

## Оптимальное управление движением жидкости со свободной поверхностью

© А. А. Гурченков<sup>1</sup>, А. М. Романенков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 105005, Россия.

<sup>2</sup> МАТИ РГТУ им. К.Э. Циолковского Москва 109387, Россия.

*Проведен анализ слабозмущенного движения твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость со свободной поверхностью в ограниченном трехмерном пространстве. В предположении, что свободная поверхность жидкости мало отклоняется от равновесной, граничные условия снесены на равновесную поверхность. Решение задачи представлено в виде обобщенного ряда Фурье, коэффициентами которого являются неизвестные функции времени. Для определения этих коэффициентов сформулирована задача Коши, которая решена методом последовательных приближений. Поставлена задача оптимального управления с терминальным функционалом. С использованием формализма Гамильтона — Понтрягина получено численное решение задачи с интегральными ограничениями на управление типа неравенств. Представлены численные тесты, рассмотрен ряд примеров.*

**Ключевые слова:** оптимальное управление, идеальная несжимаемая жидкость, принцип максимума, симметричные и асимметричные колебания.

Найдем потенциал  $\varphi(x, y, z, t)$  поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью  $f(x, y, t)$  в ограниченном трехмерном пространстве, удовлетворяющий уравнению Лапласа в области  $\omega: \{(x, y, z): 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq z \leq f(x, y, t)\}$ , с граничными условиями Неймана на границах области и двумя нелинейными условиями на свободной поверхности [1]. Отметим, что область, в которой справедливо уравнение Лапласа, не является стационарной (решение не существует) [2].

Предположим, что колебания жидкости слабо возмущенные и свободная поверхность мало отклоняется от равновесной, т. е. граничное условие можно перенести со свободной поверхности на равновесную ( $z = 1$ ) [3]. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0; \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=1} = 0; \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} &= \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=1} = 0; \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

На свободной поверхности выполняются два нелинейных условия: чисто кинематическое

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (2)$$

отражающее тот факт, что частица жидкости, попав на свободную поверхность, навсегда остается на ней, и динамическое

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + g(f - 1) = 0, \quad (3)$$

являющиеся следствием уравнения движения Эйлера.

Применив метод Фурье, можно представить потенциал поля скоростей двойным рядом Фурье:

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_{nk}(t) \operatorname{ch}(\pi \sqrt{n^2 + k^2} z) \cos \pi n x \cos \pi k y. \quad (4)$$

Функцию, выражающую форму свободной поверхности, также разложим в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x, y, t) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q_{nk}(t) \cos \pi n x \cos \pi k y. \quad (5)$$

Будем воздействовать на сосуд с колеблющейся жидкостью, ограниченной переменной силой, которую назовем управлением [5–7]:

$$\vec{u}(t) = \{u_x(t), u_y(t), u_z(t)\},$$

где  $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$  — компоненты силы по соответствующим осям координат, причем  $u_{\min} \leq u_x(t), u_y(t), u_z(t) \leq u_{\max}$ .

Введенное воздействие приведет к изменению уравнения (3):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{g^2}{2} + \Phi' = 0,$$

где  $\Phi' = \Phi'(t) = \langle (0, 0, g) + \vec{u}(t), \vec{s}(t) \rangle$  — потенциальная энергия;  $\vec{s}(t) = \{x, y, f(x, y, t) - 1\}$ ;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — стандартное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$  [4].

Окончательно получим динамическое условие с учетом воздействия:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} g^2 + u_x(t)x + u_y(t)y + (g + u_z(t))(f - 1) = 0, \quad (6)$$

где для краткости принять

$$g^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2.$$

Будем рассматривать задачу (1), (2), (6). Очевидно, что изменяя  $u_x(t)$ ,  $u_y(t)$ ,  $u_z(t)$ , получаем различные решения задачи. По теореме о непрерывной зависимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных условий и правой части решение непрерывно зависит от  $\bar{u}(t)$ .

Введем функционал, характеризующий интенсивность колебаний [8, 9]:

$$J(\bar{u}(t)) = \sum_{n^2+k^2 \geq 1}^{\infty} \{P_{nk}^2[t, \bar{u}(t)] + q_{nk}^2[t, \bar{u}(t)]\}. \quad (7)$$

Необходимо подобрать  $\bar{u}(t)$  таким образом, чтобы функционал (6) был минимальным в момент времени  $T$ , т. е.

$$J(T) = J[\bar{u}(T)] \rightarrow \min.$$

**Утверждение 1.** Управления не входят в кинематическое условие (2) (оно остается неизменным), а входят линейно в уравнения для определения коэффициентов потенциала поля скоростей.

