

Влияние стратификации и глубины на поверхностные возмущения при обтекании препятствий морским течением

© И.Ю. Владимиров¹, Н.Н. Корчагин¹, А.С. Савин²

¹ Институт океанологии им. П.П. Ширшова, РАН, Москва 117997, Россия

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена структура поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводных препятствий потоком стратифицированной жидкости конечной глубины. В качестве препятствия выбран точечный диполь, локализованный в окрестности слоя скачка плотности как над ним, так и под ним. Показано, что скачок плотности может вызывать блокирующий эффект при распространении возмущений от обтекаемого препятствия к поверхности воды.

Ключевые слова: *поверхностные волны, обтекание препятствий, скачок плотности, двухслойный поток, диполь.*

Введение. Волновые движения в морской среде могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться обтеканием искусственных препятствий, например погруженных частей платформ, с которых осуществляется добыча углеводородов, или проложенных в море трубопроводов. Практический интерес к воздействию морских течений на подводные препятствия обусловлен тем, что при наличии стратификации водной толщи обтекаемое потоком препятствие генерирует как внутренние, так и поверхностные волны и, следовательно, испытывает дополнительное волновое сопротивление, расчет которого необходим при проектировании различных сооружений. Причем эти поверхностные возмущения несут информацию как о самих источниках возмущений, так и о характеристиках морской среды, и могут быть зарегистрированы с помощью специальных средств, прежде всего радиолокационных и оптических систем [1–4]. Для дальнейшего развития методов контролирующего мониторинга морских акваторий, основанных на получаемых средствами дистанционного зондирования поверхности моря данных, важно знать зависимость характера генерируемых подводными источниками поверхностных волн от стратификации потока и его глубины.

Генерации поверхностных волн от обтекаемых подводных препятствий в однородных и стратифицированных средах посвящены многочисленные исследования как в рамках лабораторных опытов, так и в теоретических работах [1, 5]. В этой ситуации может показаться,

что полнота исследования данной гидродинамической проблемы практически достигнута. Однако результаты теоретических решений задач о генерации поверхностных возмущений представлены в основном в самой общей интегральной форме, и их трудно проанализировать из-за сложных подынтегральных выражений. В этом случае общие интегральные решения дополнительно требуют разработки специальных методов их анализа и получения достаточно простых аналитических выражений, допускающих проведение на их основе численных расчетов параметров поверхностного волнения.

Проведенный анализ работ по рассматриваемой теме показал, что в природных средах и, прежде всего, в водах Мирового океана, есть еще не полностью изученные гидродинамические явления. Это относится к области влияния плотностных неоднородностей морской среды, особенностей рельефа дна и глубины моря на параметры поверхностных возмущений, возникающих при обтекании глубинных препятствий. Следует учесть, что в реальных условиях моря в структуре стратификации морской среды характерны проявления относительно резких перепадов плотности воды, связанные с наличием сезонного термоклина или иных часто возникающих скачков плотности. Поэтому представляет интерес исследование влияния плотностных неоднородностей воды на параметры поверхностных возмущений, особенно при обтекании препятствий вблизи скачков плотности. И здесь практически важно рассмотреть задачу о различии параметров поверхностных возмущений в зависимости от местоположения препятствия относительно скачка плотности: над скачком или под ним [6–10].

Настоящая работа является расширенным вариантом работы [9] и содержит более подробную процедуру решения. В частности, детально описано проведение контурного интегрирования в рассматриваемой задаче, что, на взгляд авторов, полезно для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области гидродинамики и океанологии.

Обтекание препятствия потоком со слоем скачка плотности воды. Пусть двухслойный поток идеальной жидкости, ограниченный горизонтальным дном, стационарно обтекает точечный диполь с моментом m (рис. 1). Обозначим толщину верхнего слоя H_1 , нижнего — H_2 , а их плотности соответственно ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Требуется определить волновую часть возмущений свободной границы, распространяющихся вниз по потоку. Препятствие локализовано вначале под границей раздела двух слоев (задача 1), затем над ней (задача 2). Ось Ox направим горизонтально по невозмущенной границе раздела слоев жидкости, а ось Oy — вертикально вверх. Задачи будем рассматривать в рамках теории малых возмущений.

