

Дефокусировка нелинейных волновых пакетов на ледяном покрове

© А.Т. Ильичев¹, А.А. Савин²

¹ Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва 119991, Россия.

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 105005, Россия.

Рассмотрены уединенные волновые пакеты, ответвляющиеся от состояния покоя, на поверхности идеальной несжимаемой жидкости под ледяным покровом. Ледяной покров смодулирован геометрически нелинейной упругой пластиной Кирхгофа — Лява, свободно плавающей на поверхности жидкости, а идеальная жидкость — системой уравнений Эйлера с дополнительным поверхностным давлением, обусловленным наличием упругой пластины. Установлено, что на поверхности жидкости имеют место различные типы уединенных волн, в том числе уединенные волновые пакеты, для которых фазовая скорость равна групповой. Показано, что при увеличении глубины жидкости резонансное волновое число смещается в дефокусирующую область, где не существует уединенных волновых пакетов.

Ключевые слова: ледяной покров, упругая пластина, модуль Юнга, бифуркация, резонансное волновое число, модуляционная неустойчивость, уединенные волны.

Введение. Первые результаты о распространении волн под ледяным покровом, моделируемым бесконечно протяженной упругой пластиной, были опубликованы в работе [1]. С тех пор линейные волновые процессы в жидкости под упругой пластиной являлись предметом исследования в большом числе работ (например, [2–9]). Нелинейным волнам под упругой пластиной посвящены исследования [10–19]. Ледяной покров моделировали с помощью однородного упругого слоя конечной толщины, что позволило учесть эффекты внутреннего деформирования, согласованные с волновыми движениями в жидкости [20–23]. В работах [24, 25] рассмотрена вращающаяся стратифицированная жидкость под ледяным покровом.

Течение в слое жидкости конечной глубины под ледяным покровом, индуцируемое как плоскими, так и пространственными мультиполями различных порядков, изучено в работе [26]. Отдельно рассмотрены случаи импульсного источника, источника постоянной интенсивности и источника с интенсивностью, меняющейся по гармоническому закону; получены выражения для потенциала скорости в жидком слое и их асимптотики. В работе [27] найдены волны, возникающие на ледяном покрове жидкости при различных импульсных

воздействиях. Рассмотрены импульсный точечный источник в толще жидкости; удар по ледяному покрову; начальный импульс, сообщаемый поверхности жидкости; начальное смещение ледяного покрова. В работе [28] те же авторы обобщают постановки задач [27]. Плоская задача о возмущении ледяного покрова движущимся в жидкости диполем исследована в статьях [29, 30], где найдена устанавливающаяся на ледяном покрове волна при длительном движении диполя и описан характер процесса ее установления.

Ниже будут рассмотрены некоторые свойства специальных волновых пакетов, представляющих собой уединенные волны, у которых скорость огибающей (групповая скорость) равна скорости монохроматических волн, распространяющихся под огибающей (фазовая скорость) на поверхности идеальной несжимаемой жидкости под ледяным покровом.

Основные этапы исследования. Анализ задачи о распространении волн в жидкости под ледяным покровом в настоящей работе выполнен в соответствии со следующими пунктами.

1. Определение критического значения параметра бифуркации, т. е. значения физического параметра задачи $\nu = \nu_0$, при малом возмущении $\mu = \nu - \nu_0$ которого наряду с нулевым решением система имеет нетривиальное решение.

2. Запись системы уравнений, описывающих бегущие волны, в виде конечномерной или бесконечномерной динамической системы:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathcal{A}\mathbf{w} + \mathcal{F}(\mu, \mathbf{w}), \quad (1)$$

где \mathbf{w} — неизвестная вектор-функция (точка над функцией обозначает производную по неограниченной пространственной координате, которая играет роль динамической переменной); $\mathcal{A}(\nu)$ — матрица или линейный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве (в случае бесконечномерной динамической системы), $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\nu_0)$; а $\mathcal{F}(\mu, \mathbf{w})$ — нелинейная вектор-функция своих аргументов.

3. Определение собственных значений линейного оператора $\mathcal{A}(\nu)$ в окрестности мнимой оси при изменении *спектрального параметра* $\mu = \nu - \nu_0$. Бифуркации возникают при пересечении собственными значениями $\mathcal{A}(\nu)$ мнимой оси. В силу обратимости системы уравнений собственные значения $\mathcal{A}(\nu)$ выходят на мнимую ось парами при изменении параметра ν и являются симметричными относительно мнимой и вещественной осей. В монографии [31] рассмотрены следующие типы бифуркаций: бифуркация, отвечающая простому резонансу, или бифуркация из нулевого волнового числа; бифуркация, отвечающая резонансу длинной и короткой волн; бифуркация 1:1-резонанса, бифуркация сложного 1:1-резонанса. Рас-

смаатриваемые в настоящей статье уединенные волновые пакеты являются продуктами 1:1-резонанса.

4. Понижение порядка динамической системы. Формально понижение порядка осуществляют с помощью разбиения неизвестных функций на сумму двух слагаемых. Одно из этих слагаемых представляет собой линейную комбинацию присоединенных и собственных векторов, соответствующих центральному спектру (мнимым собственным значениям), другое — является малой следующего порядка по амплитуде волн и представляет собой определяемую функцию от первого слагаемого. Уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты упомянутой линейной комбинации, являются системой пониженного порядка. В случае бесконечномерной динамической системы указанное понижение порядка возможно лишь при выполнении дополнительных условий, которым должен удовлетворять оператор \mathcal{A} [31–34].

5. Исследование системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных после понижения порядка. Для этого используют асимптотические методы, в частности приближение уравнений пониженного порядка их квазинормальными формами. Уравнения в квазинормальной форме, отвечающие всем четырем перечисленным типам бифуркаций, являются интегрируемыми [35–37]. В работе [31] даны формулировки общих результатов теории квазинормальных форм для обратимых систем, а также вывод уравнений в квазинормальной форме в рассматриваемых случаях.

6. Доказательство грубости решений типа уединенной волны асимптотических уравнений, т. е. доказательство того факта, что решения полной системы, приближаемые решениями асимптотических уравнений, являются также уединенными волнами соответствующих типов. Эти доказательства, как правило, сводятся к использованию теоремы о неявной функции в различных формах. Для бифуркации 1:1-резонанса такое доказательство известно (см., например, [31]).

Несмотря на то что исследуется конкретная задача, настоящий анализ обладает определенной общностью. Полученные результаты качественно основываются на некоторых общих свойствах целого класса обратимых задач и количественно определяются лишь небольшим числом параметров. Инвариантность относительно преобразования Галилея сводит поиск бегущих волн к решению стационарной задачи, которая описывается квазилинейной системой эллиптических уравнений. В рассматриваемом случае эти уравнения зависят от трех безразмерных параметров: λ , b и γ , где λ равен обратному квадрату числа Фруда, b — аналог числа Бонда для капиллярных сил и определяется предварительным напряжением пластины, а γ — параметр, характеризующий жесткость пластины на изгиб.

Вековое уравнение в данном случае имеет вид

$$\sigma \cos \sigma - (\lambda - b\sigma^2 + \gamma\sigma^4) \sin \sigma, \quad (2)$$

а решают его для $\sigma \in \mathbb{C}$. Факт, что для каждого фиксированного значения параметров имеется лишь конечное число корней уравнения (2) на мнимой оси, а также обстоятельство, что если σ — корень, то $-\sigma$ — тоже корень, следуют из общих свойств основной системы уравнений.

Поскольку возникновение волновых структур из состояния покоя будет обусловлено бифуркацией при критических значениях параметров, когда число чисто мнимых корней уравнения (2) изменяется, тип этих структур будет общим для круга задач, обладающих в некотором смысле общими свойствами. Эти свойства определяются типами квазинормальных форм (см. например, [31]). Разница между формой бегущих волн в таких задачах зависит от количества и значений физических параметров задачи.