*Доказательство.* Первая часть утверждения очевидна. Докажем вторую часть утверждения.

Подставим в условие (6) выражения для потенциала поля скоростей и формы свободной поверхности и выполним стандартные действия для получения уравнения для  $P'_{nk}(t)$ : умножим на  $\cos \pi n x \cos \pi k y$  и проинтегрируем по квадрату  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Обозначим множество интегрирования как  $I^2 \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1] \times [0, 1]$  и вычислим интеграл, в который входит управление:

$$\begin{aligned} & \iint_{I^2} \{u_x(t)x + u_y(t)y + [g + u_z(t)](f - 1)\} \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy = \\ & = \iint_{I^2} u_x(t)x \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy + \\ & + \iint_{I^2} u_y(t)y \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy + \\ & + \iint_{I^2} [g + u_z(t)](f - 1) \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy. \end{aligned}$$

Найдем третий интеграл:

$$\begin{aligned} & \iint_{I^2} [g + u_z(t)](f-1) \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy = \\ & = [g + u_z(t)] \iint_{I^2} \left[ \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} q_{n'k'}(t) \cos \pi n' x \cos \pi k' y \right] \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy = \\ & = [g + u_z(t)] \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} q_{n'k'}(t) \iint_{I^2} \cos \pi n' x \cos \pi k' y \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy. \end{aligned}$$

Двойной интеграл равен некоторой константе  $C(n, k)$ , которая зависит от  $n$  и  $k$ , т. е.

$$\iint_{I^2} [g + u_z(t)](f-1) \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy = [g + u_z(t)] q_{nk}(t) C(n, k).$$

Теперь вычислим первый интеграл:

$$\iint_{I^2} u_x(t) x \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy = u_x(t) \int_0^1 \cos \pi k y \, dy \int_0^1 x \cos \pi n x \, dx.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cos \pi k y \, dy = \begin{cases} 0, & k \neq 0; \\ 1, & k = 0; \end{cases} \\ & \int_0^1 x \cos \pi n x \, dx = \frac{1}{\pi n} \int_0^1 x \, d \sin \pi n x = \frac{1}{\pi n} \left( x \sin \pi n x \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin \pi n x \, dx \right) = \\ & = \frac{1}{(\pi n)^2} \cos \pi n x \Big|_0^1 = \frac{\cos \pi n - 1}{(\pi n)^2} = \\ & = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ -\frac{2}{(\pi n)^2}, & n = 2k - 1; \\ \frac{1}{2}, & n = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $k \in \mathbb{N}$ .

Второй интеграл вычисляется аналогично. Окончательно имеем

$$\iint_{I^2} \{u_x(t)x + u_y(t)y + [g + u_z(t)](f - 1)\} \cos \pi n x \cos \pi k y \, dx dy =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2u_y(t)}{\pi^2 k^2} + [g + u_z(t)]q_{0k}(t)C(0, k), & n = 0, k \neq 0(\text{mod } 2); \\ -\frac{2u_x(t)}{\pi^2 n^2} + [g + u_z(t)]q_{n0}(t)C(n, 0), & n \neq 0(\text{mod } 2), k = 0; \\ [g + u_z(t)]q_{nk}(t)C(n, k), & (nk \neq 0) \text{ или } (n = 0, k \equiv 0(\text{mod } 2)) \text{ или } k = 0, n \equiv 0(\text{mod } 2). \end{cases} \quad (8)$$

**Утверждение 2.** Симметричные колебания невозможно погасить, применяя лишь воздействия по осям  $x$  и  $y$ .

*Доказательство.* Управления  $u_x(t)$  и  $u_y(t)$  входят лишь в уравнения для определения коэффициентов потенциала поля скоростей с нечетными индексами, а в уравнения с четными индексами входит только управление  $u_z(t)$  (см. формулу (8)). Из формул (4) и (5) следует, что коэффициенты с нечетными индексами представляют собой амплитуды асимметричных возмущений свободной поверхности и потенциала скоростей, т. е. утверждение очевидно.

