

## Обзор и анализ исследований тепломассообмена в стратифицированной морской воде в условиях термической конвекции

© Д.А. Крылов<sup>1</sup>, Н.И. Сидняев<sup>1</sup>, Ю.С. Ильина<sup>1</sup>,  
А.А. Федотов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 105005, Россия.

*Представлены результаты исследований, связанных с изучением изменения плотности воды при низких температурах. Рассмотрен тепломассоперенос в условиях термической конвекции под действием выталкивающей силы при отсутствии градиентов концентрации. Выявлены причины возникновения изменения направления выталкивающей силы, определены двумерные профили скорости и обнаружена инверсия конвекции, обусловленная экстремумом плотности. Получена зависимость плотности воды от температуры и начальные оценки ряда характерных величин. Определены уровень скоростей нижнего предела коэффициентов переноса, граница между режимами процесса, начальная геометрическая конфигурация различных течений. Отмечено, что в однофазной жидкости в связи с быстрым изменением плотности в вертикальном направлении возникают волноподобные движения, например в термоклинях, находящихся в объеме жидкости. Показано, что условия, наложенные на температуру погруженной в покоящуюся окружающую среду поверхности и саму среду, отличаются настолько, что в области диффузионной теплопередачи вязкость и теплопроводность жидкости заметно изменяются.*

**Ключевые слова:** тепломассообмен, термическая конвекция, стратификация вод, выталкивающая сила, плотность, турбулентное течение.

**Введение.** Свободноконвективные течения возникают как в однофазной, так и в многофазных средах. Существует много различных объемных сил, вызывающих течение при наличии разности плотностей, например сила тяжести. Разности плотностей образуются вследствие различия фазовых состояний, переноса теплоты и (или) диффузии одного или нескольких различных веществ. Течение может быть также до некоторой степени фиксированным в пространстве благодаря наличию устойчивой поверхности раздела фаз, например, когда оно происходит по обе стороны горизонтальной поверхности раздела между воздухом и водой. При произвольно возникающем течении его пространственные характеристики могут быть заранее неизвестными. Такое движение возникает в объеме жидкости при неустойчивой стратификации плотности в гравитационном поле, например в емкости с

водой, нагреваемой снизу. В этом случае нельзя заранее подробно указать предполагаемую картину течения. Существует также много течений, возникающих в результате сочетания этих и других эффектов. В общем случае течения, вызванные выталкивающей силой, сильно различаются и по своим физическим размерам.

Крупномасштабные течения рассматривают как турбулентные. При изучении течений промежуточных масштабов возникают важные вопросы о том, когда и как ламинарное течение становится неустойчивым и превращается в турбулентное. Очевидно, что при исследовании течений, вызванных выталкивающей силой, ламинарный перенос изучен намного лучше остальных. Результаты, полученные для ламинарного течения, дают начальную оценку ряда характерных величин: уровня скоростей, нижнего предела коэффициентов переноса, границ между различными режимами процесса, а также определяют начальную геометрическую конфигурацию различных течений.

Таким образом, течения, вызванные выталкивающей силой, чрезвычайно разнообразны по своим механизмам, физическим размерам и формам. Некоторые возможные сочетания этих факторов хорошо изучены, причем среди них есть даже такие, которые имеют важное теоретическое и практическое значение. В работах [1–5] рассмотрены ламинарные процессы в однофазной жидкости, обусловленные взаимодействием силы тяжести с теплопереносом, воздействующим на плотность. Достаточно простым способом можно учесть влияние на плотность среды диффузии морской воды при малых концентрациях. Для большинства процессов диффузии в соленой воде абсолютный уровень концентрации диффундирующих компонентов обычно очень мал. Так, соленость океана составляет ~3,5 %.

Настоящая статья посвящена изучению ламинарного течения, возникающего в результате взаимодействия однородного гравитационного поля с явлениями, определяющими влияние теплопереноса на уровень плотности однофазной жидкости. На основе простых допущений рассмотрен ряд общих крупномасштабных процессов с развитой турбулентностью: течения в вертикальных конвективных потоках, возникающие в результате сосредоточенного стационарного подвода энергии, и течения в невосходящих и восходящих потоках, образующиеся при стационарном воздействии импульса и выталкивающей силы. Аналитическое исследование позволяет рассмотреть также восходящее течение, возникающее в результате единичного воздействия выталкивающей силы. В прикладных задачах условия, наложенные, например, на температуру поверхности погруженного в покоящуюся среду тела и саму среду, отличаются настолько, что в области диффузионной теплопередачи вязкость и теплопроводность жидкости заметно изменяются. Поэтому важным остается учет этих эффектов, а также эффектов, возникающих вследствие стратифика-

ции плотности в окружающей среде при изменении температуры в вертикальном направлении. Отметим, что стратификация оказывает существенное влияние на перенос.

Во многих простых геометрических конфигурациях учитывают влияние скорости окружающей среды. Рассматривают также влияние выталкивающих сил, вызванных градиентами температуры в мощных вынужденных течениях, на обтекание погруженной в окружающую среду поверхности. Такая ситуация возникает, например, в вынужденных внутренних потоках жидкости с градиентами температуры при ее течении в трубе. Эти процессы, называемые обычно смешанной конвекцией, представляют собой взаимодействие вынужденного течения с течением, вызванным выталкивающей силой.

Необходимо отметить, что максимальная плотность чистой воды при давлении 0,1 МПа достигается при температуре около 4 °С и продолжает сохраняться при больших давлениях и уровнях солёности. Если поле температур в холодной воде охватывает условия, отвечающие максимуму плотности, возникает обратная выталкивающая сила. В случаях, когда обратная сила достаточно велика, образуются локальные течения, оказывающие большое влияние на перенос. При некоторых условиях происходит полное изменение направления результирующего течения, т. е. инверсия конвекции. Эти сложные процессы можно наблюдать при замерзании воды и таянии льда как в чистой, так и в солёной воде. Например, горизонтальный слой жидкости, имеющий большую протяженность, может быть неустойчиво стратифицирован, т. е. плотность жидкости увеличивается в вертикальном направлении снизу вверх, как и в емкости с водой, нагреваемой снизу. Тяжелая жидкость будет расположена над более легкой. Любое местное возмущение может привести к тому, что тяжелая жидкость начнет опускаться, заставляя легкую жидкость в каком-то другом месте подниматься. Вязкость будет препятствовать этому движению. Образующуюся при этом неустойчивость называют термической неустойчивостью. Неустойчивая стратификация может существовать в замкнутых объемах воздуха, солнечных коллекторах, термосифонах, емкостях для хранения жидкостей, технологическом оборудовании, атмосфере, водных бассейнах. Наиболее важными условиями ее возникновения являются толщина слоев жидкости или газа, вязкость и другие параметры, при которых слои становятся неустойчивыми к всегда существующим возмущениям.

Следующий интересный вид движения, вызванный выталкивающей силой, — течение, которое возникает при теплопереносе сквозь пористое твердое тело, насыщенное жидкостью, например сквозь грунт или мокрый песок. Разность температур способствует образованию выталкивающей силы и приводит к циркуляции жидкости сквозь грунтовые среды. Такие течения возникают также при таянии льда в воде, геотермических отложениях воды в пористой горной по-

роде и при циркуляции воздуха в сезонных охлаждающих установках [6]. Скорости, обусловленные выталкивающей силой, как правило, очень малы в связи с большим влиянием вязкости на течение в узких проточных каналах. Это позволяет сильно упростить аналитическое исследование переноса при описании реального физического механизма для ряда геометрических конфигураций [7–12]. К выполненным позднее обзорам и исследованиям отдельных задач относятся работы [8, 9, 11, 13–14].