Модель ледяного покрова. Эксперименты показывают, что ледяной покров в естественных условиях ведет себя как тонкая упругая пластина [38]. В связи с этим будем рассматривать его в рамках модели упругой пластины Кирхгофа — Лява, относительно которой приняты следующие допущения:

существует нейтральная (серединная) поверхность, деформации растяжения или сжатия которой являются наперед заданными и не изменяются при изгибе;

каждое волокно упругого слоя, которое ортогонально нейтральной поверхности в недеформированном состоянии, остается прямым и ортогональным этой поверхности после деформации;

напряженно-деформированное состояние подчиняется закону Гука, т. е. деформации малы и пластина является физически линейной.

Будем предполагать, что пластина находится в предварительно напряженном состоянии, которое характеризуется горизонтальным напряжением σ_0 (рис. 1). Это напряжение обусловлено начальным

растяжением (или сжатием) срединной поверхности, которое в связи с изложенным выше остается неизменным при изгибных деформациях.

Математическое описание упругой пластины проведем в плоских сечениях (ξ, ζ) локальной криволинейной системы координат, жестко связанной с срединной поверхностью пласти-

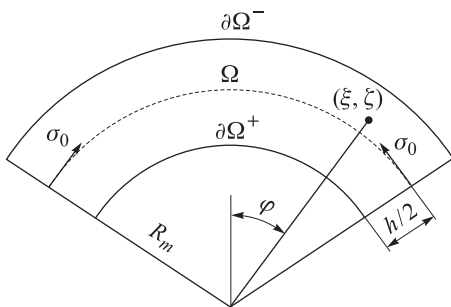


Рис. 1. Фрагмент упругой пластины в локальной системе координат

ны. В недеформированном состоянии эта система (с точностью до сдвига) совпадает с глобальной декартовой системой координат Oxz . Координата ξ изменяется вдоль дуг окружностей, параллельных локальным фрагментам срединной поверхности, а ζ — в ортогональном направлении к срединной поверхности (см. рис. 1).

В недеформированном состоянии упругий слой толщиной h занимает искривленную область $\Omega = \{(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2 / -h < 2\zeta < h\}$, имеющую границу $\partial\Omega = \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^- = \{2\zeta = -h\} \cup \{2\zeta = h\}$ (см. рис. 1). Изгиб пластины будем рассматривать в плоскости (x, z) .

Из первых двух свойств пластины Кирхгофа — Лява следует

$$d\xi = (R_m + \zeta) d\varphi; \quad dx = \frac{d\varphi}{R_m}, \quad (3)$$

так как на срединной поверхности длина дуги совпадает с длиной прямолинейного элемента срединной поверхности пластины, свободной от изгиба (см. рис. 1).

Из выражений (3) находим

$$d\xi = \left(1 + \frac{\zeta}{R_m}\right) dx, \quad (4)$$

откуда имеем

$$d\xi^2 = g_{11} dx^2, \quad (5)$$

где $g_{11} = \left(1 + \zeta/R_m\right)^2 dx^2$.

Из формулы (5) получим выражение для компоненты $\epsilon_{\xi\xi\xi}$ тензора деформаций:

$$\epsilon_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}(g_{11} - 1) = \frac{\zeta}{R_m} + O\left(\frac{\zeta^2}{R_m^2}\right). \quad (6)$$

Будем предполагать $h/R_m \ll 1$ и принимать во внимание лишь члены порядка $O(h/R_m)$, пренебрегая членами порядка $O(h^2/R_m^2)$.

Согласно закону Гука, в случае изгиба в плоскости (x, z) выражение для компоненты $\sigma_{\xi\xi\xi}$ изгибных напряжений имеет вид

$$\sigma_{\xi\xi\xi} = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\epsilon_{\xi\xi\xi} + \tilde{\lambda}\epsilon_{\zeta\zeta\zeta}, \quad (7)$$

где $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ — коэффициенты Ламе.

При изгибе тонкой пластины компоненты напряжений, имеющие по крайней мере один из индексов ζ , значительно меньше, чем компоненты $\sigma_{\xi\xi}$, возникающие в результате сжатия и растяжения внутри пластины [39]. Поэтому при определении распределения внутренних напряжений в изогнутой пластине для заданных граничных условий можно положить $\sigma_{\zeta\zeta} = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\epsilon_{\zeta\zeta} + \tilde{\lambda}\epsilon_{\xi\xi} = 0$, откуда имеем

$$\epsilon_{\zeta\zeta} = -\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}\epsilon_{\xi\xi}. \quad (8)$$

Подставляя выражение (8) в (7), с учетом (6) получаем, что при чистом изгибе

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{E_0}{R_m(1 - \nu_0^2)}\zeta,$$

где E_0 — модуль Юнга,

$$E_0 = \tilde{\mu} \frac{3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}};$$

ν_0 — коэффициент Пуассона льда,

$$\nu_0 = \frac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})}.$$

Изгибающий момент M связан с радиусом кривизны R_m средней поверхностью следующим соотношением:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \zeta \sigma_{\xi\xi}(\zeta) d\zeta = \frac{J}{R_m},$$

где

$$J = \frac{E_0 h^3}{12(1 - \nu_0^2)}.$$

Формулировка задачи. Изучаются плоскопараллельные потенциальные движения идеальной несжимаемой жидкости. Слой жидкости толщиной H и плотностью ρ занимает область $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 / 0 < z < \eta(x)\}$, которая имеет границу $\partial D = \partial D^+ \cup \partial D^- = \{z = \eta(x) \cup z = 0\}$. Массовая плотность пластины ρ_s , поверхность раздела вода—лед задана уравнением $z = \eta(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Динамическое граничное условие на поверхности раздела определяется балансом сил внутри упругого слоя:

$$\begin{aligned} \partial_{\xi}\sigma_{\xi\xi} + \partial_{\zeta}\sigma_{\xi\zeta} &= 0, \quad \partial_{\xi}\sigma_{\xi\zeta} + \partial_{\zeta}\sigma_{\zeta\zeta} + f = \rho_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (\xi, \zeta) \in \Omega; \\ \sigma_{\xi\zeta} &= -p_0, \quad \sigma_{\xi\xi} = 0, \quad (\xi, \zeta) \in \partial\Omega^+; \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= -p, \quad \sigma_{\xi\zeta} = 0, \quad (\xi, \zeta) \in \partial\Omega^-, \end{aligned} \quad (9)$$

где $f = -\sigma_0/R_m$ — плотность силы растяжения; p_0, p — давление соответственно на верхней стороне пластины (атмосферное давление) и на поверхности раздела пластина—вода.

Умножив первое уравнение (9) на ζ и проинтегрировав полученное выражение по ζ , используя граничные условия, получим соотношение между перерезывающей силой N и изгибающим моментом M :

$$\partial_{\xi}M = N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\xi\zeta} d\zeta.$$

Интегрирование второго уравнения (9) дает уравнение баланса сил, действующих на пластину:

$$p = p_0 + \frac{\sigma_0 h}{R_m} - \partial_{xx}^2 M + \rho_s h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (10)$$

Кривизна срединной поверхности выражается следующим образом [10]:

$$\frac{1}{R_m} = - \frac{\partial_{xx}\eta}{[1 + (\partial_x\eta)^2]^{3/2} - h\partial_{xx}\eta/2}.$$

Рассмотрим бегущую волну, которая распространяется налево вдоль оси x со скоростью V . В системе координат, движущейся со скоростью V , компоненты вектора скорости частиц $\mathbf{v} = (u, v)$ удовлетворяют асимптотическим условиям $u \rightarrow V, v \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$.

