 отвергается.

Для нашего примера n = 4 040; k = 2; n_1 = 2 048; n_2 = 1 992; $P_1 = P_2 = 0{,}5$; $\nu = k - 1 = 1$ и при $\alpha = 0{,}05$ находим из таблиц $\chi^2_{0,05}(1) = 3{,}841$.

Проверим гипотезу H_0 о том, что вероятности выпадения «орла» и «решки» равны $\frac{1}{2}$. Имеем

$$\chi^2 = \frac{2\,048 - 4\,040 \cdot 0{,}5}{4\,040 \cdot 0{,}5} + \frac{1\,992 - 4\,040 \cdot 0{,}5}{4\,040 \cdot 0{,}5} = 0{,}776.$$

Поскольку 0,776 < 3,841, статистические данные не противоречат гипотезе H_0.

Используя на компьютере датчик случайных чисел, распределенных по равномерному закону, и имитируя таким образом подбрасывание монеты, получим при достаточно большом числе попыток величину искомой вероятности, близкую к 0,5. Если случайное число меньше 0,5, выпадает «орел», больше 0,5 — «решка». Вероятность выпадения «орла» рассчитывается как отношение числа выпавших «орлов» к общему числу испытаний N.

Число реализаций имитационной модели может быть определено для заданной погрешности конечного результата и заданной доверительной вероятности по формуле [3] $N = \frac{Z_{\alpha/2}^2}{4\varepsilon^2}$, где $Z_{\alpha/2}$ — нормальная статистика уровня α/2; ε — погрешность конечного результата. Именно такой подход, несмотря на его простоту, и называется имитационным моделированием.

В качестве следующего примера построения имитационной модели рассмотрим процесс функционирования небольшого магазина подарков (так называемая однолинейная система массового обслуживания с одним устройством обслуживания).

Предположим, что промежутки времени между последовательными появлениями покупателей распределены равномерно в интервале от 1 до 10 мин, а время, необходимое для обслуживания каждого покупателя, распределяется равномерно в интервале от 1 до 6 мин (эти данные были получены соответствующим хронометражем с дальнейшим подтверждением адекватности принятых гипотез). Нас интересует среднее время пребывания покупателя в очереди, среднее время пребывания покупателя в магазине, средняя длина очереди, а также процент времени, в течение которого продавец, стоящий на контроле, не загружен работой.

Для моделирования системы необходимо придумать способ имитации последовательности прибытия покупателей и времени, необходимого для обслуживания каждого из них. Один из способов, который мы могли бы применить, состоит в том, чтобы взять десять фишек с цифрами от 1 до 10 и один игральный кубик. Положим фишки в шляпу и тщательно ее встряхнем. Вытягивая фишку из шляпы и считывая выпавшее число, мы моделируем промежутки времени между появлением предыдущего и последующих покупателей. Бросая кубик и считывая с его верхней грани выпавшее число очков, мы определяем время обслуживания каждого покупателя. Повторяя эти операции в указанной последовательности (возвращая каждый раз фишки обратно и встряхивая шляпу перед каждым вытягиванием), мы получим временные ряды, представляющие промежутки времени между последовательными прибытиями покупателей и соответствующие им времена обслуживания. В табл. 1 представлены результаты, полученные при анализе прибытия 20 покупателей.

В результате обработки «экспериментальных» данных получаем, что время пребывания покупателя в магазине $t_{\text{маг}} = \frac{68}{20} = 4\ \text{мин}$, а процент времени простоя продавца $t_{\text{п}} = \frac{55}{55+63} 100\,\% = 47\,\%$.

Таблица 1

Исходные данные к модели функционирования магазина, мин

Покупатель	Время после прибытия предыдущего покупателя	Время обслуживания	Время нахождения покупателя у прилавка	Время простоя продавца в ожидании покупателя
1	—	1	1	0
2	3	4	4	2
3	7	4	4	3
4	3	2	3	0
5	9	1	1	6
6	10	5	5	9
7	6	4	4	1
8	8	6	6	4
9	8	1	1	2
10	8	3	3	7
11	7	5	5	4
12	3	5	7	0
13	8	3	3	1
14	4	6	6	1
15	4	1	3	0
16	7	1	1	4
17	1	6	6	0
18	6	1	1	0
19	7	2	2	6
20	6	2	2	5
Всего	—	63	68	55

Очевидно, что для получения статистической значимости результатов необходимо иметь более представительную выборку (хотя бы за день работы магазина), учесть ряд привходящих нюансов, таких как начальные условия работы магазина и т. д. Вместе с тем приведенный пример носит методический характер. Размер выборки можно определить, как и в предыдущем случае.