**Утверждение 3.** Ассиметричные колебания можно погасить, используя все компоненты вектора управлений.

Получим систему дифференциальных уравнений, ограничившись лишь несколькими членами ряда:

$$q'_{01} = \pi \text{sh} \pi P_{01} - \frac{\pi^2}{2} q_{10} P_{11} \text{ch} \sqrt{2} \pi - \frac{\pi^2}{2} q_{11} P_{10} \text{ch} \pi -$$

$$- \pi^2 q_{01} P_{02} \text{ch} 2\pi - \pi^2 q_{02} P_{01} \text{ch} \pi;$$

$$q'_{10} = \pi \text{sh} \pi P_{10} - \pi^2 q_{10} P_{20} \text{ch} 2\pi - \pi^2 q_{20} P_{10} \text{ch} \pi -$$

$$- \frac{\pi^2}{2} q_{01} P_{11} \text{ch} \sqrt{2} \pi - \frac{\pi^2}{2} q_{11} P_{01} \text{ch} \pi; \quad (9)$$

$$q'_{11} = \pi \sqrt{2} \text{sh} \sqrt{2} \pi P_{11} - \pi^2 q_{11} P_{20} \text{ch} 2\pi - \pi^2 q_{20} P_{11} \text{ch} \sqrt{2} \pi -$$

$$- \pi^2 q_{11} P_{02} \text{ch} 2\pi - \pi^2 q_{02} P_{11} \text{ch} \sqrt{2} \pi;$$

$$q'_{02} = 2\pi \text{sh} 2\pi P_{02} + \frac{\pi^2}{2} q_{01} P_{01} \text{ch} \pi;$$

$$\begin{aligned}
 q'_{20} &= 2\pi \operatorname{sh} 2\pi P_{20} + \frac{\pi^2}{2} q_{10} P_{10} \operatorname{ch} \pi; \\
 P'_{01} &= -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch} \pi} q_{01} - \frac{\pi^2}{\operatorname{ch} \pi} (P_{10} P_{11} C_1 + P_{01} P_{02} \operatorname{ch} 3\pi) - \frac{2}{\pi^2} u_y; \\
 P'_{10} &= -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch} \pi} q_{10} - \frac{\pi^2}{\operatorname{ch} \pi} (P_{10} P_{20} \operatorname{ch} 3\pi + P_{01} P_{11} C_1) - \frac{2}{\pi^2} u_x; \\
 P'_{11} &= -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch} \sqrt{2}\pi} q_{11} - \frac{\pi^2}{\operatorname{ch} \sqrt{2}\pi} (P_{01} P_{10} \operatorname{sh}^2 \pi + 2P_{11} P_{20} C_2); \\
 P'_{02} &= -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch} 2\pi} q_{02} - \frac{\pi^2}{4\operatorname{ch} 2\pi} (P_{11}^2 \operatorname{sh}^2 \pi \sqrt{2} - P_{01}^2); \\
 P'_{20} &= -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch} 2\pi} q_{20} - \frac{\pi^2}{4\operatorname{ch} 2\pi} (P_{11}^2 \operatorname{sh}^2 \pi \sqrt{2} - P_{10}^2).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения (9) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью. Перейдем к модельной системе, т. е. все коэффициенты перед функциями примем равными 1. На примере данной системы сформулируем общие утверждения, справедливые для систем, которые получаются при привлечении большего числа членов ряда Фурье для функций  $\varphi$  и  $f$ .

Отметим, что важен лишь факт возникновения того или иного колебания и не важна его амплитуда (все коэффициенты равны 1).

**Утверждение 4.** Если изначально возбуждены асимметричные колебания, то с течением времени будут возбуждены и симметричные колебания. Более того, если в начальный момент времени возмущена любая асимметричная гармоника, то с течением времени будут возмущены другие асимметричные, а также симметричные гармоники.

**Утверждение 5.** Если изначально возбуждены только симметричные гармоники, то асимметричные гармоники не будут возбуждены и если в начальный момент времени возбуждена любая симметричная гармоника, то с течением времени все остальные симметричные гармоники будут возбуждены, а асимметричные гармоники возбуждены не будут.