Выполним следующие замены переменных:

$$(x, z) \rightarrow \left(\frac{x}{H}, \frac{z}{H} \right), \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{H}, \quad \mathbf{v} \rightarrow \frac{\mathbf{v}}{V}.$$

В новых безразмерных переменных система уравнений Эйлера для бегущих волн с учетом уравнения (10) имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \bar{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (x, z) \in D; \\ \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \lambda \eta - b \kappa_1 + \gamma \kappa_2 + c \partial_{xx} \eta = \text{const}, \quad (x, z) \in \partial D^+; \\ \partial_x \eta u - v = 0, \quad v = 0, \quad (x, z) \in \partial D^-; \\ \mathbf{v} \rightarrow (1, 0), \quad \eta(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (11)$$

Постоянные λ , b , γ и c определяются здесь соотношениями

$$\lambda = \frac{gH}{V^2}; \quad b = \frac{\sigma_0 h}{\rho H V^2}; \quad \gamma = \frac{J}{\rho V^2 H^3}; \quad c = \frac{\rho_s}{\rho} \frac{V^2}{gH} a, \quad a = \frac{h}{H}.$$

а функции κ_j , $j = 1, 2$, имеют вид

$$\kappa_1 = \frac{\partial_{xx} \eta}{[1 + (\partial_x \eta)^2]^{3/2} - a \partial_{xx} \eta}; \quad \kappa_2 = \partial_{xx}^2 \frac{\partial_{xx} \eta}{[1 + (\partial_x \eta)^2]^{3/2} - a \partial_{xx} \eta}.$$

Будем рассматривать предел тонкой пластины, т. е. отбросим члены порядка $O(h/H)$, полагая, таким образом, $a = c = 0$. По сравнению с работами [36], [40], где исследовали капиллярно-гравитационные волны, в третьем уравнении [11] появляется дополнительное слагаемое $\gamma \kappa_2$; кроме того, знак b может быть теперь любым.

Определим новые «полулагранжевы» координаты $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ по формуле $y = \psi(x, z) = z + \Psi$, где $\psi(x, z)$ — функция тока, нормированная с помощью среднего расхода $Q = VH$. Кроме того, отобразим поле скоростей $\mathbf{v} = (u, v) = (1 + U, \mathcal{V})$ на векторное поле $\bar{\mathbf{w}} = (w_1, w_2)$ [33]:

$$w_1 = \frac{1}{2} [(1 + U)^2 + \mathcal{V}^2 - 1]; \quad w_2 = \frac{\mathcal{V}}{1 + U},$$

где U , \mathcal{V} предполагаются малыми, $U = \partial_z \Psi$, $\mathcal{V} = -\partial_x \Psi$. Оба этих преобразования являются обратимыми, как и отображение $D \rightarrow D' = \mathbb{R} \times (0, 1)$.

В новых переменных система уравнений (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_x \boldsymbol{\delta} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{w}), \quad y = 1; \\ \partial_x \mathbf{w} = \mathcal{K}(\mathbf{w}) \partial_y \mathbf{w}, \quad x, y \in D'. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta} = (\delta, \delta_1, \delta_2), \quad \delta = w_2(1); \\ \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3), \quad f_j(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{w}) = \delta_j, \quad j = 1, 2; \end{aligned}$$

$$f_3(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{w}) = \frac{1}{\gamma} \{ b\delta_1 - (1 + \delta^2)^{3/2} [w_1(1) + \lambda([\hat{g}] - 1)] \} + P;$$

$$\hat{g} = \frac{(1 + w_2^2)^{1/2}}{(1 + 2w_1)^{1/2}}, \quad [\hat{g}] = \int_0^1 \hat{g} \, dy;$$

$$P = \frac{3\delta_1^3 + 9\delta\delta_1\delta_2}{1 + \delta^2} - \frac{15\delta^2\delta_1^3}{(1 + \delta^2)^2};$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_2\hat{g}^{-1} & -\hat{g}^{-3} \\ \hat{g} & w_2\hat{g}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отклонение η поверхности задано в виде

$$\eta = 1 - [w_1] + \dots$$

Определим вектор $\mathbf{w} = (\boldsymbol{\delta}, \mathbf{w})^T$ и рассмотрим его как образ при отображении $\mathbb{R} \ni x \rightarrow X = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{L}^2(0, 1)$, где $\mathbb{L}^2(0, 1) = L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$; $L^2(0, 1)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций на интервале $(0, 1)$. Запишем систему (12) в виде

$$\partial_x \mathbf{w} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{w} + \mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}), \quad (13)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, b, \gamma)$.

Оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ можно определить по действию на вектор-функцию \mathbf{w} :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{w} = \{ \delta_1, \delta_2, \gamma^{-1}(b\delta_1 - w_1(1) + \lambda[w_1]), -\partial_y w_2, \partial_y w_1 \},$$

а нелинейную вектор-функцию $\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w})$ как

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}) = \{ \mathbf{f}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{w}), \mathcal{K}(\mathbf{w}) \partial_y \mathbf{w} \} - \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{w}.$$

Область $D(\mathcal{A})$ определения оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ имеет вид

$$D(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}^1(0, 1) \cap \{ w_2(0) = 0, w_2(1) = \delta \}$$

и не зависит от $\boldsymbol{\lambda}$. Здесь $\mathbb{H}^1(0, 1) = H^1(0, 1) \times H^1(0, 1)$; $H^1(0, 1)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций на интервале $(0, 1)$ вместе со своими производными.

Образ оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ является линеаризацией $\mathbf{f}(\boldsymbol{\delta}, \mathbf{w})$, $\mathcal{K}(\mathbf{w}) \partial_y \mathbf{w}$ в точке $\mathbf{w} = 0$ при фиксированных значениях параметров

$(\lambda, b, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Системы уравнений (12) и (13) обратимы по отношению к изометрии $\mathcal{R} = \text{diag}(-1, 1, -1, 1, -1)$.

Легко увидеть, что \mathcal{G} отображает $D(\mathcal{A})$ в гильбертово пространство $Z_0 = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{L}^2(0, 1)$, которое является замкнутым подпространством X .

В заключение приведем явный вид сопряженного оператора $\mathcal{A}^*(\lambda)\mathbf{w}$:

$$\mathcal{A}^*(\lambda)\mathbf{w} = (-w_1(1), \delta + bw_2(1), \delta_1, -\partial_y w_2 + \lambda w_2(1), \partial_y w_1),$$

имеющего область определения $D(\mathcal{A}^*) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}^1(0, 1) \cap \{\delta_2 = \gamma w_2(1), w_2(0) = 0\}$.

Спектр и резонансы. Можно показать, что оператор $\mathcal{A}(\lambda)$ имеет компактную резольвенту и, следовательно, его спектр состоит из собственных значений, каждое из которых имеет конечную кратность [41]. Эти собственные значения являются корнями уравнения (2). Вследствие вещественности $\mathcal{A}(\lambda)$ и обратимости уравнений (13) спектр $\mathcal{A}(\lambda)$ симметричен относительно вещественной и мнимой осей в комплексной плоскости спектрального параметра. Из общей теории [33] и теоремы о резольвентных оценках, доказанной в работе [31], следует, что все ограниченные решения (12), лежащие в достаточно малой окрестности нулевого решения, могут быть найдены из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые связаны с центральной частью спектра $\mathcal{A}(\lambda)$, состоящей из конечного числа мнимых собственных значений. Следовательно, множество нетривиальных решений (12) будет изменяться качественно только при тех значениях параметров, при которых изменяется упомянутая центральная часть спектра.

Для нахождения значений $(\hat{\lambda}, \hat{b}, \hat{\gamma})$ в пространстве параметров $(\lambda, b, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, соответствующих наступлению бифуркации, необходимо определить те значения, при которых уравнение (2) имеет мнимые корни кратности больше 1, иными словами, происходят резонансы (собственные значения \mathcal{A} оказываются на мнимой оси парама).