### **Физические принципы возникновения выталкивающей силы.**

Рассмотрим жидкость, плотность  $\rho$  которой зависит от температуры  $t$ , концентрации  $C$  некоторого химического компонента и статического давления  $p$ , т. е.  $\rho = \rho(t, C, p)$ . В покоящейся окружающей среде, состоящей из такой жидкости и находящейся в гравитационном поле интенсивностью  $\bar{g}$ , локальная область меньшей плотности порождает направленную вверх выталкивающую силу  $\bar{B}$ , которую можно записать в векторной форме. Эта сила приводит к возникновению движения. Гравитационная сила действует по вертикали и направлена вниз. Движение возникает вследствие того, что давление, или гидростатический градиент  $dp_a/dx = g\rho_a$ , различен в разных точках области изменения плотности, отличающейся от локальной  $\rho_a$ , т. е.  $dp/dx = -g\rho$ . Здесь  $\rho$  — мгновенная плотность. Для плоского случая скалярная величина  $B = B(x, y) = g(\rho_a - \rho)$ . Таким образом, выталкивающая сила  $\bar{B}$  представляет собой разность двух объемных сил и считается положительной, если она и, следовательно, возникающее движение направлены вверх.

Значение этой выталкивающей силы зависит от местной температуры и (или) концентрации морской воды. Определяют ее как результат уравнивания инерционной силы и силы вязкости. Для нее справедливо также уравнение неразрывности. Уравнение теплового баланса учитывает наряду с другими видами энергии диффузионный и конвективный теплоперенос. Кроме того, для каждого химического компонента также существует уравнение баланса диффузии, конвекции, а также образования или исчезновения данного компонента в результате химических реакций. Поскольку эти уравнения зависят от температуры и концентрации, они входят совместно в уравнение баланса сил и количества движения в виде члена  $\bar{B}$  [12–15]. Это основная трудность анализа механизмов, которые управляют течениями, вызванными выталкивающей силой. Такие же сложности возникают в случаях, когда сила  $\bar{B}$  зависит от местной плотности, например во вращающемся объеме жидкости.

Выталкивающая сила образуется также в ограниченных объемах, например при нагреве в них жидкости или воздуха. Возникающие

при этом течения называются внутренними, так как формируются внутри некоторых границ. Изменение в объеме температуры и (или) концентрации одного или нескольких химических компонентов также приводит к возникновению движения. Местную выталкивающую силу вычисляют по местной мгновенной гравитационной силе  $-\bar{g}\rho$  в данной точке путем вычитания из нее некоторой средней характерной объемной силы  $-\bar{g}\rho_r$ , т. е.  $\bar{B} = \bar{g}(\rho_r - \rho)$ , где  $\rho_r$  — характерная плотность.

Выбор плотности  $\rho_r$  зависит от рассматриваемого внутреннего течения. В качестве простого примера рассмотрим горизонтальный слой жидкости между верхней и нижней ограничивающими поверхностями, имеющими температуры соответственно  $t_1$  и  $t_2$ . При  $t_2 > t_1$  слой жидкости неустойчиво стратифицирован, если плотность рассматриваемой жидкости уменьшается с ростом температуры. При некоторых условиях возникает движение, вызванное выталкивающей силой. В таком течении местную характерную плотность  $\rho_r$  на различных высотах вычисляют по линейному распределению температуры, существующему в вертикальном направлении при отсутствии движения жидкости, т. е. в условиях чистой теплопроводности. В более сложных внутренних течениях и (или) при других объемных силах методика выбора закона изменения характерной плотности сложнее.

**Течение и перенос.** Гравитационная выталкивающая сила  $\bar{g}(\rho_r - \rho)$  является движущей силой, приводящей к возникновению течения. При аналитическом описании она входит в общее векторное уравнение баланса сил и количества движения. Дополнительными балансовыми уравнениями являются уравнение неразрывности и уравнение сохранения массы, которое описывает любой процесс переноса, вызывающий изменение плотности. Таким образом, всегда имеются по крайней мере три совместных уравнения, определяющие параметры течения: скорость, давление и температуру или концентрацию. Кроме того, необходимо уравнение, связывающее параметры состояния, в частности  $\rho = \rho(t, C, p)$ . Требуется также знать коэффициенты молекулярного переноса: динамическая вязкость  $\mu$  для ньютоновской жидкости, теплопроводность  $k$ , коэффициент диффузии  $D$  компонентов в законе Фика [5], а также некоторые другие коэффициенты, которые могут появиться в особых случаях течения.

Конкретные особенности задачи характеризуются условиями, связанными с геометрической формой, состоянием поверхности, окружающей средой и т. д., во многих природных явлениях и в промышленных установках большую роль играют процессы переноса в пресной или соленой холодной воде. Типичным примером может служить об-

разование и таяние льда в морях и океанах. Анализ возникающих в таких условиях течений часто усложняется тем обстоятельством, что плотность воды имеет экстремум при низких температурах вследствие усиления связей в водороде и ослабления интенсивности теплового движения молекул [5]. В пресной воде он достигается примерно при 4 °С. В соленой воде подобный экстремум существует и при солёности до ~2,6 % и давлении до 30 МПа для систем, находящихся в локальном термодинамическом равновесии. Для неравновесных систем такой экстремум наблюдается в гораздо более широких диапазонах значений солёности и давления.

Предложен целый ряд корреляционных соотношений [16–24], выражающих зависимость плотности  $\rho$  воды от температуры  $t$ , солёности  $s$  и давления  $p$ , которые учитывают наличие экстремума [2, 3, 8, 25–30]. Большинство из них даёт практически одинаковые результаты, однако выражение, предложенное в работе [25], позволяет получить наиболее достоверный результат. Согласно этому соотношению,

$$\rho(t, s, p) = \rho_m(s, p) \left[ 1 - \alpha(s, p) [(t - t_m(s, p))^{q(s, p)}] \right]. \quad (1)$$

Здесь

$$\rho_m(s, p) = \rho_m(0; 0, 1) \left[ 1 + f_1(p) + sg_1(p) + s^2 h_1(p) \right]; \quad (2)$$

$$\alpha(s, p) = \alpha(0; 0, 1) \left[ 1 + f_2(p) + sg_2(p) + s^2 h_2(p) \right]; \quad (3)$$

$$t_m(s, p) = t_m(0; 0, 1) \left[ 1 + f_3(p) + sg_3(p) + s^2 h_3(p) \right]; \quad (4)$$

$$q(s, p) = q(0; 0, 1) \left[ 1 + f_4(p) + sg_4(p) + s^2 h_4(p) \right]; \quad (5)$$

$$f_i(p) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(p-1)^j; \quad g_i(p) = \sum_{j=0}^n g_{ij}(p-1)^j; \quad h_i(p) = \sum_{j=1}^n h_{ij}(p-1)^j, \quad (6)$$

где  $\rho_m(0; 0, 1)$ ,  $\alpha(0; 0, 1)$ ,  $t_m(0; 0, 1)$  и  $q(0; 0, 1)$  — плотность, молекулярная теплопроводность, температура и показатель степени для пресной воды ( $s = 0$ ) при давлении 0,1 Мпа;  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $h_i$  — полиномы по степеням  $(p - 1)$ . Отметим, что в более простых, но менее точных соотношениях некоторые из этих полиномов принимают равными нулю.