Сформулируем задачу оптимального управления. Пусть определен функционал

$$\begin{aligned}
 J[\bar{u}(T)] &= P_{01}^2 [T, \bar{u}(T)] + P_{10}^2 [T, \bar{u}(T)] + P_{11}^2 [T, \bar{u}(T)] + \\
 &+ P_{02}^2 [T, \bar{u}(T)] + P_{20}^2 [T, \bar{u}(T)] + q_{01}^2 [T, \bar{u}(T)] + q_{10}^2 [T, \bar{u}(T)] + \\
 &+ q_{11}^2 [T, \bar{u}(T)] + q_{02}^2 [T, \bar{u}(T)] + q_{20}^2 [T, \bar{u}(T)].
 \end{aligned}$$

Необходимо найти вектор-функцию  $\bar{u}_{\text{opt}}(t)$ , при которой

$$J(\bar{u}_{\text{opt}}(T)) = \min_{\bar{u}(T)} J[\bar{u}(T)],$$

где  $\bar{u}(T) = \{u_x(T), u_y(T), u_z(T)\} : u_x(t), u_y(t), u_z(t) \in L^2([0; T]); u_{\min} \leq u_x(t), u_y(t), u_z(t) \leq u_{\max}$ , удовлетворяющую системе дифференциальных уравнений (9) и начальным условиям Коши

$$\begin{pmatrix} q_{01}(0) \\ q_{10}(0) \\ q_{11}(0) \\ \vdots \\ P_{10}(0) \\ \vdots \\ P_{20}(0) \end{pmatrix} = \bar{F},$$

где  $\bar{F} \in \mathbb{R}^{10}$ .

Данная задача является задачей оптимального управления со свободным концом и с фиксированным временем [4]. Ее решение будем искать, основываясь на принципе максимума Понтрягина [10, 11].

Составим, согласно этому принципу, функцию Гамильтона для нашей задачи:

$$\begin{aligned} H((P, q), \psi, u(t)) = & \\ = & \left( \pi \operatorname{sh} \pi P_{01} - \frac{\pi^2}{2} q_{10} P_{11} \operatorname{ch} \sqrt{2} \pi - \frac{\pi^2}{2} q_{11} P_{10} \operatorname{ch} \pi - \right. \\ & \left. - \pi^2 q_{01} P_{02} \operatorname{ch} 2\pi - \pi^2 q_{02} P_{01} \operatorname{ch} \pi \right) \psi_1 + \\ & + \left( \pi \operatorname{sh} \pi P_{10} - \pi^2 q_{10} P_{20} \operatorname{ch} 2\pi - \pi^2 q_{20} P_{10} \operatorname{ch} \pi - \right. \\ & \left. - \frac{\pi^2}{2} q_{01} P_{11} \operatorname{ch} \sqrt{2} \pi - \frac{\pi^2}{2} q_{11} P_{01} \operatorname{ch} \pi \right) \psi_2 + \\ & + \left( \pi \sqrt{2} \operatorname{sh} \sqrt{2} \pi P_{11} - \pi^2 q_{11} P_{20} \operatorname{ch} 2\pi - \pi^2 q_{20} P_{11} \operatorname{ch} \sqrt{2} \pi - \right. \\ & \left. - \pi^2 q_{11} P_{02} \operatorname{ch} 2\pi - \pi^2 q_{02} P_{11} \operatorname{ch} \sqrt{2} \pi \right) \psi_3 + \\ & + \left( 2\pi \operatorname{sh} 2\pi P_{02} + \frac{\pi^2}{2} q_{01} P_{01} \operatorname{ch} \pi \right) \psi_4 + \left( 2\pi \operatorname{sh} 2\pi P_{20} + \frac{\pi^2}{2} q_{10} P_{10} \operatorname{ch} \pi \right) \psi_5 + \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch}\pi} q_{01} - \frac{\pi^2}{\operatorname{ch}\pi} \left( \frac{1}{2} P_{10} P_{11} C_1 + P_{01} P_{02} \operatorname{ch} 3\pi \right) - \frac{2}{\pi^2} u_y \right] \psi_6 + \\
 & + \left[ -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch}\pi} q_{10} - \frac{\pi^2}{\operatorname{ch}\pi} \left( P_{10} P_{20} \operatorname{ch} 3\pi + \frac{1}{2} P_{01} P_{11} C_1 \right) - \frac{2}{\pi^2} u_x \right] \psi_7 + \\
 & + \left( -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch}\sqrt{2}\pi} q_{11} - \frac{\pi^2}{\operatorname{ch}\sqrt{2}\pi} \left( P_{01} P_{10} \operatorname{sh}^2 \pi + 2 P_{11} P_{20} C_2 \right) \right) \psi_8 + \quad (10) \\
 & + \left( -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch} 2\pi} q_{02} - \frac{\pi^2}{4 \operatorname{ch} 2\pi} \left( P_{11}^2 \operatorname{sh}^2 \pi \sqrt{2} - P_{01}^2 \right) \right) \psi_9 + \\
 & + \left( -\frac{g+u_z}{\operatorname{ch} 2\pi} q_{20} - \frac{\pi^2}{4 \operatorname{ch} 2\pi} \left( P_{11}^2 \operatorname{sh}^2 \pi \sqrt{2} - P_{10}^2 \right) \right) \psi_{10},
 \end{aligned}$$