Положим $\sigma = iq$. Тогда уравнение (2) можно переписать в виде

$$q \operatorname{cth} q = \lambda + bq^2 + \gamma q^4. \quad (14)$$

Корень кратности 2 должен удовлетворять уравнению

$$\operatorname{cth} q - q \operatorname{sh}^{-2} q + q + 4\gamma q^3, \quad (15)$$

а кратности 3 — уравнению

$$\operatorname{sh}^{-2} q(2q \operatorname{cth} q - 1) + 12\gamma q^2. \quad (16)$$

Отметим, что если $q \neq 0$, то соотношения (15), (16) определяют b и γ как функций от q , в то время как уравнение (14) фиксирует λ в зависимости от q . Однако $q = 0$ отвечает $\lambda = 1$ в силу справедливости разложения

$$\operatorname{cth} q = q^{-1} + q/3 - (1/45)q^3 + O(q^5)$$

для q в окрестности нуля. Таким образом, для получения полной картины расположения действительных корней уравнения (14) необходимо рассмотреть следующие два случая.

1. Корень $q = 0$.

При $\lambda = 1$ и произвольных b и γ соотношения (14), (15) выполняются, а (16) — нет. Необходимо также различать случаи $b > 1/3$ и $b < 1/3$. При $b > 1/3$ $q = 0$ — единственное решение (14), в то время как при $b < 1/3$ имеет место пара дополнительных простых корней $\pm q$, $q \neq 0$.

Таким образом, при $\hat{\lambda} = 1$, $b \neq 1/3$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ имеем собственные значения в центральном спектре, которые имеют кратность 2, и один зависимый параметр определяет бифуркацию коразмерности 1. В противоположность случаю коразмерности 1 случай $\lambda = 1$, $b = 1/3$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ приводит к корню уравнения (2) $q = 0$ кратности 4, в результате чего возникает бифуркация коразмерности 2 (единственным свободным параметром является γ).

2. Корень $q \neq 0$.

В результате решения соотношений (14), (15) получаем поверхность, параметризованную следующим образом:

$$\hat{\lambda} = \gamma q^4 + \frac{q \operatorname{cth} q}{2} + \frac{q^2 \operatorname{sh}^{-2} q}{2}; \quad \hat{b} = -2\gamma q^2 + \frac{\operatorname{cth} q}{2q} - \frac{\operatorname{sh}^{-2} q}{2}. \quad (17)$$

Асимптотики параметров $\hat{\lambda}$ и \hat{b} на поверхности (17) имеют вид

$$\hat{\lambda} = 1 + \left(\frac{1}{45} + \gamma \right) q^4 + O(q^6), \quad \hat{b} = \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{45} + 2\gamma \right) q^2 + O(q^4), \quad q \rightarrow 0;$$

$$\hat{\lambda} \sim \gamma q^4 + \frac{q}{2}, \quad \hat{b} \sim -2\gamma q^2 + \frac{1}{2q}, \quad q \rightarrow \infty.$$

При $q \neq 0$ множество коразмерности 2, на котором происходит бифуркация, представляет собой кривую, заданную в виде

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \frac{3q\text{cth}q}{8} + \frac{3q^2\text{sh}^{-2}q}{8} + \frac{q^3\text{cth}q\text{sh}^{-2}q}{4}, \\ \hat{b} &= \frac{3\text{cth}q}{4q} - \frac{\text{sh}^{-2}q}{4} - \frac{q\text{cth}q\text{sh}^{-2}q}{2}, \\ \hat{\gamma} &= -\frac{\text{cth}q}{8q^3} - \frac{\text{sh}^{-2}q}{8q^2} + \frac{\text{cth}q\text{sh}^{-2}q}{4q}.\end{aligned}\tag{18}$$

Асимптотики параметров $\hat{\lambda}$, \hat{b} и $\hat{\gamma}$ на этой кривой имеют вид

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= 1 + O(q^6), \quad \hat{b} = \frac{1}{3} + O(q^4), \quad \hat{\gamma} = -\frac{1}{45} + O(q^2), \quad q \rightarrow 0; \\ \hat{\lambda} &\sim \frac{3q}{8}, \quad \hat{b} \sim \frac{3}{4q}, \quad \hat{\gamma} \sim -\frac{1}{8q^3}, \quad q \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Бифуркация коразмерности 2 отвечает появлению на мнимой оси в плоскости спектрального параметра пары комплексно-сопряженных собственных чисел кратности 3 при критических значениях параметров $\hat{\lambda}$, \hat{b} и $\hat{\gamma}$, которые удовлетворяют (18). Легко увидеть, что эта бифуркация имеет место только при отрицательных γ , и поэтому здесь не будет рассмотрена, как не имеющая физического смысла. Заметим только, что эта бифуркация является предельным случаем бифуркации коразмерности 1, которая происходит также при отрицательных γ . Так, если $\gamma < 0$, то параметризующая поверхность (17) отрицательна и находится в окрестности кривой (18); имеет место одна пара двукратных и одна пара простых комплексно-сопряженных собственных значений на мнимой оси. Эта бифуркация соответствует сложному 1:1-резонансу и играет важную роль при спонтанном нарушении размерности волновых структур [31].

Семейство уединенных волновых пакетов. Поведение собственных значений оператора $\mathcal{A}(\lambda)$ на мнимой оси показано на рис. 2. Собственные значения, пары которых совпадают на мнимой оси, показаны черными кружками по обе стороны от поверхности (17) и над плоскостью $\lambda = 1$ и белыми кружками — под плоскостью $\lambda = 1$. Бифуркации этого типа впервые изучены в работах [36, 40] для $b \geq 0$ и $\gamma = 0$. Здесь нет ограничений на знак b , хотя рассмотрение случая отрицательных значений этого параметра не добавляет ничего нового к качественному поведению волн.

Будем рассматривать систему уравнений (13) в окрестности критического множества (17), определяемого изменением только параметра $\lambda = \hat{\lambda} + \mu$, $\mu \ll 1$. Обозначим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\hat{\lambda}),$$

$$\mathcal{F}(\mu, \mathbf{w}) = \mathcal{G}((\hat{\lambda} + \mu, \hat{b}, \hat{\gamma}), \mathbf{w}),$$

где $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}, \hat{b}, \hat{\gamma})$. Тогда система уравнений (13) может быть преобразована к виду (1).

Для понижения порядка системы уравнений (13) используем теорему о центральном многообразии (см., например, [31]). Для бесконечномерных динамических систем эта теорема справедлива при условии выполнения оценок убывания резольвенты оператора \mathcal{A} . Справедливость этих оценок в настоящем случае установлена в [31].

Разберем случай возникновения семейства уединенных волн, ответвляющихся от состояния покоя для 1:1-резонанса, когда центральная часть спектра \mathcal{A} состоит из пары ненулевых двукратных мнимых собственных значений $\pm iq$. В этом случае размерность центрального подпространства равна 4.