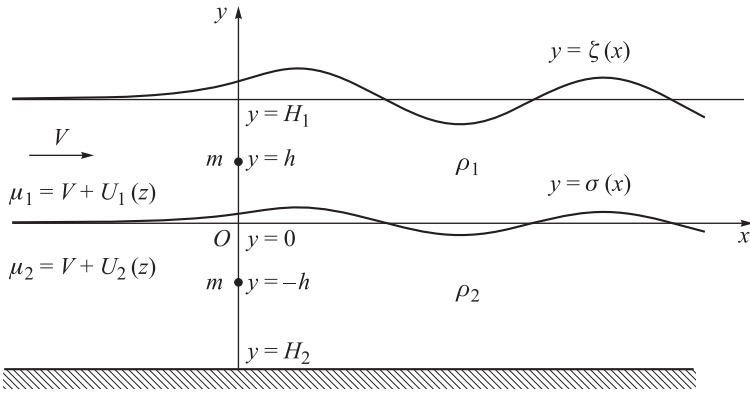


Рис. 1. Схема обтекания точечного диполя в двухслойном потоке с толщинами слоев H_1 и H_2 под скачком плотности ($y = -h$) и над ним ($y = +h$)

Задача 1. Рассмотрим случай, когда диполь находится под скачком плотности, т. е. в точке $(0, -h)$. Пусть скорость установившегося потока при $x \rightarrow -\infty$ равна V . Предполагая течение потенциальным, представим комплексно-сопряженную скорость в каждом из слоев в виде

$$\mu_k = V + U_k \quad (k = 1, 2),$$

где U_k — возмущение скорости μ , $U_k = u_k - iv_k$; u_k, v_k — горизонтальная и вертикальная компоненты возмущения вектора скорости, а $|U_k|/V \ll 1$.

Пусть $\zeta(x)$ — отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного положения, а $\sigma(x)$ — возвышение границы раздела слоев потока. Поскольку вдоль линии тока $y = H_1 + \zeta(x)$ вектор скорости в произвольной точке коллинеарен касательной в этой точке, то

$$\zeta'(x) = \frac{v_1}{V + u_1} \Big|_{y=H_1+\zeta(x)}.$$

Линеаризуя данное условие и перенося его со свободной поверхности на горизонтальную прямую $y = H_1$, получаем кинематическое граничное условие при $y = H_1$:

$$v_1 = V \zeta'(x). \tag{1}$$

Аналогично находим кинематическое условие вдоль поверхности раздела слоев, т. е. при $y = 0$:

$$v_1 = V\sigma'(x), v_2 = V\sigma'(x) \quad (2)$$

Отсюда имеем одно условие для вертикальных компонент скорости:

$$v_1 = v_2 \quad \text{при } y = 0. \quad (3)$$

Поскольку возмущения от источника затухают вверх по потоку, то интеграл Бернулли вдоль линии тока $y = H_1 + \zeta(x)$ можно записать следующим образом:

$$\frac{|\mu_1^2|}{2} + \frac{p_0(x)}{\rho_1} + g[H_1 + \zeta(x)] = \frac{V^2}{2} + \frac{p_0^{(\infty)}}{\rho_1} + gH_1,$$

где $p_0(x)$ — давление вдоль свободной поверхности; g — ускорение свободного падения; $p_0^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_0(x)$.