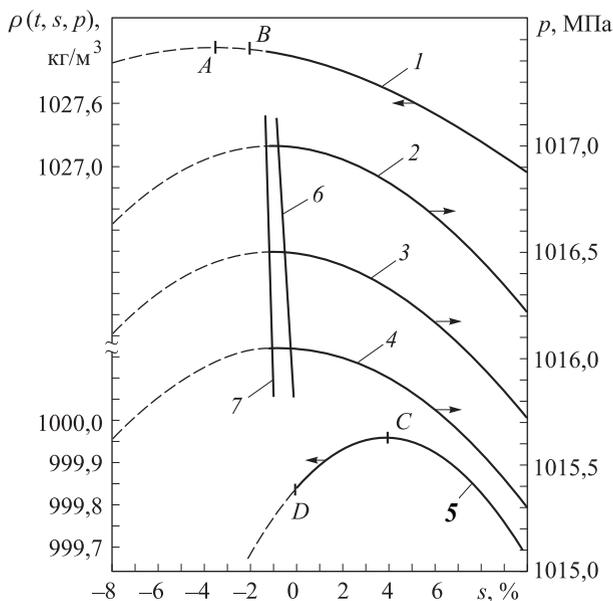
Согласно выражению (1),  $\rho(t, s, p)$  зависит от температуры по закону  $|t - t_m|^q$ . Применение такого закона приводит к существенному и очень важному упрощению как при расчете характеристик течения, так и при нормализации параметров для конкретных условий естественной конвекции [30–34]. Например, для большинства практических задач градиенты солености зачастую имеют существенно бóльшие значения, чем градиенты давления.

Параметры  $\rho_m(0; 0, 1)$ ,  $\alpha(0; 0, 1)$ ,  $t_m(0; 0, 1)$  и  $q(0; 0, 1)$  и полиномы  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $h_i$  определены с использованием метода нелинейного регрессионного анализа, который позволяет найти зависимость, обеспечивающую наименьшее среднее квадратическое отклонение экспериментальных данных для пресной [18] и соленой [8] воды. Регрессионный анализ проводили в диапазонах значений  $t = 0 \dots 20^\circ\text{C}$ ,  $s = 0 \dots 4\%$  и  $p = 0, 1 \dots 100$  Мпа, охватывающих большинство условий, в которых находится вода на морской поверхности и в промышленных установках. Наиболее точная форма выражения (1) получена при представлении функций  $f_i$ ,  $g_i$  и  $h_i$  полиномами третьей степени, т. е. при  $n = 3$  корреляционное соотношение дает погрешность не более  $3,5 \cdot 10^{-6}$  для пресной воды и не более  $1,04 \cdot 10^{-6}$  — для соленой [8] (для серии из 309 экспериментальных точек). Зависимость (1) при  $n = 2$ , когда исключаются все члены порядка  $s^2$  и предполагается, что  $q$  не зависит от  $s$ , дает для тех же диапазонов значений параметров бóльшие погрешности: не более  $6,5 \cdot 10^{-6}$  для пресной воды и не более  $3,82 \cdot 10^{-5}$  — для соленой. В случае изменения фаз нижней границей диапазона значений температур, в котором справедлив анализ течения в соленой воде, является равновесная температура таяния льда  $t_{il}$ . Ее можно рассчитать по уточненной зависимости, полученной в работе [22]:

$$t_{il}(s, p) = -0,02831 - 0,0499s - 0,000112s^2 - 0,00759p, \quad (7)$$

где  $p$  выражено в барах. Эта формула справедлива в диапазонах значений  $17,1 < s < 35\%$  и  $0,1 < p < 10$  МПа и подтверждается экспериментальными данными работы [11].

Влияние солености  $s$  и давления  $p$  на плотности  $\rho$ ,  $\rho_m$  и температуру  $t_m$  показано на рис. 1. Стрелками указано, какую ось координат (с соответствующим масштабom плотности) следует использовать. Точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  соответственно обозначены температуры  $t_m(35; 0, 1)$ ,  $t_{il}(35; 0, 1)$ ,  $t_m(0; 0, 1)$ ,  $t_{il}(0; 0, 1)$ , при которых достигается максимум плотности.



**Рис. 1. Зависимости плотности от температуры при различных значениях  $s$  и  $p$  [25]:**

$1 — \rho(t; 35; 0,1)$ ;  $2 — \rho(t; 20; 2,0)$ ;  $3 — \rho(t; 20; 1,0)$ ;  $4 — \rho(t; 20; 0,1)$ ;  $5 — \rho(t; 0; 0,1)$ ;  $6 — t_m(20; p)$ ;  $7 — t_{il}(20; p)$

На рис. 2 сплошными кривыми представлены зависимости  $t_m(s, p)$ , найденные по выражению (1), а штриховыми — линии постоянных значений  $t_{il}$  при изменении солёности и давления.

Необходимо отметить, что при больших значениях солёности и высоких давлениях происходит существенное снижение равновесной температуры таяния льда. Данные, приведенные на рис. 1, показывают, что при увеличении солёности и давления температура  $t_m$  снижается быстрее, чем  $t_{il}$ . Используя формулу (7) и выражение (4) для  $t_m(s, p)$ , можно получить зависимости разности  $t_m - t_{il}$  от солёности и давления (см. рис. 2). На основании рис. 2 можно сделать вывод, что в условиях равновесия предельные значения, при которых еще наблюдается экстремум плотности, соответствуют условию  $p < 30$  МПа для пресной воды и  $p = 0,1$  МПа при  $s < 25,3$  % — для солёной. Необходимо отметить, что при замерзании пресной, а возможно, и солёной воды может наблюдаться существенное снижение температуры  $t_{il}$  по сравнению с рассчитанной по формуле (7), причем это снижение может сохраняться в течение длительного периода времени.

**Формулировка задачи о переносе в воде.** Уравнения установившегося ламинарного течения с использованием приближения Буссинеска (1) и при постоянных значениях параметров  $\mu$ ,  $k$  молекулярного переноса и записывают следующим образом:

$$\nabla \bar{V} = 0; \quad (8)$$

$$\rho_r(\bar{V}\nabla)\bar{V} = F - \nabla p + \mu\nabla^2\bar{V}; \quad (9)$$

$$\rho_r c_p(\bar{V}\nabla)t = k\nabla^2 t + \beta T(\nabla\nabla)p + \mu\bar{F}; \quad (10)$$

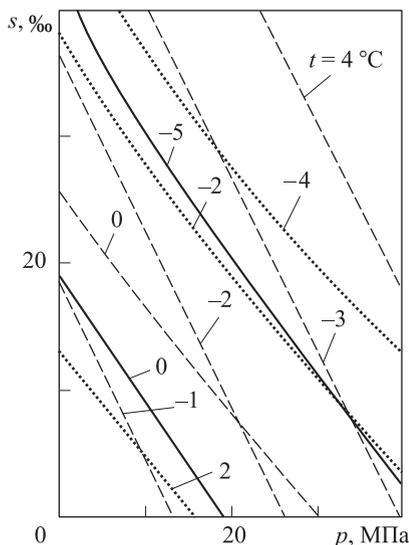
$$(\bar{V}\nabla)s = D\nabla^2 s, \quad (11)$$

где  $\bar{V}$  — местная скорость жидкости;  $\bar{F} = \bar{g}\rho$  — объемная сила;  $p$  — местное статическое давление;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $\beta$  — термический коэффициент объемного расширения;  $T$  — абсолютная температура.

Отметим, что приближение постоянной плотности, использованное в уравнении (8), предпочтительнее при анализе холодной воды, чем других капельных жидкостей или газов, а уравнение (9) записано в форме, не требующей задания конкретного значения  $\rho_r$ . Поскольку, как правило,

концентрация соли  $s \ll 1$  (для морской воды  $s \approx 0,033\%$ ), в приведенных уравнениях (8)–(11) пренебрегают соленостью и распределенными источниками энергии, обусловленными, например, химическими реакциями. Кроме того, не учитывается эффект Соре, так как он играет сравнительно малую роль в условиях достаточно интенсивного конвективного движения, и эффект Дюфура (еще слабее). Входящие в уравнение (10) члены, выражающие вязкую диссипацию и поле давления, не учитывают, поскольку в конвективных течениях они обычно малы.