Собственные и присоединенные векторы оператора \mathcal{A} при $\sigma = \pm iq$ имеют вид

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} iq^{-1} \operatorname{th} q \\ -\operatorname{th} q \\ -iq \operatorname{th} q \\ -\operatorname{ch} qy / (q \operatorname{ch} q) \\ \operatorname{ish} qy / (q \operatorname{ch} q) \end{pmatrix}; \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} q^{-1} \\ i + iq^{-1} \operatorname{th} q \\ -q - 2q \operatorname{th} q \\ iy \operatorname{sh} qy / (q \operatorname{ch} q) \\ y \operatorname{ch} qy / (q \operatorname{ch} q) \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{A}\phi_0 = iq\phi_0; \quad \mathcal{A}\phi_1 = iq\phi_1 + \phi_0.$$

Нелинейная вектор-функция $\mathcal{F}(\lambda, \mathbf{w})$ (см. выражение (1)) при $\mu = 0$ определяется так:

$$\mathcal{F}(0, \mathbf{w}) = N_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + N_3(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) + \dots,$$

где точки обозначают члены высшего порядка,

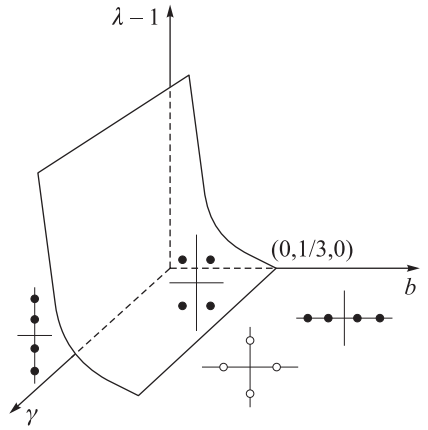


Рис. 2. Поверхности $\lambda = 1$, $\hat{\lambda}$ и \hat{b} , определяемые выражениями, на которых происходит бифуркация в пространстве параметров

$$N_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\hat{\lambda}}{2\hat{\gamma}}(3[w_1^2] + [w_2^2]) \\ w_2w_{1y} - 3w_1w_{2y} \\ -w_1w_{1y} + w_2w_{2y} \end{pmatrix};$$

$$N_3(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{N} \\ w_1w_2w_{1y} - \frac{3}{2}w_{2y}(w_1^2 - w_2^2) \\ \frac{1}{2}(3w_1^2 + w_2^2)w_{1y} + w_1w_2w_{2y} \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{N} = -\frac{3}{2\hat{\gamma}}\delta^2(w_1(1) - \hat{\lambda}[w_1]) + \frac{\hat{\lambda}}{2\hat{\gamma}}(5[w_1^3] + [w_1w_2^2]) + 3\delta_1^3 + 9\delta\delta_1\delta_2.$$

Все ограниченные решения (12) записываются в виде

$$\mathbf{w}_0 = A\phi_0 + B\phi_1 + A^*\phi_0^* + B^*\phi_1^* + \Phi(\mu, A, B, A^*, B^*), \quad (19)$$

где $\Phi(0, A, B, A^*, B^*) = (A^2\Phi_{2000} + \dots) + |A|^2\Phi_{1100} + \dots$ — нелинейная вектор-функция своих аргументов.

Функция Φ в правой части выражения (19) отвечает преобразованию от приведенных уравнений к уравнениям в квазинормальной форме, которые для 1:1-резонанса, комбинированного с обратимостью, будут следующие [31]:

$$\begin{aligned} \partial_x A &= iqA + B + iAR \left[AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B) \right]; \\ \partial_x B &= iqB + AQ \left[AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B) \right] + iBR \left[AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (20) имеют два первых интеграла

$$K_0 = \frac{i}{2}(AB^* - A^*B); \quad H_0 = |B|^2 - G(\mu, |A|^2, K_0),$$

где

$$G(\mu, |A|^2, K_0) = \int_0^{|A|^2} Q(\mu, s, K_0) ds.$$

Коэффициент q_1 полинома Q во втором уравнении (20) связан с собственными значениями линеаризованной правой части этого уравнения соотношением

$$\sigma = iq \pm \sqrt{q_1 \mu} + O(\mu).$$

В рассматриваемом случае

$$q_1 = \frac{1}{(2bq + 4\gamma q^3) \operatorname{cth} q + 6\gamma q^2 + b - 1} > 0$$

и имеет следующие асимптотики:

$$q_1 \sim \frac{1}{(4/45 + 4\hat{\gamma})q^2}; \quad q \rightarrow 0;$$

$$q_1 \sim \frac{1}{4\hat{\gamma}q^2}, \quad q \rightarrow \infty,$$

а q_2 определяется из уравнения [42]

$$q_2 = \langle 2N_2(\phi_0, \Phi_{1100}) + 2N_2(\phi_0^*, \Phi_{2000}) + 3N_3(\phi_0, \phi_0, \phi_0^*), \psi_1 \rangle. \quad (21)$$

Для ψ_1 справедливо выражение

$$\mathcal{A}^* \psi_1 = -iq\psi_1,$$

где

$$\psi_1 = r(q) \begin{pmatrix} -(\hat{b} + \hat{\gamma}q^2) \operatorname{sh} q \\ -iq\hat{\gamma} \operatorname{sh} q \\ \hat{\gamma} \operatorname{sh} q \\ i(-\operatorname{ch} qy + \hat{\lambda}q^{-1} \operatorname{sh} q) \\ \operatorname{sh} qy \end{pmatrix};$$

$$r(q) = \frac{q^4 \operatorname{cth} q}{\hat{\lambda}q \operatorname{ch} q - \hat{b}q^3 \operatorname{ch} q - 3\hat{\gamma}q^5 \operatorname{ch} q - \hat{\lambda} \operatorname{sh} q - 3\hat{\gamma}q^4 \operatorname{sh} q}.$$

Асимптотики $r(q)$ имеют вид

$$r(q) = -\frac{1}{4\left(\frac{1}{45} + \hat{\gamma}\right)q^2} + O(1), \quad q \rightarrow 0;$$

$$r(q) \sim -\frac{1}{2\hat{\gamma}} \exp(-q), \quad q \rightarrow \infty.$$

Векторные функции Φ_{1100} и Φ_{2000} удовлетворяют уравнениям [42]

$$\mathcal{A}\Phi_{1100} + 2N_2(\phi_0, \phi_0^*) = 0; \quad \mathcal{A}\Phi_{2000} + N_2(\phi_0, \phi_0) = 2iq\Phi_{2000}, \quad (22)$$

т. е.

$$\Phi_{1100} = \frac{\hat{\lambda}}{(\hat{\lambda} - 1)q^3 \operatorname{ch}^2 q} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q + \operatorname{sh} 2q \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\Phi_{2000} = \frac{1}{q^2 \operatorname{ch}^2 q} \begin{pmatrix} i\alpha \operatorname{sh} 2q \\ -2q\alpha \operatorname{sh} 2q \\ -4i\alpha q^2 \operatorname{sh} 2q \\ 1 - (\alpha - 1/2) \operatorname{ch} 2q \\ i\alpha \operatorname{sh} 2q \end{pmatrix};$$

$$\alpha = \frac{2(2 + \operatorname{ch} 2q)}{-5 - \operatorname{ch} 2q + 6q \operatorname{cth} q - 18\hat{\gamma} q^3 \operatorname{sh} 2q}.$$

Асимптотики α имеют вид

$$\alpha \sim -\frac{3}{18\left(\frac{1}{45} + \hat{\gamma}\right)q^4}, \quad q \rightarrow 0;$$

$$\alpha \sim -\frac{1}{9\hat{\gamma}q^3}, \quad q \rightarrow \infty.$$

Из уравнения (21) находим

$$q_2 = -\frac{r(q)}{16q^4(\hat{\lambda} - 1)\operatorname{ch}^3 q} \left(\hat{\lambda} - 9\hat{\lambda}^2 + 16q^2 - 12\hat{\lambda} \operatorname{ch} 2q + 12\hat{\lambda}^2 \operatorname{ch} 2q + \right. \\ \left. + 11\hat{\lambda} \operatorname{ch} 4q - \hat{\lambda}^2 \operatorname{ch} 4q + 14q \operatorname{sh} 2q + 16\alpha q \operatorname{sh} 2q + 18\hat{\lambda} q \operatorname{sh} 2q - \right. \\ \left. - 16\alpha \hat{\lambda} q \operatorname{sh} 2q + q \operatorname{sh} 4q + 4\alpha q \operatorname{sh} 4q - \hat{\lambda} q \operatorname{sh} 4q - 4\alpha \hat{\lambda} q \operatorname{sh} 4q \right),$$

т. е. q_2 — кусочно-монотонная функция. Асимптотики для q_2 будут следующие:

при $\hat{\gamma} \neq 0, \hat{b} \neq 0$

$$q_2 \sim \frac{19}{8\left(\frac{1}{45} + \hat{\gamma}\right)^2} q^8, \quad q \rightarrow 0; \quad q_2 \sim -\frac{3}{8}, \quad q \rightarrow \infty;$$

при $\hat{\gamma} = 0$

$$q_2 \sim \frac{38475}{8q^8}, \quad q \rightarrow 0; \quad q_2 \sim \frac{11}{2}, \quad q \rightarrow \infty,$$

при $\hat{b} = 0$

$$q_2 \sim \frac{171}{2q^4}, \quad q \rightarrow 0; \quad q_2 \sim -\frac{79}{132}, \quad q \rightarrow \infty.$$

При $\gamma > 0$ функция q_2 меняет знак, что является типичным не только при $b = 0$, но также для любого фиксированного γ (рис. 3).