Считая давление постоянным вдоль всей свободной поверхности, получаем динамическое условие на ее границе:

$$\zeta(x) = \frac{V^2 - |\mu_1|^2}{2g} \Big|_{y=H_1+\zeta(x)},$$

которое процедурой линеаризации при $y = H_1$ преобразуется к виду

$$\zeta(x) = -\frac{V}{g} u_1. \quad (4)$$

Дифференцируя уравнение (4) и исключая величину $\zeta'(x)$ с помощью выражения (1), приходим к граничному условию для компонент вектора скорости при $y = H_1$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu v_1 = 0, \quad (5)$$

где $\nu = \frac{g}{V^2}$.

Интегралы Бернулли, записанные для линий тока на верхней и нижней сторонах поверхности раздела слоев $y = \sigma(x)$, выглядят следующим образом:

$$p_1(x) + \frac{\rho_1}{2} |\mu_1^2| + \rho_1 g \sigma(x) = p_1^{(\infty)} + \frac{\rho_1}{2} V^2 \quad \text{при } y = \sigma^+(x);$$

$$p_2(x) + \frac{\rho_2}{2} |\mu_2^2| + \rho_2 g \sigma(x) = p_2^{(\infty)} + \frac{\rho_2}{2} V^2 \quad \text{при } y = \sigma^-(x),$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$ — давления вдоль соответствующих сторон поверхности раздела слоев; $p_1^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_1(x)$; $p_2^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_2(x)$.

Поскольку при переходе через поверхность разрыва касательных скоростей давление непрерывно, $p_1(x) = p_2(x)$, $p_1^{(\infty)} = p_2^{(\infty)}$ и два предыдущих равенства могут быть приведены к одному условию для компонент скорости при $y = \sigma(x)$:

$$\frac{\rho_1}{2} [2Vu_1 + u_1^2 + v_1^2] + \rho_1 g \sigma(x) = \frac{\rho_2}{2} [2Vu_2 + u_2^2 + v_2^2] + \rho_2 g \sigma(x).$$

Пренебрегая в этом соотношении квадратами малых величин u_k и v_k ($k=1,2$) и перенося его на невозмущенное положение скачка плотности, получаем линеаризованное динамическое условие на границе раздела слоев при $y = 0$:

$$\rho_1 [Vu_1 + g\sigma(x)] = \rho_2 [Vu_2 + g\sigma(x)].$$

Проводя операцию дифференцирования с учетом $\sigma'(x)$ из выражения (2), приходим к граничному условию для возмущений скорости потока на слое скачка плотности при $y = 0$:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu v_1 \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \nu v_2 \right). \quad (6)$$

Кроме того, на дне бассейна при $y = -H_2$ должно быть выполнено условие непротекания:

$$v_2 = 0. \quad (7)$$

Перепишем соотношения (3), (5)–(7) соответственно в терминах возмущений комплексно-сопряженной скорости:

$$\text{Im} \left(i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right) = 0 \quad \text{при } y = H_1; \quad (8)$$

$$\delta \text{Im} \left(i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right) = \text{Im} \left[i \frac{dU_2}{dz} - \nu U_2 \right] \quad \text{при } y = 0; \quad (9)$$

$$\text{Im} U_1 = \text{Im} U_2 \quad \text{при } y = 0; \quad (10)$$

$$\text{Im} U_2 = 0 \quad \text{при } y = -H_2, \quad (11)$$

где $\delta = \rho_1/\rho_2$; $z = x + iy$.

Таким образом, исходная задача сведена к отысканию функций $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющих граничным условиям (8)–(11). Причем функция $U_1(z)$ регулярна в области $-\infty < y < +\infty$, $0 < y < H_1$, а $U_2(z)$ — в области $-\infty < y < +\infty$, $-H_2 < y < 0$ всюду за исключением точки $z = -ih$, в которой она имеет полюс второго порядка (в этой точке расположен диполь). Возмущение свободной поверхности по отношению к ее равновесному положению можно вычислить с помощью динамического условия (4) на границе верхнего слоя.