Если выталкивающая сила направлена вверх, то направление положительной полуоси  $Ox$  противоположно направлению ускорения силы тяжести, т. е.  $\bar{g} = g\bar{i}$ , где  $\bar{i}$  — единичный вектор в направлении  $Ox$ . Для внешних течений местное статическое давление записывают в виде суммы местного динамического  $p$  и гидростатического



**Рис. 2.** Кривые изменения температуры  $t_m(s, p)$ , при которой достигается максимум плотности (сплошные), а также температуры  $t_{il}(s, p)$  в условиях равновесия фаз (пунктирные) и их разности  $t_m - t_{il}$  (штриховые) в практически важных диапазонах изменения солености и давления

давления  $p_h$  в удаленной от поверхности окружающей среде, где  $dp_h / dx = gp_\infty$ , а  $p_\infty$  — давление окружающей среды. Следовательно,

$$\bar{F} - \nabla p = g\rho\bar{i} + g\rho_\infty\bar{i} - \nabla p_m = g(\rho_\infty - \rho)\bar{i} - \nabla p_m. \quad (12)$$

Первый член в уравнении (12) представляет собой выталкивающую силу. В общем случае  $\rho_\infty = \rho(t_\infty, s_\infty, p_\infty)$ , а  $\rho(t, s, p)$  определяют из соотношения (1). При анализе внутренних течений можно применить другие условия для поля давления.

**Массообмен в условиях термической конвекции.** Ввиду аномального изменения плотности воды описание течения при низких температурах, как правило, отличается большой сложностью. Часто изменяется направление выталкивающей силы (обращение выталкивающей силы), возникают двумерные профили скорости. Инверсия конвекции, обусловленная экстремумом плотности, была исследована в работе [9], а в [13, 14] представлены подробные данные измерений теплообмена в воде при инверсии конвекции.

Анализ подобных течений был проведен в работе [33]. Зависимость плотности воды от температуры выражалась в ней полиномом третьей степени, и с помощью интегрального метода был выполнен расчет местного теплового потока при таянии льда в пресной воде. Согласно результатам расчета, инверсия конвекции происходила при температуре около  $5,3^\circ\text{C}$ , причем тепловой поток при этом достигал минимума. В случае таяния льда в воде при  $t_\infty < 5,3^\circ\text{C}$  течение направлено вдоль поверхности вверх, а при  $t_\infty > 5,3^\circ\text{C}$  — вниз.

В работе [30] интегральный метод был применен для исследования течения около плоской вертикальной поверхности в воде с температурой около  $4^\circ\text{C}$ . В частности, была рассмотрена вертикальная поверхность с температурой  $t_0$ , расположенная в воде, температура которой  $t_\infty = t_m$ . Для этого использовали обычные уравнения движения, в которых разность плотностей  $\Delta\rho = \rho_m\alpha^*(t - t_m)^2$ , где  $\alpha^*$  — коэффициент, равный  $8 \cdot 10^{-6}^\circ\text{C}^{-2}$ . Это общепринятое соотношение обеспечивает достаточную точность при температурах  $\pm 4^\circ\text{C}$ . Решение было получено при  $\text{Pr} = 11,4$ . В работах [34–37] проведено обобщение анализа [30] за пределами значения  $t_\infty = 8^\circ\text{C}$ , обусловленного требованием достаточной точности результатов расчета, с использованием приближенного выражения для  $\Delta\rho$ , представляющего собой, согласно [37], сумму членов первого, второго и третьего порядков по  $t - t_m$ . Такое приближение аналогично использованному в работе [33]. Недостатком анализа является то, что в два новых члена дифференциальных уравнений входят два параметра, зависящих от темпе-

ратуры стенки. Кроме того, анализ ограничивается случаем  $t_\infty = t_m$ . В работе [13] расчеты [30, 38, 39] были повторены в пренебрежении этими членами. Полученные значения теплового потока примерно на 15 % занижены по сравнению с данными работы [30]. Там же приведены решения для конкретных значений температуры в диапазоне  $0 \leq t_0 \leq 35$  °С.

В работах [40–44] подробно рассмотрено направление течения в пограничном слое около вертикальной поверхности, расположенной в воде с температурой около 4 °С. Было выявлено влияние соотношений между  $t_0$  и  $t_m$ , а также  $t_\infty$  и  $t_m$ . При анализе использовали представление плотности, примененное в [33], а уравнения сводили к автомодельной форме. Сравнение результатов численного расчета при  $t_\infty = 0$  и  $1 \leq t_0 \leq 14$  °С с данными работы [42] показало, что они существенно различаются между собой. Расчеты проводили и при других значениях  $t_\infty$ . Полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными [13] и расчетными [42] данными.

В работе [31] уравнения пограничного слоя при использовании приближения  $\Delta\rho \sim (\Delta t)^2$  применены для исследования характеристики теплопереноса около вертикальных и горизонтальных пористых поверхностей, расположенных в воде с температурой  $t_\infty = t_m$ . Получены автомодельные уравнения при степенном законе изменения температуры стенки в направлении течения:  $d(x) = t_0 - t_\infty = Nx^n$ . Приведена также зависимость скорости инъекции жидкости от  $x$ . Позже в работах [5, 43, 44] было получено решение для больших чисел Прандтля с использованием разложения в виде ряда по степеням  $\text{Pr}^{-1/2}$ . Однако вода, вероятно, единственная особая капельная жидкость с умеренно большим числом Прандтля, имеющая экстремум плотности. В работе [34] проведен расчет напряжения поверхностного трения интегральным методом с использованием для выталкивающей силы приближения  $\Delta\rho \sim (\Delta t)^2$  при  $t_\infty = 4$  °С.

**Автомодельные течения в условиях термической конвекции.** Рассмотрим сначала плоскую вертикальную нагреваемую или охлаждаемую поверхность, расположенную в пресной или соленой воде при отсутствии инверсии конвекции. Для установившегося ламинарного двумерного течения около вертикальной поверхности уравнения пограничного слоя [20] сводятся к следующим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (13)$$

$$\rho_r \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(\rho_\infty - \rho); \quad (14)$$

$$\rho_r c_p \left( u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \beta T u \frac{d\rho_h}{dx} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (15)$$

где  $u, v$  — соответственно компоненты скорости в направлениях  $Ox$  и  $Oy$ .

В работе [26] было получено общее автомодельное решение для нагреваемой плоской вертикальной поверхности, которая расположена в среде, имеющей экстремум плотности, причем выталкивающую силу рассчитывали с помощью точного (1). Воспользуемся обозначениями Б. Гибхарта [24] и определим переменную подобия  $\eta(x, y)$ , а также функции тока  $\psi(x, y)$  и  $f(\eta)$ :

$$\eta(x, y) = yb(x); \quad \psi(x, y) = vc(x)f(\eta); \quad (16)$$

$$d(x) = t_0 - t_\infty = Nx^n; \quad (17)$$

$$f(x) = t_0 - t_r; \quad (18)$$

$$\phi = (t - t_\infty) / (t_0 - t_\infty), \quad (19)$$

где  $v = \text{const}$ ;  $t_r$  — характерная температура;  $b(x) = \eta / y$ .

Вопрос об автомодельности состоит в том, можно ли найти такие функции  $b(x)$  и  $c(x)$ , чтобы  $f(x)$  и  $\phi$  зависели только от  $\eta(x, y)$  и одновременно удовлетворялись все уравнения теплопереноса и граничные условия.