Поведение решений радикально изменяется, когда q_2 меняет знак. Более того, в вырожденном случае (q_2 лежит в малой окрестности нуля) качественная картина малых ограниченных решений определяется коэффициентом при членах следующего порядка малости в разложении полинома Q из (20) и отличается от случая конечного q_2 [43].

Пусть в уравнениях (20) $A = \rho_0 \exp i(qx + \theta_0), \quad B = \rho_1 \exp \times i(iqx + \theta_1)$. После указанной замены представим их в виде [37]

$$\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 = 4\{u_0[G(\mu, u_0, K_0) + H_0] - K_0^2\}; \quad (23)$$

$$\frac{d(\theta_1 - \theta_0)}{dx} = -K_0(u_0 u_1)^{-1} [u_0 Q(\mu, u_0, K_0) + G(\mu, u_0, K_0) + H_0],$$

где $u_0 = \rho_0^2; \quad u_1 = \rho_1^2$.

Стационарные решения (23), а следовательно, и периодические решения (20) определяются кратными корнями полинома

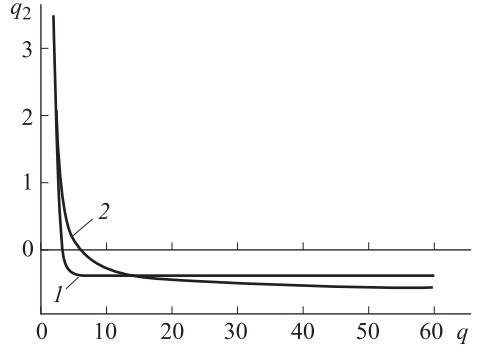


Рис. 3. Зависимость $q^2(q)$ при $\gamma = 0,002$ (1) и при $\hat{b} = 0$ (2)

$$f(u_0) = u_0 [G(\mu, u_0, K_0) + H_0] - K_0^2. \quad (24)$$

После преобразований $H_0 = \mu^2 h_0$, $u_0 = |\mu| v_0$, $K_0 = |\mu|^{3/2} k_0$ получаем

$$f = |\mu|^3 g_0(v_0, h_0, k_0) + O(|\mu|^{7/2}),$$

где $g_0(v_0, h_0, k_0) = v_0 h_0 + \text{sign } \mu q_1 v_0^2 - \frac{q_2}{2} v_0^3 - k_0^2$.

Таким образом, кратные корни полинома (24) в низшем порядке по μ совпадают с кратными корнями полинома $g_0(v_0, h_0, k_0)$ и лежат на кривых в плоскости (k_0, h_0) , которые параметрически задаются уравнениями

$$k_0 = \pm \sqrt{q_2 v_0^3 - \text{sign } \mu q_1 v_0^2}; \quad h_0 = \frac{3}{2} q_2 v_0^2 - 2 \text{sign } \mu q_1 v_0. \quad (25)$$

При $q_2 > 0$, $\mu > 0$ в точке $k_0 = 0, h_0 = 0$ множества (25) имеем гомоклиническое решение

$$u_0 = \frac{2\mu q_1}{q_2} \text{ch}^{-2} \sqrt{\mu q_1} \cdot x + O(|\mu|^{3/2}).$$

Форма поверхности раздела вода–лед представляет собой уединенный волновой пакет

$$\eta = 1 \pm \frac{2thq}{q^2} \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \cdot \text{ch}^{-1} \sqrt{\mu q_1} x \cdot \cos qx + O(|\mu|^{3/2}).$$

На рис. 4 показаны формы двух уединенных волновых пакетов для $\gamma = 0$ (гравитационно-капиллярные волны) и $b = 0$ (гравитационно-изгибные волны при отсутствии начального напряжения в ледяном покрове).

При $q_2 < 0$, $\mu < 0$ в точке $k_0 = 0, h_0 = -q_1^2/(2q_2)$ множества (25) получаем так называемые темные солитоны, для которых

$$u_0 = \frac{q_1 \mu}{q_2} \text{th}^2 \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} x + O(|\mu|^{3/2}),$$

а форма поверхности раздела имеет вид

$$\eta = 1 \pm \frac{2thq}{q^2} \sqrt{\frac{\mu q_1}{q_2}} \cdot \text{th} \sqrt{\frac{-\mu q_1}{2}} \cdot x \sin qx + O(|\mu|^{3/2}).$$

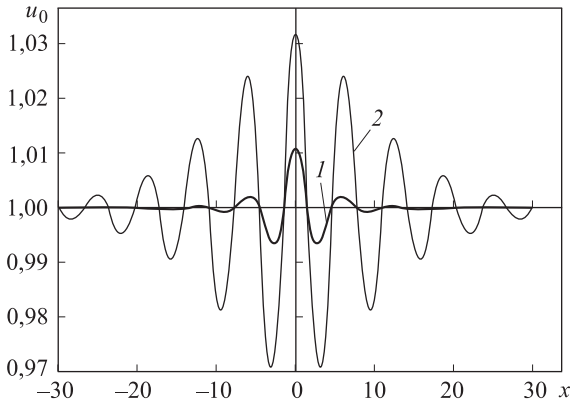


Рис. 4. Форма уединенных волновых пакетов при $\gamma = 0$ (1) и $\hat{b} = 0$ (2) для $q = 1$, $\mu = 0,01$

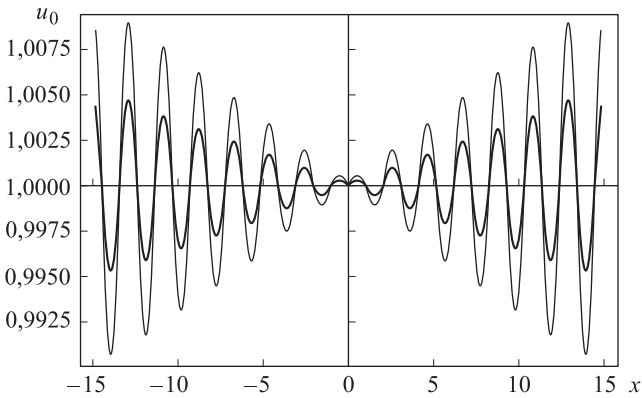


Рис. 5. Форма темных солитонов при $\gamma = 0,1$ (1); $\gamma = 0,2$ (2) для $q = 3$, $\mu = -0,01$

Сравнительная форма поверхности раздела в этом случае для двух различных значений γ представлена на рис. 5.

Дефокусировка волновых пакетов. В результате бифуркации 1:1-резонанса из параметрического множества, заданного уравнениями (17), возникают уединенные волновые пакеты. Существует связь между волнами огибающих нелинейного уравнения Шредингера и уединенными волновыми пакетами, возникающими в результате 1:1-резонанса в описывающей волновые процессы системе уравнений [44–46]. Именно уравнение Шредингера в самофокусирующей области имеет семейство нестационарных решений — солитонов огибающей, которые характеризуются двумя скоростями: огибающей и волнового пакета (наполнения), распространяющегося под огибающей. Солитоны огибающей представляют собой продукт модуляционной неустойчивости (самофокусировки) несущей периодической волны.