Будем искать комплексно-сопряженную скорость $U_1(z)$ в виде ее разложения в интеграл Фурье по волновым числам, а $U_2(z)$ — как сумму комплексно-сопряженной скорости, индуцированной источником в безграничном потоке, и регулярной функции, представленной интегралом Фурье:

$$U_1 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(k)e^{ikz} + B(k)e^{-ikz}] dk; \quad (12)$$

$$U_2 = \frac{m}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{(z+ih)^2} + \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk \right\}, \quad (13)$$

где $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ — неизвестные функции.

Применив равенство

$$-\frac{1}{(z+ih)^2} = \begin{cases} \int_0^{\infty} k e^{-kh} e^{ikz} dk, & \text{если } y > -h; \\ \int_0^{\infty} k e^{kh} e^{-ikz} dk, & \text{если } y < -h, \end{cases}$$

получим из (13) выражения для функции $U_2(z)$ в областях нижнего слоя, находящихся соответственно над и под точкой локализации диполя:

$$U_2(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} \{ [ke^{-kh} + C(k)] e^{ikz} + D(k)e^{-ikz} \} dk, & \text{если } y > -h; \\ \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} \{ C(k)e^{ikz} + [ke^{kh} + D(k)] e^{-ikz} \} dk, & \text{если } y < -h. \end{cases} \quad (14)$$

Подставив формулы (12) и (14) для комплексно-сопряженных скоростей $U_1(z)$ и $U_2(z)$ в граничные условия (8)–(11), перепишем последние в виде

$$\int_0^{\infty} \left\{ k \left[A(k)e^{-kH_1} + B(k)e^{kH_1} \right] + \nu \left[A(k)e^{-kH_1} - B(k)e^{kH_1} \right] \right\} \sin kx \, dk = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ \delta \left[k \left(A(k) + B(k) \right) + \nu \left(A(k) - B(k) \right) \right] - k \left[ke^{-kh} + C(k) + D(k) \right] - \right. \\ \left. - \nu \left[ke^{-kh} + C(k) - D(k) \right] \right\} \sin kx \, dk = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \left[A(k) - B(k) - ke^{-kh} - C(k) + D(k) \right] \sin kx \, dk = 0;$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ C(k)e^{kH_2} - \left(ke^{kh} + D(k) \right) e^{-kH_2} \right\} \sin kx \, dk = 0.$$

Выполнение этих равенств эквивалентно обращению в нуль интегральных сомножителей. Отсюда имеем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных функций $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$:

$$(k + \nu)e^{-kH_1} A(k) + (k - \nu)e^{kH_1} B(k) = 0;$$

$$\delta(k + \nu)A(k) + \delta(k - \nu)B(k) - (k + \nu)C(k) - (k - \nu)D(k) = k(k + \nu)e^{kh};$$

$$A(k) - B(k) - C(k) + D(k) = ke^{-kh};$$

$$e^{kH_2} C(k) - e^{-kH_2} D(k) = ke^{k(h-H_2)},$$

решение которой дает следующие выражения для $A(k)$ и $B(k)$:

$$A(k) = 2k^2(k - \nu)e^{kH_1} \operatorname{ch} k(H_2 - h) \times \\ \times \left\{ (1 - \delta)(k^2 - \nu^2) \operatorname{ch} k(H_1 - H_2) + \left[(1 + \delta)k^2 + (1 - \delta)\nu^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch} k(H_2 + H_1) - 2k\nu \operatorname{sh} k(H_2 + H_1) \right\}^{-1};$$

$$B(k) = -2k^2(k + \nu)e^{-kH_1} \operatorname{ch} k(H_2 - h) \times \\ \times \left\{ (1 - \delta)(k^2 - \nu^2) \operatorname{ch} k(H_1 - H_2) + \left[(1 + \delta)k^2 + (1 - \delta)\nu^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch} k(H_2 + H_1) - 2k\nu \operatorname{sh} k(H_2 + H_1) \right\}^{-1}.$$