Местная интенсивность течения обычно определяется местным числом Грасгофа  $\text{Gr}_x = g\beta x^3(t_0 - t_\infty) / \nu^2$ . Однако вблизи экстремума нельзя линеаризовать зависимость плотности от температуры. Необходимо более точно определить разность плотностей  $\Delta\rho = \rho_\infty - \rho$  и записать  $\text{Gr}_x$  через характерное значение плотности  $\rho_r$ :

$$\text{Gr}_x = gx^3\Delta\rho / (\nu^2\rho_r). \quad (20)$$

Подставляя выражения (16)–(19) в уравнения (13)–(15), получаем уравнения вида

$$f''' + \frac{c_x}{b} f f'' - \left( \frac{c_x}{b} + \frac{cb_x}{b^2} \right) f'^2 + \frac{g}{\nu^2 cb^2} \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_r} = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\phi''}{\text{Pr}} + \frac{c_x}{b} f \phi' - \frac{cd_x}{bd} f' \phi - \frac{cf_x}{bd} f' - \beta T \frac{c}{bd} \frac{g}{c_p} f' + \frac{b^2 c^2}{d} \frac{\nu^2}{c_p} f'^2 = 0 \quad (22)$$

и граничные условия

$$1 - \phi(0) = \phi(\infty) = \phi'(0) = \phi'(\infty) = 0. \quad (23)$$

Остальные граничные условия определяются дополнительными требованиями при  $\eta = 0$ . Для сплошной поверхности должно выполняться условие

$$\phi(0) = 0. \quad (24)$$

В работе [26] было показано, что влияние давления на плотность, как правило, пренебрежимо мало, за исключением областей очень большого размера по вертикали. В таком случае слагаемое с давлением в уравнении (2) можно представить в виде давления окружающей среды. Разность плотностей выражается соотношением

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \rho(t_\infty, s_\infty, p) - \rho(t, s_\infty, p) = \rho_m(s_\infty, p)\alpha(s_\infty, p)\left(|t - t_m|^q - |t_\infty - t_m|^q\right) = \\ &= \rho_m\alpha\left(|t - t_m|^q - |t_\infty - t_m|^q\right), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $t_m = t_m(s_\infty, p)$ .

Применяя параметр

$$R = \frac{t_m(s_\infty, p) - t_\infty}{t_0 - t_\infty}, \quad (26)$$

получаем

$$\begin{aligned} B &= g(\rho_\infty - \rho) = g\rho_m\alpha|t_0 - t_\infty|^q\left(|\phi - R|^q - |R|^q\right) = \\ &= g\rho_m\alpha|t_0 - t_\infty|^q W(\phi, R), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $W(\phi, R)$  — локальная выталкивающая сила.

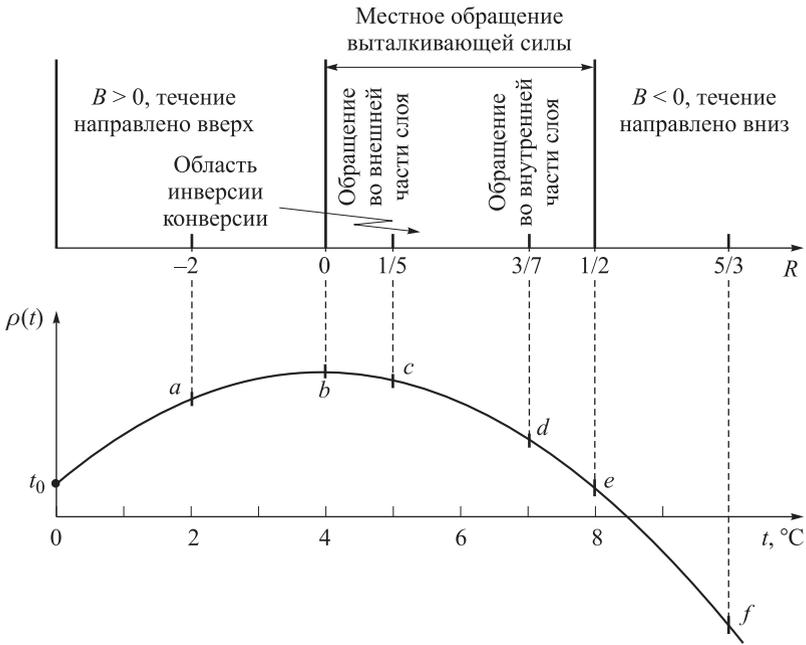
Параметр  $R$  выражает соотношение между температурами  $t_0$ ,  $t_\infty$  и плотностью  $\rho_m$  и в конечном счете определяет распределение и направление выталкивающей силы поперек слоя температурной аккумуляции между  $t_0$  и  $t_\infty$ . Например, при  $t_m = t_\infty$  ( $R = 0$ ) выталкивающая сила всегда направлена вверх, а при  $t_m = t_0$  ( $R = 1$ ) — вниз. Возможно изменение направления выталкивающей силы на обратное (обращение выталкивающей силы). Так, принимая  $t_0 = 0$  и  $t_\infty = 1/5t_m$ , получаем  $R = 1/3$ , а значит, выталкивающая сила направлена вверх в окрестности стенки и вниз — за ее пределами. При больших значениях  $R$  температуры  $t_0$  и  $t_\infty$  существенно отличаются от  $t_m$  (рис. 3). Отметим, что указанные на рис. 3 значения  $R$  получены при  $t_0 = 0$ , т. е.

$$R = 1 - 4/t_\infty;$$

$$B = g(\rho_\infty - \rho) \cong (|\phi - R|^q - |R|^q);$$

$$\text{Gr}_x = g\alpha x^3 |t_0 - t_\infty|^q / \nu^2,$$

где  $\alpha$  и  $q$  входят  $\rho(t, s, p)$ . Точки  $a, \dots, f$  соответствуют различным значениям  $t_\infty$ . Значение  $t_0$  принято равным температуре плавления льда в пресной воде при давлении 0,1 МПа, т. е.  $t_0 = 0$ .



**Рис. 3.** Связь между значением параметра  $R$  и направлением выталкивающей силы, ее обращением и инверсией конвекции

Анализ соотношений (21), (22) и (27) показал, что автомодельные решения можно получить в том случае, если параметры

$$C_1 = \frac{c_x}{b}, \quad C_2 = \frac{cb_x}{b^2}, \quad C_3 = \frac{g\alpha\rho_m |t_0 - t_\infty|^q W}{\rho_r v^2 cb^2} \quad (28)$$

не зависят от  $x$ . Разумеется, необходимо выбирать  $\rho_r = \rho_m(s, p)$ . Из соотношения (27) следует, что если  $\phi = \phi(\eta)$ , а это условие необходимо и для уравнения (22), то  $W$  не зависит от  $x$  только в том случае, когда и  $R$  не зависит от  $x$ . Большинство ранних аналитических исследований вертикальных течений было проведено при  $q = 2$  и  $R = 0$ . Поэтому в последнем соотношении (28)  $W = \phi^2$ . В уравнении (1) значение  $q$  изменяется в зависимости от солености и давления приблизительно от 1,6 до 1,9. Определив корни уравнения (5), можно построить линии постоянных значений  $q$  с точностью до трех значащих цифр (рис. 4). Достаточным для этого является условие  $R = 0$  или  $t_m = t_\infty$ , т. е. если плотность окружающей среды равна экстре-

мальной плотности  $\rho_m(s, p)$ . Именно это условие использовали в работах [30, 31, 34, 40], но при  $s_\infty = 0$  и  $q = 2$ . Согласно уравнению (26), должно выполняться условие  $d(x) = t_0 - t_\infty \sim t_m - t_\infty \sim f(x)$ .

