УДК 593.3

Э. М. Карташов

НОВЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ В ПРОБЛЕМЕ ТЕПЛОВОГО УДАРА

Развиты новые модельные представления динамической термовязкоупругости в теории теплового удара на основе линейных реологических моделей Максвелла и Кельвина.

E-mail: info@baumanpress.ru

Ключевые слова*: *теория теплового удара, динамическая термовязкоупругость, линейные реологические модели.

Проблема термического удара — одна из центральных в термомеханике в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в различных технологических операциях. Ее исследования на основе моделей динамической и квазистатической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряженного состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на базе классических феноменологий Фурье и Максвелла — Каттанео — Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твердых телах; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрическими, магнитными); сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учетом тепловой памяти; установлена связь макроскопического поведения сплошной среды с внутренними параметрами состояния среды и скоростью их изменения во времени. Результаты исследований, накопленные в этой области термомеханики, систематизированы в обзорах автора [1, 2] и книгах [3, 4].

Проведенные исследования указанной проблемы выполнены в основном для большинства технически важных материалов, подчиняющихся закону Гука. В соответствующих математических моделях в терминах динамических, квазистатических или статических задач термоупругости материал считается однородным и изотропным, термомеханические коэффициенты являются постоянными величинами, не зависящими от температуры, и рассматриваемые разности температур не слишком велики, т. е. температура не превышает некоторого предельного значения, зависящего от материала, и напряжения не достигают границы текучести. Считается [3], что при относительно низком уровне температур и напряжений поведение широкого класса материалов находится в хорошем соответствии с теорией термоупругости. При повышенных температурах и более высоком уровне напряжений понятие об упругом теле становится недостаточным: почти у всех материалов обнаруживается более или менее отчетливо явление вязкого течения. Реальное тело начинает проявлять упругие и вязкие свойства, становясь вязкоупругим. Возникает проблема изучения теплового удара вязкоупругих тел, решение которой связано прежде всего с обобщением соотношений между напряжениями и деформациями. Алфрей, Хилтон, Ли-Штернберг заметили, что поведение вязкоупругих тел в условиях резких температурных и механических воздействий может быть сведено к рассмотрению термоупругих задач, если в операционном решении (по Лапласу) $\int\limits_0^\infty \ldots \exp(-pt)\,dt)$ термоупругой задачи заменить модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν их изображениями $\bar{G}(p)$ и $\bar{\nu}(p)$, вид которых определяется линейными реологическими моделями Максвелла и Кельвина [5]. Однако подход этих ученых распространяется только на квазистатические исследования в терминах квазистатических (несвязанных) моделей термоупругости. Проблема термической реакции вязкоупругих тел на тепловой удар в рамках динамических моделей оставалась открытой. Ее решению посвящена настоящая публикация.

Пусть D — конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения пространственных переменных $M(x, y, z)$ соответственно геометрии и размерам твердого тела, в котором изучается процесс термоупругости; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S; $T(M, t)$ — распределение температуры в области D при $t > 0$; T_0 — начальная температура, при которой область находится в ненапряженном и недеформированном состоянии. Пусть $\sigma_{ij}(M, t)$, $\varepsilon_{ij}(M, t)$, $U_i(M, t)$, $i, j = x, y, z,$ — соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие в области D при $t > 0$ основным уравнениям (несвязанной) динамической задачи термоупругости [3]: уравнениям движения (без учета объемных сил), геометрическим уравнениям, физическим уравнениям (обобщенный закон Гука) в индексных обозначениях:

$$\sigma_{ij,j}(M, t) = \rho \ddot{U}_i(M, t), \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2)\left[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)\right], \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(M,\ t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M,\ t) +$$

$$+\left\{\lambda\tilde{e}(M,\ t)\delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T\left[T(M,\ t) - T_0\right]\right\}\delta_{ij}, \tag{3}$$

где ρ — плотность; $\mu = G$; $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$ — изотермические коэффициенты Ламе, $2G(1+\nu) = E$ (E — модуль Юнга); α_T — коэффициент линейного теплового расширения; δ_{ij} — символ Кронекера; $\tilde{e}(M,t) = \varepsilon_{ii}(M,t) = \mathrm{div}\left[\mathbf{U}(M,t)\right]$ — объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\tilde{\sigma}(M,t) = \sigma_{ii}(M,t)$ соотношением

$$\tilde{e}(M,\ t) = \frac{1-2\nu}{E}\tilde{\sigma}(M,\ t) + 3\alpha_T\left[T(M,\ t) - T_0\right]. \tag{4}$$