Подставив эти уравнения в соотношения (12) и (4) и воспользовавшись формулами для суммы и разности гиперболических функций, приходим к следующему интегральному представлению искомого возвышения свободной поверхности:

$$\zeta(x) = \frac{m}{\pi V} \times \int_0^{\infty} \frac{k^2 \operatorname{ch} k(H_2 - h) \cos kx dk}{\operatorname{ch} kH_1 \operatorname{ch} kH_2 \left\{ k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)v^2] \operatorname{th} kH_1 \operatorname{th} kH_2 - kv(\operatorname{th} kH_1 + \operatorname{th} kH_2) \right\}}.$$

Выбрав в качестве характерного вертикального масштаба толщину верхнего слоя H_1 , а в качестве горизонтального — величину $\nu^{-1} = V^2/g$, перейдем к безразмерным переменным:

$$X = \nu x; \quad Z = \frac{\zeta}{H_1}; \quad \xi = \frac{k}{\nu}; \quad M = \frac{m}{VH_1^2}; \quad E_1 = \nu H_1 = \frac{gH_1}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}_1^2};$$

$$E_2 = \nu H_2 = \frac{gH_2}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}_2^2}; \quad E_0 = \nu h = \frac{gh}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}_0^2}, \quad (15)$$

где $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_0$ — числа Фруда соответственно по глубине верхнего и нижнего слоев и расстоянию от диполя до невозмущенной поверхности раздела.

Тогда для $Z(X)$ получаем

$$Z(X) = \frac{ME_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(E_2 - E_0)\xi \cos X\xi d\xi}{\operatorname{ch} E_1\xi \operatorname{ch} E_2\xi \left\{ \xi^2 + [\delta\xi^2 + (1 - \delta)] \operatorname{th} E_1\xi \operatorname{th} E_2\xi - \xi(\operatorname{th} E_1\xi + \operatorname{th} E_2\xi) \right\}}. \quad (16)$$

Асимптотическое положение свободной поверхности вниз по потоку (при $X \rightarrow \infty$) определяется неотрицательными нулями знаменателя подынтегрального выражения в (16), т. е. неотрицательными корнями уравнения

$$\xi^2 + [\delta\xi^2 + (1 - \delta)] \operatorname{th} E_1\xi \operatorname{th} E_2\xi - \xi(\operatorname{th} E_1\xi + \operatorname{th} E_2\xi) = 0. \quad (17)$$

Введем параметр

$$\varepsilon = 1 - \delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

и запишем уравнение (17) в виде

$$f(\xi, E_1, E_2) = \varepsilon, \quad (18)$$

где

$$f(\xi, E_1, E_2) = \frac{\xi^2(1 + \operatorname{th} E_1 \xi \operatorname{th} E_2 \xi) - \xi(\operatorname{th} E_1 \xi + \operatorname{th} E_2 \xi)}{(\xi^2 - 1) \operatorname{th} E_1 \xi \operatorname{th} E_2 \xi}.$$

Обозначим

$$f_0(E_1, E_2) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi, E_1, E_2); \quad f_1(E_1, E_2) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial f(\xi, E_1, E_2)}{\partial \xi};$$

$$f_2(E_1, E_2) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f(\xi, E_1, E_2)}{\partial \xi^2}.$$

Проведя соответствующие преобразования, можно убедиться в справедливости равенств

$$f_0(E_1, E_2) = \frac{E_1 + E_2 - 1}{E_1 E_2};$$

$$f_2(E_1, E_2) = \frac{2(E_1^2 E_2 + E_1 E_2^2) - 2(E_1^2 + 3E_1 E_2 + E_2^2) + 6(E_1 + E_2 - 1)}{3E_1 E_2}$$