Рассмотрим теперь решение задач военно-стратегического характера и прежде всего разработку имитационной модели бомбардировки промышленного предприятия.

Предлагаемая модель имитирует поведение бомбардировщика, посланного атаковать важное промышленное предприятие ракетами класса «воздух—земля». Каждая ракета наводится индивидуально. Размеры предприятия составляют, м: a = 150, b = 60. Точка прицеливания — геометрический центр цели, при попадании в цель она считается пораженной.

Для расстояния, с которого запускаются ракеты, оба отклонения независимы, нормально распределены относительно точки прицеливания и имеют нулевое среднее значение. Среднеквадратические отклонения, м: по дальности $\sigma_x = 60$ и боковому направлению $\sigma_y = 120$. При каждом заходе бомбардировщик выпускает шесть ракет ($n = 6$). Необходимо оценить среднее число попаданий при каждой атаке.

В данном случае возможны несколько вариантов захода на атаку бомбардировщика, связанных с взаимным расположением предприятия и атакующего самолета. При этом задача может быть решена аналитическим методом (с использованием таблиц функций Лапласа) и методом Монте-Карло. Для случаев заходов на атаку самолета с направлений, совпадающих с направлениями продольной или поперечной осей симметрии предприятия, решение легко получить аналитически, тогда как для остальных случаев такое решение получается громоздким, и аналитический подход себя не оправдывает. Методом Монте-Карло задача может быть решена для любого направления захода на атаку с практически одинаковыми трудозатратами, что является в данном случае очевидным преимуществом метода, а аналитический подход может использоваться для проверки результатов частных случаев реализации метода Монте-Карло.

Рассмотрим в первую очередь теоретическое решение для случая захода самолета на атаку вдоль продольного направления (рис. 1).

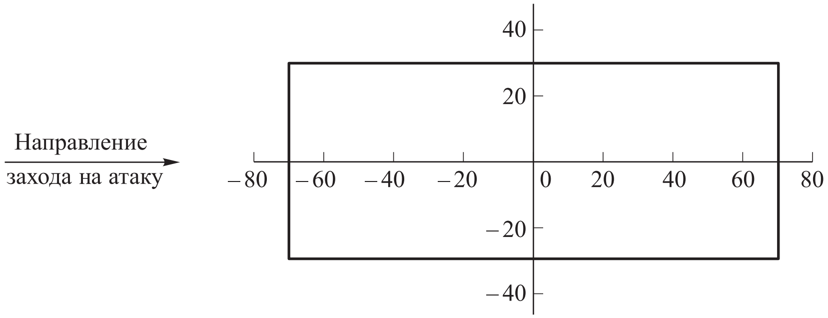

Рис. 1. Схема бомбардировки промышленного объекта

Используя формулы [3] для определения вероятности попадания в площадь цели, имеем

$$P_1 = \left\{ 2F_0\left(\frac{a}{2\sigma_x}\right) - 1 \right\} \left\{ 2F_0\left(\frac{b}{2\sigma_y}\right) - 1 \right\} = 0{,}788 \cdot 0{,}682 = 0{,}538,$$

где F_0 — стандартная функция нормального распределения.

Тогда среднее число попаданий за одну атаку

$$M_1 = nP_1 = 6 \cdot 0{,}538 = 3{,}23.$$

Аналогично для случая атаки вдоль поперечной оси имеем

$$P_2 = 0{,}378;\ \ M_2 = 2{,}27.$$

Для реализации метода Монте-Карло была написана программа, осуществляющая розыгрыш по нормальному закону точек попадания ракет в контур цели, расположенной под произвольным углом к направлению стрельбы. Координаты точек попадания рассчитывались по следующим формулам:

$$X = \mu_x + N(0{,}1)\sigma_x,$$

$$Y = \mu_y + N(0{,}1)\sigma_y.$$

Здесь $\mu_x = \mu_y = 0$; $N(0{,}1)$ — нормально распределенное случайное число с нулевым математическим ожиданием и единичным среднеквадратическим отклонением.

Далее подсчитывается количество попаданий в прямоугольник со сторонами a и b, ориентированный под различными углами относительно направлений рассеивания (угол изменяется в диапазоне 0…180°). Для каждого из задаваемых, изменяющихся с шагом в 1° углов ориентирования прямоугольника, проводится по N реализаций метода, для поиска среднего числа попаданий μ в цель. Зависимость среднего числа попаданий от угла обстрела цели приведена на рис. 2.