где  $\psi_i = \overline{\psi_i(t)}$ ,  $(i = \overline{1 \dots 10})$  — сопряженные функции.

Для определения оптимального управления необходимо решить сопряженную систему. Для нашей задачи она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \psi'_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_{01}} = \pi^2 P_{02} \operatorname{ch} 2\pi \psi_1 + \\
 & + \frac{\pi^2}{2} P_{11} \operatorname{ch} \sqrt{2}\pi \psi_2 - \frac{\pi^2}{2} P_{01} \operatorname{ch} \pi \psi_4 + \frac{g+u_z}{\operatorname{ch}\pi} \psi_6; \\
 \psi'_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_{10}} = \pi^2 P_{20} \operatorname{ch} 2\pi \psi_2 + \\
 & + \frac{\pi^2}{2} P_{11} \operatorname{ch} \sqrt{2}\pi \psi_1 - \frac{\pi^2}{2} P_{10} \operatorname{ch} \pi \psi_5 + \frac{g+u_z}{\operatorname{ch}\pi} \psi_7; \quad (11) \\
 \psi'_3 &= -\frac{\partial H}{\partial q_{11}} = \frac{\pi^2 \operatorname{ch}\pi}{2} (P_{10} \psi_1 + P_{01} \psi_2) + \\
 & + \pi^2 (P_{20} + P_{02}) \operatorname{ch} 2\pi \psi_2 + \frac{g+u_z}{\operatorname{ch}\pi \sqrt{2}} \psi_8; \\
 \psi'_4 &= -\frac{\partial H}{\partial q_{02}} = \pi^2 (P_{01} \operatorname{ch} \pi \psi_1 + P_{11} \operatorname{ch} \sqrt{2}\pi \psi_3) + \frac{g+u_z}{\operatorname{ch} 2\pi} \psi_9; \\
 \psi'_5 &= -\frac{\partial H}{\partial q_{20}} = \pi^2 (P_{10} \operatorname{ch} \pi \psi_2 + P_{11} \operatorname{ch} \sqrt{2}\pi \psi_3) + \frac{g+u_z}{\operatorname{ch} 2\pi} \psi_{10};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'_6 = -\frac{\partial H}{\partial P_{01}} = & -(\pi \operatorname{sh} \pi - \pi^2 q_{02} \operatorname{ch} \pi) \psi_1 + \\ & + \frac{\pi^2}{2} q_{11} \operatorname{ch} \pi \psi_2 - \frac{\pi^2}{2} q_{01} \operatorname{ch} \pi \psi_4 - \\ & - P_{02} \operatorname{ch} 3\pi \psi_6 - \frac{\pi^2}{2} P_{11} \psi_7 C_1 + \frac{\pi^2}{\operatorname{ch} \pi \sqrt{2}} \left( P_{10} \psi_8 \operatorname{sh}^2 \pi - \frac{1}{2} P_{01} \psi_9 \right); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \psi'_7 = -\frac{\partial H}{\partial P_{10}} = & -(\pi \operatorname{sh} \pi - \pi^2 q_{02} \operatorname{ch} \pi) \psi_2 + \\ & + \frac{\pi^2}{2} q_{11} \operatorname{ch} \pi \psi_1 - \frac{\pi^2}{2} q_{10} \operatorname{ch} \pi \psi_5 - \\ & - \pi^2 P_{20} \frac{\operatorname{ch} 3\pi}{\operatorname{ch} \pi} \psi_7 - \frac{\pi^2}{2 \operatorname{ch} \pi} P_{11} \psi_6 C_1 + \frac{\pi^2}{\operatorname{ch} \pi \sqrt{2}} \left( P_{01} \psi_8 \operatorname{sh}^2 \pi - \frac{1}{2} P_{10} \psi_{10} \right); \end{aligned}$$

.....