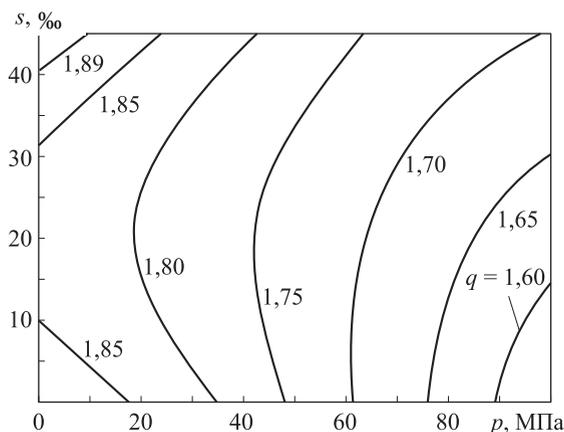


Рис. 4. Линии постоянных значений  $q$  в зависимости от солености и давления [25]

Принимая  $t_m$  в качестве характерной температуры (например,  $t_r$  в соотношении (18)) и предполагая на время, что имеется стратификация по температуре в направлении диффузии, получаем условие, что  $t_0$  и  $t_\infty$  не должны зависеть от  $x$ . В таком случае  $R = \text{const}$ .

Анализируя выражения для  $C_1$  и  $C_2$  можно показать, что  $b$  и  $c$  должны изменяться в зависимости от  $x$  либо по степенному, либо по экспоненциальному закону. Если при  $n = 0$  принять  $C_1 = 3$ ,  $C_2 = -1$ ,  $C_3 = 1$  и  $C_4 = 0$ , то для  $b(x)$  получаем выражение

$$b(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{g\alpha x^3 d^q}{4\nu^2} \right)^{1/4} = \frac{1}{x} \left( \frac{\text{Gr}'_x}{4\nu^2} \right)^{1/4}, \quad (29)$$

которое близко к соотношению, характеризующему приближение Буссинеска, за исключением того, что теперь число Грасгофа

$$\text{Gr}'_x = \frac{gx^3}{4\nu^2} \left[ \alpha(s_\infty, p) |t_0 - t_\infty|^q \right]. \quad (30)$$

Однако, как указано в работе [26], функция  $b(x)$  всегда положительная, хотя выталкивающая сила может быть положительной, отрицательной или знакопеременной в зависимости от соотношений между  $t_0$  и  $t_m$ , а также  $t_\infty$  и  $t_m$ . Этот недостаток можно устранить, если использовать число Грасгофа  $\text{Gr}_x$  вида (20). Пусть  $\Delta\rho$  —

усредненная разность плотностей  $\rho_\infty$  и  $\rho$  поперек слоя конвекции, полученная путем интегрирования  $W$  по  $\eta$ :

$$\int_0^\infty W d\eta = \int_0^\infty (|\phi - R|^q - |R|^q) d\eta = I_W. \quad (31)$$

В таком случае число Грасгофа

$$\text{Gr}_x = \frac{gx^3}{\nu^2} \left[ \alpha(s_\infty, p) |t_0 - t_\infty|^q \right]^q I_W, \quad (32)$$

где  $\alpha(s_\infty, p)$  определяется соотношением (1). Подставив (32) в выражение (29), получим специальное выражение для слагаемого, характеризующего выталкивающую силу в уравнении (21):

$$\frac{g}{\nu^2 c b^3} \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_r} = F(\eta) = \frac{W}{I_W}. \quad (33)$$

Следовательно, при  $I_W < 0$  в соотношении (32) необходимо изменить направление оси  $Ox$  таким образом, чтобы оно совпало с направлением действия ускорения силы тяжести  $g$ . Тогда функция  $F(\eta)$  будет положительной во всей области течения. Дополнительным доводом в пользу нормализации выталкивающей силы  $W$  с использованием интеграла  $I_W$  служит то обстоятельство, что при этом в большей части области течения слагаемое, содержащее  $W$ , близко к единице. Однако уравнения (21) и (22) становятся при этом интегродифференциальными. При численном решении  $I_W$  вычисляются итерационным методом.

Прежде чем перейти к обсуждению результатов численного расчета, рассмотрим дополнительные условия, при которых существуют автомодельные решения. Напомним, что не только  $R = 0$ , или  $t_\infty = t_m$ , но и условие  $d(x) = t_0 - t_\infty \approx t_m - t_\infty = (t_m - t_r) - (t_\infty - t_r) = t_m - t_r - j(x)$  приводит к тому, что  $W = W(\eta, R)$  при  $\phi = \phi(\eta)$ . Кроме того, из анализа уравнения (22) следует, что параметр

$$C_5 = cd(x) / bd \quad (34)$$

также не должен зависеть от  $x$ . Обусловлено это зависимостью разности  $t_0 - t_\infty$  от  $x$  и, согласно выражению (29), выполняется при  $d(x) = t_0 - t_\infty = Nx^n$ , т. е.  $C_5 = 4n$ .

Теперь рассмотрим вклад вязкой диссипации в производство тепловой энергии:

$$\frac{b^2 c^2 v^2}{d c_p} = C_6 = \frac{4g\alpha N^{q-1}}{c_p} x^{n(q-1)+1} \approx 4g\alpha N \text{Pr} x^{n(q-1)+1} / c_p. \quad (35)$$

Уравнение (35) имеет автомодельное решение только при  $n = -1/(q-1)$ , что физически нереально. Этот вклад пропорционален  $g\alpha$  и обычно очень мал.

При законе изменения числа  $\text{Gr}_x$ , определяемом соотношением (32), значения  $b$  и  $c$  остаются неизменными, а параметры  $C_1 = qn + 3$ ,  $C_2 = qn - 1$  и  $C_3 = 1$ . Если допустить стратификацию по температуре, то дополнительно требуется, чтобы параметр  $C_7$  не зависил от  $x$ :

$$C_7 = cj_x / bd. \quad (36)$$

Для этого должно выполняться равенство  $j(x) = t_\infty - t_r = (C_7 N / 4n)x^n$ , а значит,  $C_7 = 4nN_\infty / N$ . Если  $R = 0$ , или  $t_\infty = t_m$ , стратификации может не наблюдаться, поскольку  $t_m = t_m(s_\infty, \rho) = \text{const}$ . Если  $R \neq 0$ , то  $R = (t_m - t_r - N_\infty x^n) / Nx^n$ , причем  $R$  не зависит от  $x$  только в том случае, если  $t_r = t_m$ . Отсюда  $R = -N_\infty x^n / N$ .

Окружающая среда остается неподвижной лишь при устойчивой стратификации. Это достигается только при  $j_x > -g(\partial T / \partial \rho)$ . Для большинства состояний капельной жидкости производная  $(\partial t / \partial \rho)$  положительна и мала, поэтому часто принимают  $j_x > 0$  [24]. Поскольку  $(\partial T / \partial \rho) = \beta T / \rho c_p$ , точное условие имеет вид

$$j_x = N_\infty n x^{n-1} \geq -g\beta T / c_p, \quad (37)$$

где  $\beta > -[\rho(\partial \rho / \partial T)]^{-1}$ .

Значения  $g$ ,  $T$  и  $c_p$  положительные, а значит, знак неравенства (37) определяется знаком величины  $\beta$ , которая отрицательна при температурах ниже  $t_m$ . Следовательно, в устойчивых условиях допускается снижение  $t_\infty$  при  $t_\infty > t_m$ , но требуется возрастание  $t_\infty$  при  $t_\infty < t_m$ .