Уединенный волновой пакет является членом семейства солитонов огибающей в окрестности точки дисперсионной кривой, в которой фазовая и групповая скорости совпадают. При тех волновых числах, для которых коэффициент q_2 при ведущей нелинейности в квазинормальной форме отрицателен, периодические волны малой амплитуды устойчивы и, как следствие, система обладает темными солитонами вместо уединенных волновых пакетов. Присутствие таких волн известно на поверхности раздела двух бесконечных слоев жидкости с капиллярными эффектами [43]. Переход от уединенных волновых пакетов к темным солитонам в этом случае имеет место, когда коэффициент q_2 меняет знак, т. е. при $R = R_c = (21 - 8\sqrt{5})/11$, где R — критическое отношение плотностей верхнего и нижнего слоев. При $R < R_c$ существуют уединенные волновые пакеты, что означает, что в окрестности резонансного волнового числа $q = (1 + R)/2$ имеет место самофокусировка периодических волн [43]. При $R > R_c$ уединенный волновой пакет замещается темным солитоном — индикатором модуляционной устойчивости. Таким образом, при переходе R через R_c фокусирующая окрестность резонансного волнового числа q замещается дефокусирующей.

В случае гравитационно-изгибных волн коэффициент q_2 также меняет знак. Физический механизм перехода резонансного волнового числа в дефокусирующую область, естественно, отличается от случая двухслойной жидкости. Рассмотрим случай $b = 0$, т. е. когда в слое льда начальное напряжение $\sigma_0 = 0$. Поверхность, определяемая уравнениями (17), вырождается при этом в плоскую кривую (в плоскости $b = 0$), заданную параметрически следующим образом:

$$\hat{\lambda} = \frac{3q \operatorname{cth} q}{4} + q^2 \frac{sh^{-2} q}{4}, \quad \hat{\gamma} = \frac{\operatorname{cth} q}{4q^3} - \frac{sh^{-2} q}{4q^2}. \quad (26)$$

Функции $\hat{\lambda}$ и $\hat{\gamma}$ вида (26) монотонно возрастают и монотонно убывают, подчиняясь, соответственно асимптотикам

$$\hat{\lambda} = 1 + \frac{q^2}{6} + O(q^3), \quad \hat{\gamma} \sim \frac{1}{6q^2}, \quad q \rightarrow 0;$$

$$\hat{\lambda} \sim \frac{3q}{4}, \quad \hat{\gamma} \sim \frac{1}{4q^3}, \quad q \rightarrow \infty.$$

Коэффициент q_2 обращается в нуль при критическом безразмерном волновом числе $q_c \approx 5,79$.

При волновых числах $q < q_c$ существуют уединенные волновые пакеты и, следовательно, в этой области имеет место самофокуси-

ровка периодической волны. При $q > q_c$ вместо уединенных волновых пакетов возникают темные солитоны и несущие периодические волны, отвечающие волновым числам из этой области, являются устойчивыми. Из определения безразмерных параметров λ и γ следует, что

$$H = 4\sqrt{\frac{J\lambda}{\rho g \gamma}}, \quad V = \sqrt[8]{g^3 \frac{J}{\rho \lambda^3 \gamma^3}}, \quad (27)$$

а из монотонности $\hat{\lambda}$, $\hat{\gamma}$ — что глубина H возрастает с увеличением q . Таким образом, при $H > H_c$ (где H_c — критическая глубина, соответствующая $q_2 = 0$) волновое число $q > q_c$ и уединенные волновые пакеты замещаются темными солитонами. Другими словами, окрестность каждого резонансного волнового числа q становится дефокусирующей. Критические значения $\lambda_c \approx 4,34$ и $\gamma_c \approx 0,013$ определяют подстановкой q_c в выражения (26). Резонансные волновые числа q нормированы по глубине слоя жидкости H , т. е. $q = kH$, где k — физическое волновое число. Критические значения параметров V_c , H_c и k_c для некоторых толщин h ледяного покрова приведены в таблице.

Значения критических параметров в зависимости от толщины ледяного покрова

$h, \text{ м}$	$V_c, \text{ м/с}$	$H_c, \text{ м}$	$k_c, \text{ м/с}^{-1}$
0,01	2,23	2,15	2,69
0,1	5,28	12,12	0,48
0,4	8,88	34,28	0,17
0,8	11,52	57,65	0,1
1	12,53	68,14	0,085

Модуль Юнга E_0 и коэффициент Пуассона ν_0 для льда равны соответственно 5 000 МПа и 0,35. Если при увеличении глубины жидкости H число q переходит через q_c слева, то оно перестает быть фокусирующим, а система не содержит семейство уединенных волновых пакетов и уединенных волн огибающих с волновыми длинами, близкими к $2\pi q^{-1}$.

Заключение. Таким образом, если фокусирующая область и существует где либо еще на дисперсионной кривой, она не содержит волновых чисел, при которых групповая скорость равняется фазовой. Из таблицы следует, что рассматриваемый эффект можно наблюдать как для искусственных, так и для естественных бассейнов. Для тол-

щин ледяного покрова около 1 см критическая глубина, скорость и длина волны могут быть воспроизведены в эксперименте. Толщина льда около 1 м требует больших значений критических параметров, которые, тем не менее, достижимы в природных бассейнах: больших реках, озерах и морях.

При начальных напряжениях $\sigma_0 \neq 0$ имеется дополнительный параметр в резонансном множестве вида (17) и критическое резонансное волновое число q_c зависит от γ . При этом q_c увеличивается при уменьшении γ . Для фиксированного $\gamma > 0$ критические параметры $\lambda_c(\gamma)$ и $b_c(\gamma)$ задаются уравнениями (17) с $q = q_c$. Критические значения физических параметров H_c , V_c и σ_{0c} однозначно определяются формулами (27) и равенством

$$\sigma_{0c} = \frac{b_c}{h} \sqrt{\frac{J\rho g}{\lambda_c \gamma}}.$$

Как и в случае $b = 0$, увеличение глубины жидкости влечет за собой повышение резонансного волнового числа q для фиксированного γ , а следовательно, имеет место аналогичный эффект смещения резонансного волнового числа в дефокусирующую область. Единственным отличием является то, что необходимо фиксировать дополнительный параметр γ при увеличивающемся H .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00335 и № 12-05-00889).

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoker J.J. *Water Waves*. New York, Wiley-Interscience, 1957, 600 с.
2. Duffy D. G. The Response of Floating Ice to a Moving Vibrating Load. *Cold Reg. Sci. Tech.*, 1991, vol. 20, pp. 51–64.
3. Duffy D. G. On the Generation of Internal Waves Beneath Sea Ice by a Moving Load. *Cold Reg. Sci. Tech.*, 1996, vol. 24, pp. 29–39.
4. Марченко А.В., Семенов А.Ю. Краевые волны в мелкой жидкости под ледовым покровом с трещиной. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1994, № 4, с. 185–189.
5. Марченко А.В., Морозов Е.Г., Музылев С.В., Шестов А.С. Взаимодействие коротких внутренних волн с ледяным покровом в арктическом фиорде. *Океанология*, 2010, т. 50, № 1, с. 23–31.
6. Музылев С.В. Краевые волны подо льдом у прямолинейного берега над наклонным дном. *Океанология*, 2006, т. 46, № 4, с. 500–506.
7. Schulkes R.M.S.M., Hisking R. J., Sneyd A.D. Waves Due to a Steadily Moving Source on a Floating Ice Plate. Part 2. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 180, pp. 297–318.
8. Squire V.A. On the Critical Angle for Ocean Waves Entering Shore Fast Ice. *Cold Reg. Sci. Tech.*, 1984, vol. 10, pp. 59–68.