Термонапряженное состояние области D при $t > 0$ может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу поверхности S, создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи [6]: температурный нагрев $T(M,\ t) = T_{\text{c}}$, $M \in S$, $t > 0$; тепловой нагрев $\partial T(M,\ t)/\partial n = -(1/\lambda_T)q_0$, $M \in S$, $t > 0$ (λ_T — теплопроводность материала; q_0 — тепловой поток); нагрев средой $\partial T(M,\ t)/\partial n = h\left[T(M,\ t) - T_{\text{c}}\right]$, $M \in S$, $t > 0$ (h — относительный коэффициент теплообмена, T_{c} — температура окружающей среды, $T_{\text{c}} > T_0$). В равной степени могут быть рассмотрены и случаи (резкого) охлаждения. Соотношения (1)—(3) запишем в перемещениях. Подставляя правые части уравнения (3) в уравнение (1) и используя выражения (2)—(4), после ряда преобразований получаем соотношение

$$\Delta\mathbf{U}(M,\ t) + \frac{1}{(1-2\nu)}\mathrm{grad}\left[\mathrm{div}\,\mathbf{U}(M,\ t)\right] - \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\mathbf{U}(M,\ t)}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha_T\,\mathrm{grad}\left[T(M,\ t) - T_0\right], \quad M \in D, \quad t > 0. \tag{5}$$

В практике многочисленных исследований термической реакции твердых тел различной формы на тепловой удар рассматривают области: 1) (z, t) в декартовых координатах (x, y, z) (бесконечная пластина; пространство, ограниченное изнутри плоской поверхностью, и т. д. — одномерное движение) с температурной функцией $T = T(z, t)$, при этом $U_x = U_y = 0$, $U_z = U_z(z, t)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)\delta_{ij}$, $i, j = x, y, z$; 2) (r, t) — в цилиндрических координатах (r, φ, z) (радиальный поток теплоты; неограниченный цилиндр сплошной или полый; пространство, ограниченное изнутри цилиндрической поверхностью, и т. д.) с температурной функцией $T = T(r, t)$, при этом $U_\varphi = U_z = 0$, $U_r = U_r(r, t)$; $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(r, t)\delta_{ij}$, $i, j = r, \varphi, z$; 3) (ρ, t) — в сферических координатах (ρ, φ, θ) (нагрев в условиях центральной симметрии) с температурной функцией $T = T(\rho, t)$, при этом $U_\varphi = U_\theta = 0$, $U_\rho = U_\rho(\rho, t)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\rho, t)\delta_{ij}$, $i, j = \rho, \varphi, \theta$ (шар сплошной или полый; пространство, ограниченное изнутри сферической поверхностью, и т. д.). В указанных условиях температурного состояния всех трех областей обобщенное уравнение (5) следует записать в виде

$$\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}\operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\mathbf{U}(M, t)\right] - \left(\frac{\rho}{G}\right)\frac{\partial^2\mathbf{U}(M,\ t)}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha_T \operatorname{grad}\left[T(M,\ t) - T_0\right]. \tag{6}$$

В первом случае соотношение (6) позволяет получить

$$\frac{\partial^2 U(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2 U(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \frac{\partial\left[T(z, t) - T_0\right]}{\partial z}. \tag{7}$$

Во втором случае из соотношения (6) следует, что

$$\frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2}U(r, t) - \frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T \frac{\partial\left[T(r, t) - T_0\right]}{\partial r}. \tag{8}$$

В третьем случае находим

$$\frac{\partial^2 U(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial U(\rho, t)}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2}U(\rho, t) - \frac{1}{\upsilon_p^2}\frac{\partial^2 U(\rho, t)}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{\partial \left[T(\rho, t) - T_0 \right]}{\partial \rho}. \tag{9}$$

Здесь $\upsilon_p = \sqrt{2(1-\nu)\rho / (1-2\nu)G}$ — скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Уравнения (6)—(9) — основные уравнения динамической термоупругости для рассматриваемых областей, для этих уравнений можно сформулировать многочисленные краевые задачи, чтобы описать динамическую термоупругую реакцию твердых тел на тепловой удар. Чтобы математически описать неупругое поведение тела при заданных условиях нагрева и напряжения, необходимо соответствующим образом обобщить соотношения между напряжениями и деформациями (3), (4). Эти обобщения ведутся по разным направлениям [6], хотя четко разграничить их не всегда возможно. Наиболее общие подходы к проблеме основываются на представлениях и методах физики твердого тела. Чтобы получить сведения о механических характеристиках материала, рассматривают его микроструктуру (кристаллическую, поликристаллическую, аморфную). Другой подход состоит в том, что, отвлекаясь от особенностей микроструктуры материала, тело полагают сплошным и находят форму соотношений между напряжениями и деформациями, исходя из общих принципов механики и термодинамики сплошных сред. Наконец, наиболее формальный способ анализа заключается в том, что выбирают некоторые простые формы соотношений между напряжениями и деформациями, описывающие различные типы неупругих явлений: ползучесть, релаксация напряжений, пластическое течение, упрочнение. Реологические модели, которые учитывают одновременно протекающие процессы упругого деформирования и вязкого течения, благодаря достаточной простоте принятых соотношений между напряжениями и деформациями дают возможность математически проанализировать поведение реальных тел в различных условиях нагружения. В этом отношении учет реологических эффектов имеет большое значение при проектировании элементов конструкций, подвергающихся воздействию высоких температур.