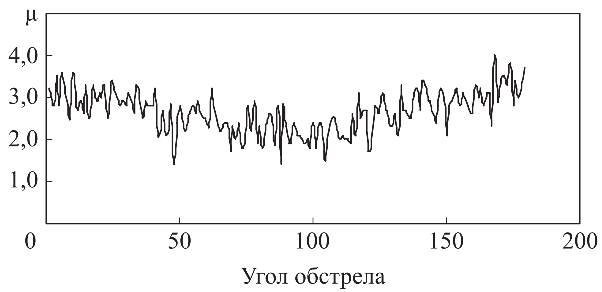

Рис. 2. Зависимость среднего числа попаданий от угла обстрела

Из полученной картины обстрела площадной цели очевидно, что при заданных вероятностных параметрах атаки и геометрических размерах цели наиболее эффективной является атака, предпринимаемая в направлении, совпадающем с направлением продольной оси цели, а наименее эффективной — в направлении, совпадающем с поперечной осью.

Результаты, полученные с использованием метода Монте-Карло при сравнительно небольшом количестве его реализаций (n = 10), с высокой степенью точности согласуются с результатами, полученными аналитически с использованием таблиц функций Лапласа. Например, при стрельбе по направлению продольной оси цели $\mu_1 = 3{,}2$; при стрельбе по направлению поперечной оси $\mu_2 = 2{,}3$; при стрельбе вдоль диагонали прямоугольника $\mu_3 = 3$ (угол обстрела цели при этом составляет 22º).

Таким образом, использование метода имитационного моделирования при исследовании общего случая обстрела площадной цели предпочтительнее аналитического метода, поскольку с меньшими трудозатратами позволяет решить поставленную задачу.

И, наконец, рассмотрим процесс имитации стрельбы из артиллерийского орудия.

Точность попадания — одна из важнейших характеристик создаваемых артиллерийских комплексов, поскольку количество средств, необходимое для выполнения боевой задачи, а также эффективность непосредственно зависят от характеристик рассеивания точек падения.

Рассеивание точек падения может быть определено расчетным или опытным путем. Естественно, что в процессе проектирования технических систем можно применять только расчетные методы, причем результаты вычислений являются составной частью экономической оценки системы в целом. Опытную обработку ввиду большой стоимости испытаний целесообразно сочетать с расчетными методами для контроля ряда характеристик комплекса.

Отклонение точки падения (x, z) от центра рассеивания вызывается случайными причинами, такими как разбросы начальных скоростей, углов бросания, масс, температур и проч.

Если известны законы распределения случайных величин, вызывающих рассеивание, и уравнения движения тела, с помощью компьютера можно получить действительные характеристики рассеивания.

При создании математической модели движения снаряда приняты следующие допущения:

• снаряд является материальной точкой, на которую действуют лишь силы тяжести и лобового сопротивления;

• снаряд движется в нормальной неподвижной атмосфере, которую характеризуют такие параметры, как:

– плотность воздуха у поверхности Земли $\Pi_{0N} = 1{,}206$ кг/м^3;

– виртуальная температура у поверхности Земли $\tau_{0N} = 288{,}9$ K;

– давление у поверхности Земли $p_{0N} = 0{,}99 \cdot 10^5$ Па;

– скорость звука у поверхности Земли $a_{0N} = 340{,}8$ м/с;

– ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2;

– закон изменения виртуальной температуры с высотой:

$$\tau(y)=\begin{cases}286{,}9-0{,}006328y \text{ при } y\geq 9\,300 \text{ м},\\ 230-0{,}006328(y-9\,300)+0{,}000001172(y-9\,300)^2\\ \qquad \text{при } 9\,300 \text{ м} \leq y \leq 12\,000 \text{ м},\\ 221{,}5 \text{ при } y>12\,000 \text{ м};\end{cases}$$

– кривизна Земли не учитывается;

– коэффициент формы не зависит от числа Маха (М).

С учетом этих допущений система уравнений движения примет вид

$$\frac{dV}{dt}=-g\sin\theta-J_x i_{43} c_{x43}(\mathrm{M})\Pi(y)\mathrm{M}^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-g\frac{\cos\theta}{V},$$

$$\frac{dy}{dt}=V\sin\theta,$$

$$\frac{dx}{dt}=V\cos\theta,$$

$$\frac{d\Pi(y)}{dt}=-\frac{dy}{dt}\Pi(y)/RT(y),$$

$$z=x\rho_0/\cos\theta_0,$$

где $J_x=\dfrac{kp_{0N}\pi d^2}{8m_0}$; $\mathrm{M}=\dfrac{V}{a}$; $\Pi(y)=\dfrac{p(y)}{p_{0N}}$; k — показатель адиабаты воздуха; i_{43} — коэффициент формы; a — скорость звука; c_{x43}(М) — закон сопротивления воздуха; V — скорость полета; θ — текущий угол наклона траектории; x, y, z — координаты центра масс; ρ_0 — угол вылета в боковом направлении; $p(N)$ — атмосферное давление на высоте y; R — газовая постоянная для воздуха.