9. Tuck E. O. An Inviscid Theory for Sliding Flexible Sheets. *J. Austral. Math. Soc.* 1982, vol. B23, pp. 403–415.
10. Forbes L.K. Surface Waves of Large Amplitude Beneath an Elastic Sheet. High Order Series Solution. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 169, pp. 409–428.
11. Forbes L.K. Surface Waves of Large Amplitude Beneath an Elastic Sheet. Galerkin Solutions. *J. Fluid Mech.*, 1988, vol. 188, pp. 491–508.
12. Bakholdin I., Il'ichev A. Instability and Collapse of Waveguides on the Water Surface under the Ice Cover. *Eur. J. Mech. B. Fluids*, 2003, vol. 22, no. 3, pp. 291–304.
13. Ильичев А.Т. Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор). *Изв. РАН, МЖГ*, 2000, № 2, с. 3–27.
14. Ильичев А.Т., Марченко А.В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1989, № 1, с. 88–95.
15. Ильичев А.Т., Марченко А.В. Формирование нелинейных волноводов при резонансном взаимодействии трех поверхностных волн. *ПММ*. 1997, т. 61, с. 190–201.
16. Марченко А.В. О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом. *ПММ*, 1988, т. 52, с. 230–235.
17. Марченко А.В., Сибгатуллин Н.Р. О резонансном взаимодействии волн в тяжелой жидкости, находящейся под упругой пластиной. *Вестн. Моск. универ., сер. матем., мех*, 1986, № 4, с. 94–97.
18. Марченко А.В., Сибгатуллин Н.Р. Об эволюции волновых пакетов при трехволновом взаимодействии в тяжелой жидкости под ледяным покровом. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1987, № 6, с. 57–64.
19. Parau E., Dias F. Nonlinear Effects in the Response of a Floating Ice Plate to a Moving Load. *J. Fluid. Mech.*, 2001, vol. 437, pp. 325–336.
20. Brevdo L., Il'ichev A. Exponential Neutral Stability of a Floating Ice Layer. *Z. angew. Math. Phys.*, 1998, vol. 49, pp. 401–419.
21. Brevdo L., Il'ichev A. Multi-Modal Destabilization of a Floating Ice Layer by Wind Stress. *Cold Reg. Sci. Tech.*, 2001, vol. 33, pp. 77–89.
22. Brevdo L., Il'ichev A. Uni-Modal Destabilization of a Visco-Elastic Floating Ice Layer by Wind Stress. *Eur. Journ. Mech. A.Solids*, 2006, vol. 25, pp. 509–525.
23. Strathdee J., Robinson W.H., Haines E.M. Moving Loads on Ice Plates of Finite Thickness. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 226, pp. 37–71.
24. Музылев С.В. Волны в океане под ледяным покровом: основы теории и модельные задачи. *Современные проблемы динамики океана и атмосферы*. Москва, ГУ Гидрометцентр России, Триада ЛТ, 2010, с. 315–345.
25. Музылев С.В., Одуло А.Б. Волны во вращающейся стратифицированной жидкости у наклонного берега. *ДАН СССР*, т. 250, № 2, с. 331–335.
26. Chowdhury R.G., Mandal B.N. Motion Due to Fundamental Singularities in Finite Depth Water with an Elastic Solid Cover. *Fluid Dynam. Res.*, 2006, vol. 38, no. 4, pp. 224–240.
27. Lu D.Q., Dai S.Q. Generation of Transient Waves by Impulsive Disturbances in an Inviscid Fluid with an Ice-Cover. *Arch. Appl. Mech.*, 2006, vol. 76, no. 1–2, pp. 49–63.
28. Lu D.Q., Dai S.Q. Flexural and Capillary Gravity Waves Due to Fundamental Singularities in an Inviscid Fluid of Finite Depth. *Intern. J. Eng. Sci.*, 2008, vol. 46, no. 11, pp. 1183–1193.
29. Савин А.А., Савин А.С. Возмущение ледяного покрова движущимся в жидкости диполем. *Изв. РАН. МЖГ*, 2012, № 2, с. 3–10.

30. Ильичев А.Т., Савин А.А., Савин А.С. Установление волны на ледяном покрове над движущимся в жидкости диполем. *Докл. РАН*. 2012, т. 444, № 2, с. 156–159.
31. Ильичев А.Т. *Уединенные волны в моделях гидромеханики*. Москва, Физматлит, 2003.
32. Kirchgässner K. Wave Solutions of Reversible Systems and Applications. *J. Diff. Eqns*, 1982, vol. 45, pp. 113–127.
33. Mielke A. Reduction of Quasilinear Elliptic Equations in Cylindrical Domains with Applications. *Math. Meth. Appl. Sci*, 1988, vol. 10, pp. 501–566.
34. Vanderbauwhede A., Iooss G. Center Manifold Theory in Infinite Dimensions. *Dynamics Reported*, 1992, vol. 1, pp. 125–163.
35. Naragus-Courcelle M., И'ичев А. Three Dimensional Solitary Waves in the Presence of Additional Surface Effects. *Eur. J. Mech. B. Fluids*, 1998. vol. 17, pp. 739–768.
36. Iooss G., Kirchgässner K. Water Waves for Small Surface Tension: an Approach Via Normal Form. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser. A*, 1992, vol. 122. pp. 267–299.
37. Iooss G., Perouéme M.C. Perturbed Homoclinic Solutions in Reversible 1:1- Resonance Vector Fields. *J. Diff. Eqns*, 1993, vol. 102, pp. 62–88.
38. Müller A., Ettema R. Dynamic Response of an Icebreaker Hull to Ice Breaking. *In Proc. IAHR Ice Symp.*, Hamburg, 1984, vol. II, pp. 287–296.
39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория упругости*. М.: Наука, 1987, 247 с.
40. Iooss G., Kirchgässner K. Bifurcation D'ondes Solitaires en Présence D'une Faible Superficie. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, 1990, vol. 311, pp. 265–268.
41. Каго Т. *Теория возмущений линейных операторов*. Москва, Мир, 1972, 739 с.
42. Dias F., Iooss G. Capillary-Gravity Solitary Waves with Damped Oscillations. *Physica D*, 1993, vol. 65, pp. 399–323.
43. Dias F., Iooss G. Ondes Solitaires «Noires» à l'Interface Entre Deux Fluides en Présence de Tension Superficielle. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1996, vol. 319. pp. 89–93.
44. Akylas T.R. Envelope Solitary Waves with Stationary Crests. *Phys. Fluids A*, 1993, vol. 5, pp. 789–791.
45. Grimshaw R., Malomed B., Benilov E. Solitary Waves with Damped Oscillatory Tails: an Analysis of the Fifth-Order Korteweg–de Vries Equation. *Physica D*, 1994, vol. 77, pp. 473–485.
46. Longuet-Higgins M.-S. Capillary-Gravity Waves of Solitary Type and Envelope Solitons on Deep Water. *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 252, pp. 703–711.

Статья поступила в редакцию 21.02.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

А.Т. Ильичев, А.А. Савин. Дефокусировка нелинейных волновых пакетов на ледяном покрове. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/611.html>

Ильичев Андрей Теймуразович — профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; ведущий научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова РАН; д-р физ.-мат. наук; автор более 80 научных работ в области механики сплошной среды; сфера научных интересов: нелинейные волны, гидродинамическая устойчивость, теория фильтрации. e-mail: ilichev@mi.ras.ru

Савин Антон Александрович — родился в 1992 г., студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех статей, посвященных моделированию волн под ледяным покровом. e-mail: anton_savin@list.ru