Для формулировки реологических законов, связывающих напряжения и деформации, введем девиаторы напряжений $S_{ij}(M,\ t)$ и деформаций $e_{ij}(M,\ t)$:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}, \tag{10}$$

где σ и ε — среднее нормальное напряжение и среднее удлинение:

$$\sigma(M,\ t)=\frac{1}{3}\sum_i \sigma_{ii}(M,\ t), \quad \varepsilon(M,\ t)=\frac{1}{3}\sum_i \varepsilon_{ii}(M,\ t). \tag{11}$$

С помощью этих девиаторов соотношения (3) и (4) можно записать в виде

$$S_{ij}=2Ge_{ij}, \tag{12}$$

$$\varepsilon=\frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}\sigma+\alpha_T\left(T-T_0\right). \tag{13}$$

Эти равенства описывают поведение линейно-упругой среды. Если к соотношениям закона Гука добавить слагаемое, выражающее ньютонов закон вязкости (последовательное или параллельное соединение пружины и вязкого сопротивления [5]), полученные зависимости между напряжениями и деформациями будут приводить к средам Максвелла

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial t}+\frac{S_{ij}}{\tau_{\text{р}}}=2G\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} \tag{14}$$

и Кельвина (или Фойхта)

$$S_{ij}=2G\left(e_{ij}+\tau_{\text{р}}\frac{\partial e_{ij}}{\partial t}\right). \tag{15}$$

При этом соотношение (13) остается без изменения. Это означает, что при гидростатическом сжатии или растяжении тело ведет себя как вполне упругое. Постоянную $\tau_{\text{р}}=\eta/G$ называют временем релаксации в выражении (14) и временем запаздывания — в (15), η — вязкость материала. Поведение материалов на практике сложнее случаев, описанных выражениями (14), (15), однако если основываться на применении простейших моделей, для металлов при высоких значениях температуры и для полимеров, сочетающих процессы упругого деформирования и вязкого течения, можно использовать схему Максвелла, а для материалов с внутренним трением при изучении затухающих колебаний — схему Кельвина.

Теперь для всех трех случаев (7)—(9) соотношения (1), (12)—(15) приводят к следующим новым обобщениям (6) в теории теплового удара для вязкоупругих сред в терминах динамической термовязкоупругости:

среда Максвелла

$$\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}\operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\mathbf{U}(M,\ t)\right]-\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\mathbf{U}(M,\ t)}{\partial t^2}=$$

$$= \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_T \operatorname{grad}\left[T(M,\ t) - T_0\right] +$$

$$+ \frac{2}{3\tau_{\text{р}}} \int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{р}}}\right] \operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\mathbf{U}(M,\ \tau)\right] d\tau; \qquad (16)$$

среда Кельвина

$$\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\mathbf{U}(M,\ t)\right] - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \mathbf{U}(M,\ t)}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_T \operatorname{grad}\left[T(M,\ t) - T_0\right] - \frac{2}{3}\tau_{\text{р}} \left\{\operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\mathbf{U}(M,\ t)\right]\right\}. \qquad (17)$$

При $\tau_{\text{р}} = \infty$ $(\eta = \infty)$ в (16) и $\tau_{\text{р}} = 0$ $(\eta = 0)$ в (17) получаем соотношение (6) для динамической термоупругости. Выражения (16), (17) можно записать в виде новых модельных представлений для случаев (7)—(9). При проведении численных экспериментов для многочисленных условий теплового нагрева (или охлаждения), связанных с предварительным нахождением соответствующих температурных функций $T(M,\ t)$ в терминах краевых задач, описанных в [3, 7], уравнения (16), (17) допускают преобразования Лапласа, что позволяет в пространстве изображений перейти к линейным краевым задачам для перемещений с краевыми условиями, вытекающими из отсутствия напряжений на границе поверхности S области D (при тепловом ударе) и в начальный момент времени и далее применить к полученным математическим моделям известные методы математической физики и операционного исчисления. По найденным перемещениям из уравнений (2), (3) можно выписать все (ненулевые) компоненты тензоров напряжений и деформаций, что позволяет воспроизвести полную картину динамической реакции вязкоупругих тел на тепловой удар.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Э. М., Бартенев Г. М. // Итоги науки и техники. Химия и технология высокомолекулярных соединений. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 25. С. 3–88.
2. Карташов Э. М., Партон В. З. // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 22. С. 55–127.
3. Карташов Э. М., Кудинов В. А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Изд-во URSS, 2012.
4. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002.

5. П а р к у с Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Изд-во Физматлит, 1963.

6. Б о л и Б., У э й н е р Д ж . Теория температурных напряжений : Пер. с англ. М.: Мир, 1964.

7. К а р т а ш о в Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.