Начальными данными для системы (11) является следующий вектор:

$$\psi(T) = \begin{pmatrix} -2q_{01}(T) \\ -2q_{10}(T) \\ -2q_{11}(T) \\ \vdots \\ -2P_{01}(T) \\ -2P_{10}(T) \\ -2P_{11}(T) \\ \vdots \\ -2P_{20}(T) \end{pmatrix},$$

где  $\psi(T)$  – вектор из  $\mathbb{R}^{10}$ .

Чтобы определить начальные данные для системы (11), необходимо решить систему (9). Решение этой системы найдем методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Назовем этот процесс прямым проходом. При этом необходимо хранить данные со всех слоев, так как на их основе будет строиться оптимальное управление. Для решения системы (11) также используем метод Рунге — Кутты, но при этом знак шага изменим на минус. Этот процесс назовем обратным

проходом. При обратном проходе необходимо выбирать новое управление. На каждой итерации управление следует выбирать так, чтобы функция Гамильтона была максимальной по управлению, т. е.

$$\begin{aligned} \max_{\vec{u}(t)} H = & - \min_{u_{\min} \leq u_x, u_y, u_z \leq u_{\max}} \left[ \frac{2}{\pi^2} (\psi_7 u_x + \psi_6 u_y) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\psi_6 q_{01} + \psi_7 q_{10}}{\operatorname{ch} \pi} + \frac{\psi_8 q_{11}}{\operatorname{ch} \pi \sqrt{2}} + \frac{\psi_9 q_{02} + \psi_{10} q_{20}}{\operatorname{ch} 2\pi} \right) u_z + D \right], \end{aligned}$$

где  $D$  — слагаемые функции Гамильтона, которые не зависят от управлений.

В силу того, что управления линейно входят в функцию Гамильтона (9), поиск оптимального управления достаточно прост:

$$\vec{u} = \begin{cases} \tilde{u}_x = \begin{cases} u_{\min}, & \text{если } \psi_7 > 0; \\ u_{\max}, & \text{если } \psi_7 \leq 0; \end{cases} \\ \tilde{u}_y = \begin{cases} u_{\min}, & \text{если } \psi_6 > 0; \\ u_{\max}, & \text{если } \psi_6 \leq 0; \end{cases} \\ \tilde{u}_z = \begin{cases} u_{\min}, & \text{если } \left( \frac{\psi_6 q_{01} + \psi_7 q_{10}}{\operatorname{ch} \pi} + \frac{\psi_8 q_{11}}{\operatorname{ch} \pi \sqrt{2}} + \frac{\psi_9 q_{02} + \psi_{10} q_{20}}{\operatorname{ch} 2\pi} \right) > 0; \\ u_{\max}, & \text{если } \left( \frac{\psi_6 q_{01} + \psi_7 q_{10}}{\operatorname{ch} \pi} + \frac{\psi_8 q_{11}}{\operatorname{ch} \pi \sqrt{2}} + \frac{\psi_9 q_{02} + \psi_{10} q_{20}}{\operatorname{ch} 2\pi} \right) \leq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

Ниже приведены численные тесты и результаты вычислений для различных возмущений. На рис. 1 рассмотрены симметричные возмущения. В начальный момент времени  $q_{02} \neq 0$ . Численный эксперимент показывает, что асимметричные гармоники не возбуждаются.

На рис. 2 представлено оптимальное управление в виде кусочно-постоянной функции. Отметим, что для гашения симметричных колебаний используется только сила, направленная вдоль вертикальной оси.

На рис. 3 показана асимметричная гармоника  $q_{01} \neq 0$ . Видно, что возникают и симметричные возмущения ( $q_{02} \neq 0$ ).

Асимметричные колебания невозможно погасить, действуя только вертикальной силой (рис. 4). Вектор управления содержит все компоненты.