и, согласно четности функции f по переменной ξ ,

$$f_1(E_1, E_2) \equiv 0.$$

Как показывают численные эксперименты относительно поведения функции $f(\xi, E_1, E_2)$, имеют место утверждения: а) если $f_2(E_1, E_2) \leq 0$, то $f(\xi, E_1, E_2)$ монотонно убывает по ξ на полуинтервале $[0; 1)$; б) если $f_2(E_1, E_2) > 0$, то $f(\xi, E_1, E_2)$ имеет единственный максимум в точке $\xi_0(E_1, E_2) \in (0; 1)$, т. е. функция $f(\xi, E_1, E_2)$ возрастает при $\xi \in [0; \xi_0]$ и убывает при $\xi \in [\xi_0; 1)$. Кроме того, очевидно, что $\lim_{\xi \rightarrow 1^-} f(\xi, E_1, E_2) = -\infty$. Следовательно, поведение функции $f(\xi, E_1, E_2)$ на полуинтервале $[0; 1)$ определяется знаком ее второй производной при $\xi = 0$, и уравнение (17) может иметь не более двух корней на интервале $(0; 1)$.

В графическом виде анализ поведения и свойств функции $f(\xi, E_1, E_2)$ представлен на рис. 2. Здесь на плоскости $E_1 E_2$ изображена кривая Γ_2 , определяемая уравнением $f_2(E_1, E_2) = 0$, с горизонтальной и вертикальной асимптотами $E_1 = 1$ и $E_2 = 1$ (т. е. на Γ_2 $\lim_{E_2 \rightarrow 1^-} E_1 = \infty$ и $\lim_{E_1 \rightarrow 1^-} E_2 = \infty$). Кривая Γ_2 симметрична относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов и проходит через точку $(1; 1)$, в которой она пересекает биссектрису под прямым углом, а прямая $E_1 + E_2 = 2$, перпендикулярная упомянутой биссектрисе и так-

же проходящая через точку $(1;1)$, является касательной к Γ_2 . Уравнение $f_0(E_1, E_2) = 0$ задает в первом квадранте отрезок Γ_1 , соединяющий точки $(1;0)$ и $(0;1)$. Кривая Γ_2 и отрезок Γ_1 разбивают первую четверть на три области. В области Ω_2 , расположенной над Γ_2 , выполняются неравенства $f_2(E_1, E_2) > 0$ и $f_0(E_1, E_2) > 0$; в области Ω_1 , находящейся между Γ_2 и Γ_1 , функция $f_2(E_1, E_2) < 0$, а $f_0(E_1, E_2) > 0$; наконец, в области Ω_0 , являющейся треугольником с вершинами в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, функции $f_2(E_1, E_2) < 0$, $f_0(E_1, E_2) < 0$.