Входящую в уравнение (22) пятую составляющую можно представить в виде

$$C_8 = \frac{gT}{c_p} \frac{c}{bd} \beta = \frac{gT}{c_p} \frac{c}{bd} \frac{\alpha q |\phi - R|^{q-1} |t_0 - t_\infty|^{q-1}}{(1 - \alpha |\phi - R|^q |t_0 - t_\infty|^q)} \frac{(\phi - R)(t_0 - t_\infty)}{|\phi - R| |t_0 - t_\infty|}. \quad (38)$$

Пренебрегая в знаменателе несущественными выражениями, получаем

$$C_8 = \frac{4g\alpha q T}{c_p} |\phi - R|^{q-2} (\phi - R) |N|^{q-2} x^{1-n(2-q)}. \quad (39)$$

Параметр  $C_8$  не зависит от  $x$  при  $n = (2 - q) / 2$ , значение которого очень велико, если в соотношении (37) пренебречь изменением  $T$  поперек поля течения. Он также пропорционален  $g\alpha$  и может быть очень мал.

Если пренебречь влиянием вязкой диссипации и давления, а также принять при наличии стратификации  $t_r = t_m$ , то уравнения (21) и (22) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} f''' + (3 + gn)ff'' - (2 + 2qn)f'^2 + F &= 0; \\ \phi'' + Gr_x \left[ (3 + gn)f\phi' - 4nf'\phi - \frac{4nN_\infty}{N}f' \right] &= 0, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $Gr_x$  и  $F$  определены соответственно выражениями (32) и (33).

Если число Грасгофа  $Gr_x$  определено соотношением типа (30), то в уравнении (40) сила  $F$  заменяется на  $W$ . Граничные условия в обоих случаях имеют вид

$$1 - \phi(0) = \phi(\infty) = f'(0) = f(0) = f'(\infty) = 0.$$

Используя выражения (32) и (33), в работе [26] подразумевали, что  $x$  возрастает в направлении реального течения. Это становится сомнительным в диапазоне значений  $0 < R < 1/2$ , поскольку истинное направление течения не всегда определяется знаком  $I_W$ .

Пределы допустимых значений  $n$  в соотношении  $d(x) = Nx^n$  определяют из физических соображений, как и для приближения Буссинеска. Местная плотность  $\rho''(x)$  теплового потока на поверхности, переносимое локально течением количество энергии  $Q(x)$ , местная толщина  $\delta(x)$  области течения и местное число Нуссельта  $Nu_x$  определяются соответственно выражениями

$$\begin{aligned} \rho''(x) &= -k \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)_0 = [-\phi'(0)]kdb \approx x^{(1/4)[n(4+q)-1]}; \\ Q(x) &= \int_0^\infty \rho c_p (t - t_\infty) u dy = \rho c_p vcd \int_0^\infty \phi f' d\eta \cong x^{(1/4)[n(q+4)+3]}; \\ \delta(x) &= \frac{\eta \delta}{b} \cong x^{(1/4)(1-nq)}; \\ Nu_x &= \frac{h_x x}{h} = \frac{g''(x) x}{d k} = \frac{[-\phi'(0)]}{\sqrt{2}} Gr_x^{1/4}. \end{aligned}$$

Требование того, чтобы толщина пограничного слоя  $\delta(0)$  была мала или равнялась нулю, приводит к условию  $nq < 1$ . Это означает, что для пресной воды при  $p = 0,1$  МПа и  $q = 1,894816$  значение  $n < 0,528$ . Кроме того, если направление  $x$  выбрано таким образом, что производная  $f'$  существенно положительна, энергия  $Q(x)$  при  $N > 0$  должна быть постоянной в случае линейного источника теплоты, расположенного в точке  $x = 0$ , или возрастать, если ниже по потоку при  $y = 0$  осуществляется подвод энергии. Следовательно, на основании соотношения для  $Q(x)$  при  $s = 0$  и  $p = 0,1$  МПа находим  $n > -3/(q + 4) = -0,509$ , т. е. для направленного потока  $n = -0,509$ . Итак, допустимым для  $n$  является диапазон значений  $-0,509 < n < 0,528$ . Для сравнения укажем, что при использовании приближения Буссинеска ( $q = 1$ ) допустимый диапазон значений несколько иной:  $-0,6 < n < 1$ . Таким образом, величина  $\phi'(0)$  зависит от числа Pr,  $R$  и выталкивающей силы  $F$ .

**Заключение.** В условиях существования выталкивающей силы течения, вызванные этой силой, чрезвычайно разнообразны по своим механизмам, физическим размерам, формам возникающих движений. В однофазной жидкости в связи с быстрыми изменениями плотности в вертикальном направлении возникают волноподобные движения. Стратификация оказывает существенное влияние на теплоперенос.

Если для поля температур в холодной воде выполняются условия, отвечающие максимуму плотности, то существует обратная выталкивающая сила. В случаях, когда обратная сила достаточно велика, возникают локальные течения, оказывающие большое влияние на теплоперенос. При некоторых условиях происходит полное изменение направления результирующего течения.

Любое местное возмущение, вызывающее движение, может вынудить тяжелую жидкость опускаться, заставляя легкую жидкость в каком-то другом месте подниматься. Вязкость будет препятствовать этому движению. Наиболее важными условиями являются толщина слоев жидкости или газа, вязкость и другие параметры, при которых эти слои становятся неустойчивыми к всегда существующим возмущениям. Скорости, вызванные выталкивающей силой, большей частью очень малы в связи с большим влиянием вязкости на течение в узких проточных каналах. Это позволяет сильно упростить аналитическое исследование теплопереноса, хотя и ценой некоторых потерь в описании реального физического механизма для ряда геометрических конфигураций.

*Работа выполнена по государственному заданию в рамках проектов № 7.4559.2011 и при финансовой поддержке РФФИ по проекту № 13-08-00538*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов Е.И. *Структура и динамика вод систем Гольфстрима*. Москва, Гидрометеоиздат, 1988, 252 с.
2. Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. Москва, Наука, 1976, 536 с.
3. Грянник В.М. Динамика локализованных вихревых возмущений «вихревых зарядов» в бароклинной жидкости. *Известия АН СССР. ФАО*, 1983, т. 19, вып. 5, с. 467–475.
4. Carey V. P., Gebhart B. Transport at Large Downstream Distances in Mixed Convection Flow Adjacent to a Vertical Uniform-Heat-Flux Surface. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 1982, vol. 25, no. 2, pp. 255–266.
5. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. *Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен*. В 2 кн. Кн. 1. Москва, Мир, 1991, 678 с.
6. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Наука, Физматлит, 1987, 840 с.
7. Carey V. P., Gebhart B., Mollendorf J. C. Buoyancy Force Reversals for Vertical Natural Convection Flows in Cold Water. *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, vol. 97, pp. 279–297.
8. Chen C.T., Millero F.J. The Specific Volume of Sea Water at High Pressure. *Deep-Sea Research*, 1976, vol. 23, no. 7, pp. 595–612.
9. Гурченков А.А. *Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела*. Москва, Физматлит, 2010, 221 с.
10. Cormack D.E., Leal L. G, Seinfeld J. H. Natural Convection in a Shallow Cavity with Differentially Heated end Walls, Part 2. Numerical solutions. *J. of Fluid Mechanics*, 1974, vol. 65, pp. 231–246.
11. Doherty B.T., Kester D.R. Freezing Point of Seawater. *J. Mar. Res.*, 1974, vol. 32, pp. 285–300.
12. Ильичев А.Т. *Уединенные волны в моделях гидромеханики*. Москва, Физматлит, 2003, 256 с.
13. Ингель Л.Х. Механизм конвективной неустойчивости бинарной смеси, нагреваемой сверху. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, 2002, т. 122, № 5, с. 1019–1021.
14. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*. Москва, Наука, 1972, 392 с.
15. El-Hawary M. A. Effect of Combined Free and Forced Convection on the Stability of Flow in a Horizontal Tube. *Journal of Heat Transfer*, 1980, vol. 102, no. 2, pp. 273–278.
16. Сидняев Н.И., Крылов Д.А. Метод расчета массовой кристаллизации многофазных реологических сред. *Материалы четвертой конференции геокриологов России*. МГУ им. М.В. Ломоносова, 7–9 июня 2011 г., т. 1, ч. 1. Физико-химия, теплофизика и механика мерзлых пород. Москва, Университетская книга, 2011, с. 129–136.
17. Сидняев Н.И. Теория фазовых переходов и статистические явления механики наноструктурированных веществ. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2010, Специальный выпуск «Наноинженерия», с. 9–22.
18. Fine R.A., Millero F. J. The Compressibility of Water as a Function of Temperature and Pressure. *J. Chem. Phys.*, 1973, vol. 59, pp. 5529–5536.
19. Савин А.С. Установление поверхностных волн, вызываемых гидродинамическими особенностями в плоском потоке. *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2002, № 3, с.78–71.
20. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А. *Химическая гидродинамика*, Справочное пособие. Москва, Квантум, 1996, 336 с.