Начальные значения случайных параметров, входящих в правые части уравнений, формируются с помощью датчика случайных чисел, распределенных по нормальному закону. Исходные данные для формирования последовательностей случайных чисел приведены в табл. 2.

Полученные таким образом случайные значения параметров вводятся как исходные данные для каждого расчета дальности и бокового

Таблица 2

Исходные данные к модели полета снаряда

Параметр	Размерность	Математическое ожидание	Среднее квадратическое отклонение
Начальная скорость	м/с	V_0	$\sigma_{V_0} = (0,3-0,6)\cdot 10^{-2}\,V_0$
Угол бросания	град	θ_0	$\sigma_{\theta_0} = (0,1-0,2)$
Угол вылета в боковом направлении	град	0	$\sigma_{\rho_0} = (0,05-0,1)$
Коэффициент формы	—	i_{43N}	$\sigma_{i_{43}} = 0,01 i_{43N}$
Масса	кг	m_0	$\sigma_{m_0} = 0,001 m_0$

отклонения. Число реализаций модели и шаг интегрирования задаются из условия достижения требуемой точности.

На рис. 3 представлено рассеивание точек падения снарядов на картинной плоскости для одного из вариантов исходных данных.

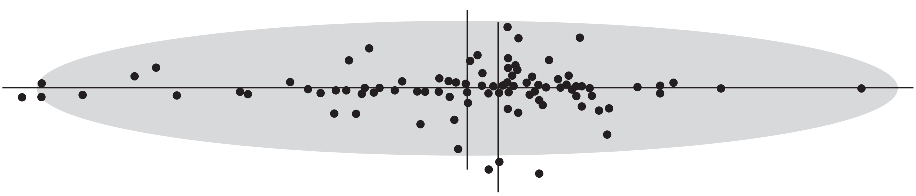

Рис. 3. Рассеивание точек падения снарядов на картинной плоскости

В результате расчета получают координаты *n* точек падения. Один из вариантов результатов их обработки занесен в табл. 3.

Таблица 3

Координаты точек попадания снарядов

μ_X	σ_X	μ_Z	σ_Z	r	α	σ_ξ	σ_η
3018 м	14,9 м	24,5 м	5,51 м	25,3 м^2	7,620	15,1 м	5,2 м

Здесь μ_X, μ_Z — оценки математического ожидания координат точек падения; σ_X, σ_Z — оценки среднеквадратических отклонений координат точек падения; r — коэффициент корреляции; $\alpha = 0{,}5\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\,\mathrm{cov}(X,\,Z)}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}$ — угол поворота главных осей рассеивания относительно осей ОX и ОY; σ_ξ, σ_η — оценки среднеквадратических отклонений относительно главных осей рассеивания.

Если коэффициент корреляции r мал, можно считать, что системы случайных величин X и Z практически независимы, а главные оси рассеивания ξ и η параллельны осям координатной системы X, Z.

Дальнейшая обработка результатов эксперимента проводится обычным путем: принимается гипотеза о нормальности распределения координат точек рассеивания, по критериям согласия проводится подтверждение этой гипотезы и строится доверительный интервал для оценки математического ожидания точек падения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. *Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий*. Москва, Наука, 1976, 279 с.

[2] Шеннон Р. *Имитационное моделирование систем — искусство и наука*. Москва, Мир, 1978, 420 с.

[3] Строгалев В.П., Толкачева И.О. *Имитационное моделирование*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 280 с.

Статья поступила в редакцию 21.05.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
В.П. Строгалев, И.О. Толкачева. Решение прикладных технических задач методом имитационного моделирования. *Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 3.* URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/627.html

Строгалев Валерий Петрович родился в 1943 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1966 г. Д-р техн. наук, проф. кафедры «Ракетные и импульсные системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ в области моделирования и проектирования. e-mail: strogal@yandex.ru.

Толкачева Ирина Олеговна родилась в 1950 г., окончила МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1974 г. Канд. техн. наук, доц. кафедры «Ракетные и импульсные системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области моделирования и проектирования.