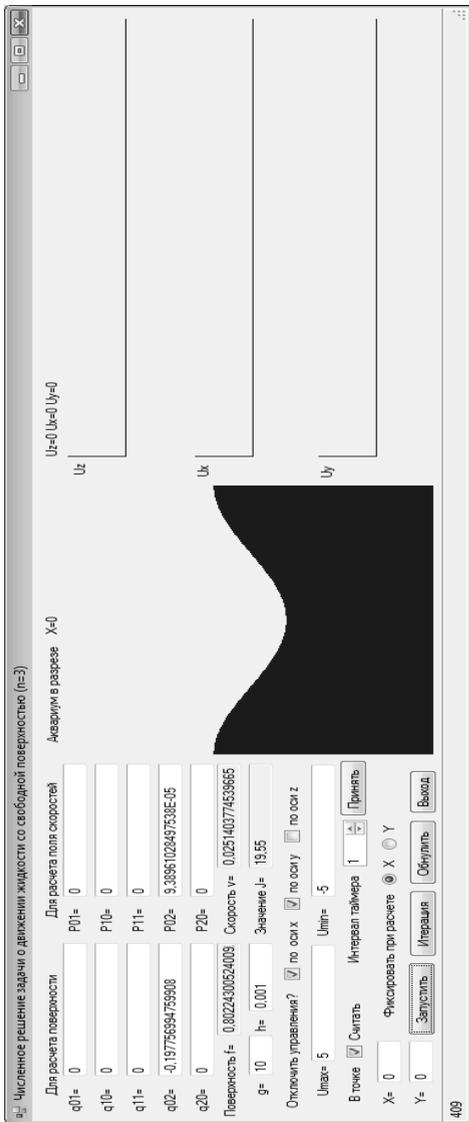


Рис. 1

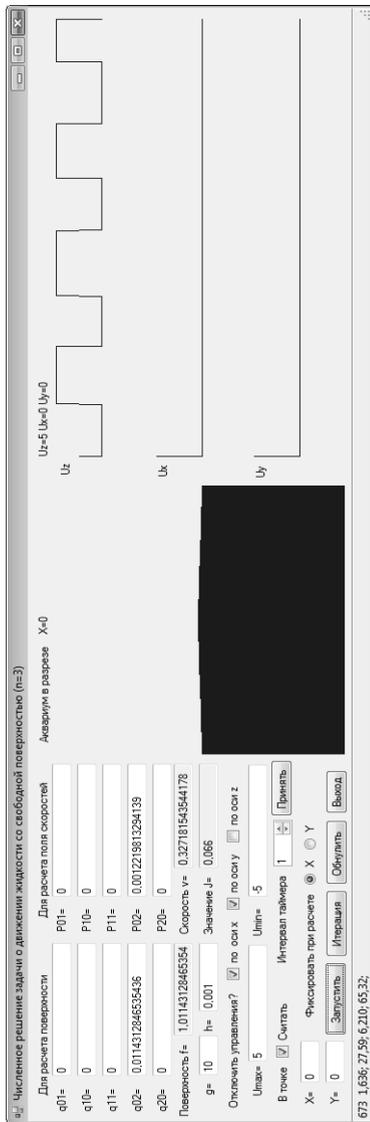


Рис. 2

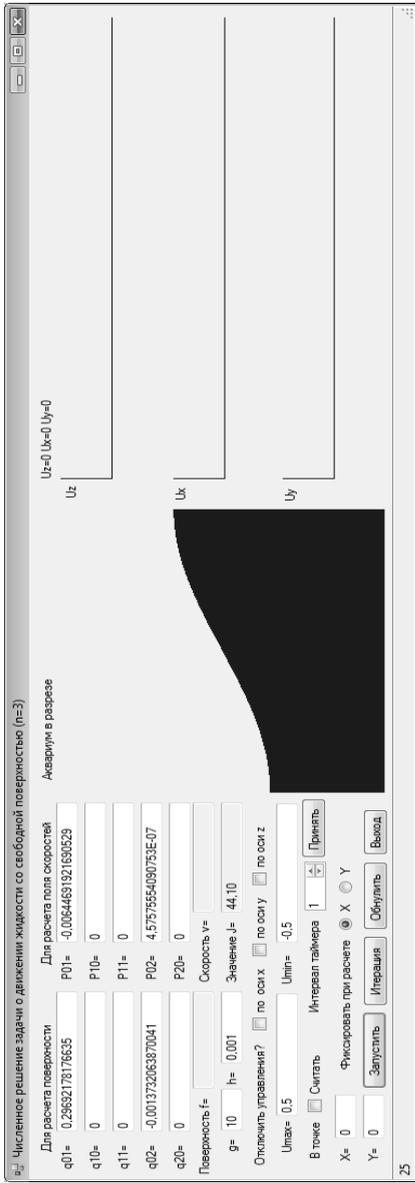


Рис. 3

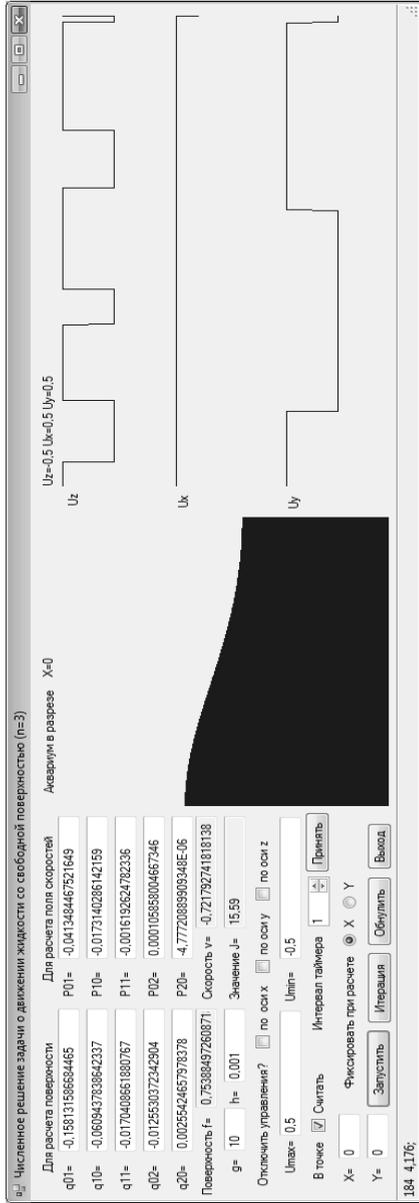


Рис. 4

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. *ПММ*, 1966, т. 30, вып. 6, с. 476–494.
2. Красовский Н.Н. *Теория управления движением*. Москва, Наука, 1968, 434 с.
3. Гурченков А.А. *Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела*. Москва, Физматлит, 2012, с. 221 с.
4. Крейн С.Г., Моисеев Н. Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. *ПММ*, 1957, т. 21, вып. 2, с. 97–114.
5. Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. *Изв. РАН ТСУ*, 2006, № 3, с. 82–89.
6. Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей вязкую жидкость. *Автоматика и телемеханика*. 2007, № 2, с. 81–94.
7. Дьяченко В.П. О колебаниях гироскопа, частично заполненного жидкостью. *ДАН УССР*. Сер. А, 1971, № 10, с. 56–64.
8. Гурченков А.А., Носов М.В., Иванов И.М. Оптимальное управление движением волчка с жидким наполнением. *Тез. докл. XVII Всероссийской конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики»*. Абрау-Дюрсо. 15–21 сентября 2008 г. Новосибирск, НИИ гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, СО РАН, 2008, с. 143–144.
9. Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. *Изв. РАН ТСУ*, 2006, № 1, с. 135–142.
10. Гурченков А. А., Носов М. В., Цурков В. И. *Управление вращающимися твердыми телами с жидкостью*. Москва, Физматлит, 2011, 202 с.
11. Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. *Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies*. CRC Press, 2013, 147 p.

Статья поступила в редакцию 21.02.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

А.А. Гурченков, А.М. Романенков. Оптимальное управление движением жидкости со свободной поверхностью. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/613.html>

**Гурченков Анатолий Андреевич** — профессор кафедры «Высшая математика», д-р. физ.-мат. наук; автор более 100 научных работ, 10 из которых — монографии; сфера научных интересов: управление вращательными твердыми телами с низким наполнением, устойчивость динамических систем с жидкостью. e-mail: challenge2005@mail.ru

**Романенков Александр Михайлович** — ассистент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии»; сфера научных интересов: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, оптимальное управление, управление нестационарными процессами. e-mail: romanaleks@gmail.ru