21. Уильсон Н.В., Вайас Б.Д. Профили скорости вблизи вертикальной поверхности бруска льда, тающего в пресной воде. *Труды амер. о-ва инж.- мех. Сер. С. Теплопередача*, 1979, № 2, с. 145.
22. Fujino K., Lewis E. L., Perkin R. G. The Freezing Point of Seawater at Pressures up to 100 Bars. *Journal of Geophysical Research*, 1974, vol. 79, no. 12, pp. 1792–1797.
23. Савин А.С. Гидродинамические особенности в потоках со свободной границей. *Прикладная математика и механика*, 1991, № 3, с. 542–544.
24. Gebhart V. Natural Convection Flow and Stability. *Adv. Heat Transfer*, 1973, vol. 9, pp. 273–348.
25. Gebhart V., Mollendorf J.C. A New Density Relation for Pure and Saline Water. *Deep-Sea Research*, 1977, vol. 24, pp. 831–841.
26. Gebhart V., Mollendorf J.C. Buoyancy-Induced Flows in Water under Conditions in which Density Extrema May Arise. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, vol. 89, pp. 673–707.
27. Сидняев Н.И., Федотов А.А., Мельникова Ю.С. Численное решение уравнения переноса энергии и импульса для многофазных сред. Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009). *Материалы VIII Всероссийской науч.-практ. конф. с международным участием*. 12–13 ноября 2009 г., Томск, Изд-во Томского ун-та, 2009, ч. 2, с. 277–281.
28. Сидняев Н.И., Федотов А.А., Крылов Д.А. Интегральный метод в задачах математического моделирования распределения температурных полей. *Сборник докладов IV Всероссийской молодежной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование»*. 19–22 апреля 2010 г., ФГБОУ ВПО СарФТИ НИЯУ МИФИ. Саров, 2010, с. 72–76.
29. Сидняев Н.И., Крылов Д.А., Ильина Ю.С. Исследование движения многофазных и многокомпонентных систем в пористой среде. *Сборник докладов IX научно-технической конференции «Молодежь в науке»*. 26–28 ноября 2010 г., ФГБОУ ВПО СарФТИ НИЯУ МИФИ. Саров, 2010, с. 55–65.
30. Булгаков Н.П. *Конвекция в океане*. Москва, Наука, 1975, 272с.
31. Castro I.P. A Note on Lee Wave Structures in Stratified Flow over Three-dimensional Obstacles. *Tellus A*, 1987, vol. 39, pp.72–81.
32. Guo B., Xia Z. An Analytical Model of Upwelling Induced by Tidal Current past a Peninsula. *Ocean hydrodynamics of the Japan and East China Seas. Ed. T. Ichiye*. Amsterdam, Elsevier, 1984, pp.123–142.
33. Боуден К. *Физическая океанография прибрежных вод*. Москва, Мир, 1988, 324 с.
34. Soundalgekar V.M. Laminar Free Convection Flow of Water at 4° C from a Vertical Fat Plate with Variable Wall Temperature. *Chem. Eng. Sci.*, 1973, vol. 28, no. 1, pp. 307–330.
35. Ингель Л.Х. Возмущения сдвигового течения, вызванные взаимодействием с конвективными валами. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2006, № 3, с. 34–38.
36. Ингель Л.Х. Об условиях конвективной неустойчивости в верхнем слое жидкого раствора. *Журнал технической физики*, 2001, т. 71, № 1, с. 128–139.
37. Калашник М.В., Ингель Л.Х. Геострофическое приспособление и фронтогенез в стратифицированных двухкомпонентных средах. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, 2006, т. 42, № 4, с. 554–565.
38. Pramanik A.K., Majudar S.R. Capillary-Gravity Waves Generated in a Viscous Fluid. *Pfys. Fluids*, 1985, vol. 28, no. 1, pp. 46–51.
39. Сидняев Н.И., Аникин А.Ю., Бояринцева Т. Е. Математическая модель осесимметричного вихревого движения. *Наука и образование*, 2012, № 2. URL: <http://www.technomag.edu.ru/77-30569/318125.html> (дата обращения: 05.02.2012).

40. Жмур В.В. *Мезомасштабные вихри океана*. Москва, ГЕОС, 2011, 289 с.
41. Roy S. Free Convection in Liquids under Maximum Density Conditions. *Indian J. Phys.*, 1972, vol. 46, pp. 245–249.
42. Гласко А.В., Калмыков А.М., Сидняев Н.И., Спиридонов П.В. Прогнозирование температурного режима грунтов оснований зданий и сооружений в условиях линзовой мерзлоты. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 2012. Специальный выпуск № 7, с. 142–154.
43. Gitterman M. Hydrodynamics of Compressible Liquids: Influence of the Piston Effect on Convection and Internal Gravity Waves. *Physica. A.*, 2007, vol. 386, pp. 1–11.
44. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. *Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах*. Москва, Наука, 2010, 470 с.

Статья поступила в редакцию 21.02.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Д.А. Крылов, Н.И. Сидняев, Ю.С. Ильина, А.А. Федотов. Обзор и анализ исследований тепломассообмена в стратифицированной морской воде в условиях термической конвекции. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/612.html>

**Крылов Дмитрий Александрович** — ассистент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; аспирант дневного отделения; автор 14 научных работ; сфера научных интересов: численные методы, математическое моделирование. e-mail: [dmitrykrylov@rambler.ru](mailto:dmitrykrylov@rambler.ru)

**Сидняев Николай Иванович** — д. т. н., проф., заведующий кафедрой «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; автор 200 научных работ; сфера научных интересов: численные методы, уравнения математической физики, механика жидкости, газа и плазмы, вероятность и статистика. e-mail: [sidnyaev@yandex.ru](mailto:sidnyaev@yandex.ru)

**Ильина Юлия Сергеевна** — аспирантка дневного отделения, ассистент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; автор 15 научных публикаций; сфера научных интересов: численные методы, уравнения математической физики; теплофизика. e-mail: [jm.bmstu@yandex.ru](mailto:jm.bmstu@yandex.ru)

**Федотов Анатолий Александрович** — доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; канд. физ.-мат. наук; автор более 50 научных работ; сфера научных интересов: гидродинамика крыла, уравнения математической физики, численные методы. e-mail: [le-tail@list.ru](mailto:le-tail@list.ru)