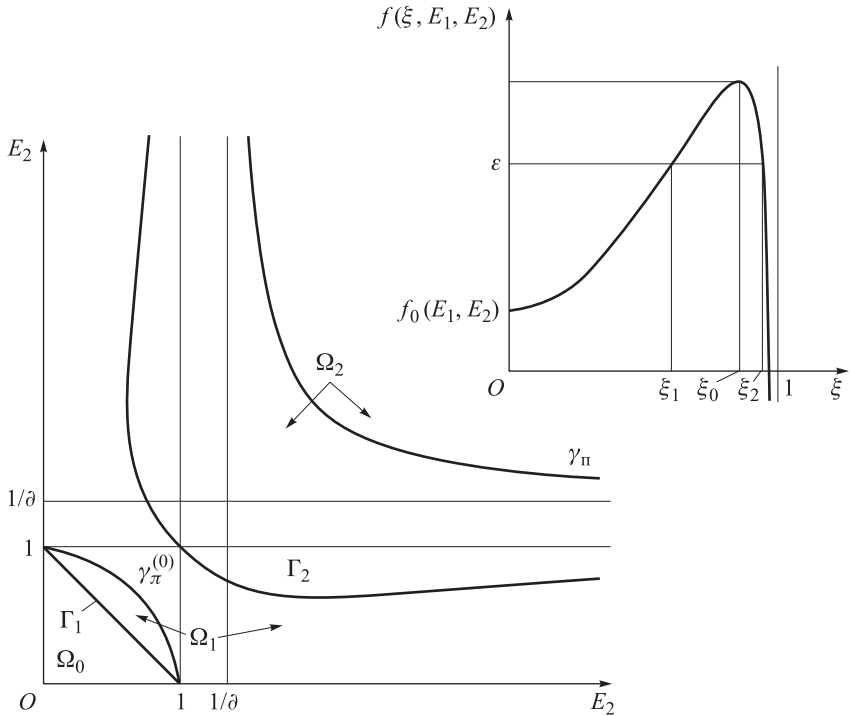


Рис. 2. Графическое представление анализа поведения и свойств функции $f(\xi, E_1, E_2)$

Теперь о количестве корней уравнения (18) на интервале $(0;1)$ в условиях $E_1 > 0$, $E_2 > 0$ и $0 < \varepsilon < 1$. Сначала сформулируем критерии существования двух корней. Ясно (см. рис. 2), что этот случай реализуется только тогда, когда функция $f(\xi, E_1, E_2)$ имеет локальный максимум в точке $\xi_0 \in (0;1)$ и значение параметра ε лежит внутри интервала $(f_0(E_1, E_2), f(\xi_0, E_1, E_2))$, т. е.

$$f_2(E_1, E_2) > 0;$$

$$f_0(E_1, E_2) < \varepsilon < \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E_1, E_2).$$

Тогда вопрос о наличии в уравнении (18) хотя бы одного корня на интервале (0;1) решается положительно в каждом из следующих двух случаев:

1) функция $f(\xi, E_1, E_2)$ имеет максимум в точке $\xi_0 \in (0;1)$, и величина ε не превосходит этот максимум, что равносильно выполнению неравенств

$$\begin{aligned} f_2(E_1, E_2) &> 0; \\ \varepsilon &\leq \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E_1, E_2); \end{aligned}$$

2) функция $f(\xi, E_1, E_2)$ монотонно убывает на рассматриваемом интервале (0;1) и $\varepsilon < \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E_1, E_2) = f_0(E_1, E_2)$, т. е.

$$\begin{aligned} f_2(E_1, E_2) &\leq 0; \\ \varepsilon &< f_0(E_1, E_2). \end{aligned}$$

Условия существования двух положительных корней в уравнении (18) имеют вид

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 - 1 &< \varepsilon E_1 E_2; \\ E_1 &> 1/\varepsilon, \quad E_2 > 1/\varepsilon, \end{aligned} \tag{19}$$

а наличие хотя бы одного положительного корня определяется неравенствами

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 - 1 &> \varepsilon E_1 E_2; \\ E_1 &> 1/\varepsilon, \quad E_2 > 1/\varepsilon. \end{aligned} \tag{20}$$

Решая неравенства (19), (20) относительно E , находим, что уравнение (18) имеет два положительных корня при

$$E_1 > E_{\text{кр}}^{\text{вн}} = \frac{\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2\varepsilon\beta} \tag{21}$$

и хотя бы одно положительное решение при

$$E_1 > E_{\text{кр}}^{\text{пов}} = \frac{\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2\varepsilon\beta}, \tag{22}$$

где $\beta = H_2/H_1$ или, согласно (15), $\beta = E_2/E_1$. Из выражений (21), (22) следует, что $E_{\text{кр}}^{\text{пов}} < E_{\text{кр}}^{\text{вн}}$ или $V_{\text{кр}}^{\text{пов}} > V_{\text{кр}}^{\text{вн}}$.

Используя сведения о корнях уравнения (17) и методы теории функции комплексной переменной, проведем процедуру интегрирования выражения (16) при $X > 0$ [6]. На рис. 3 представлена схема

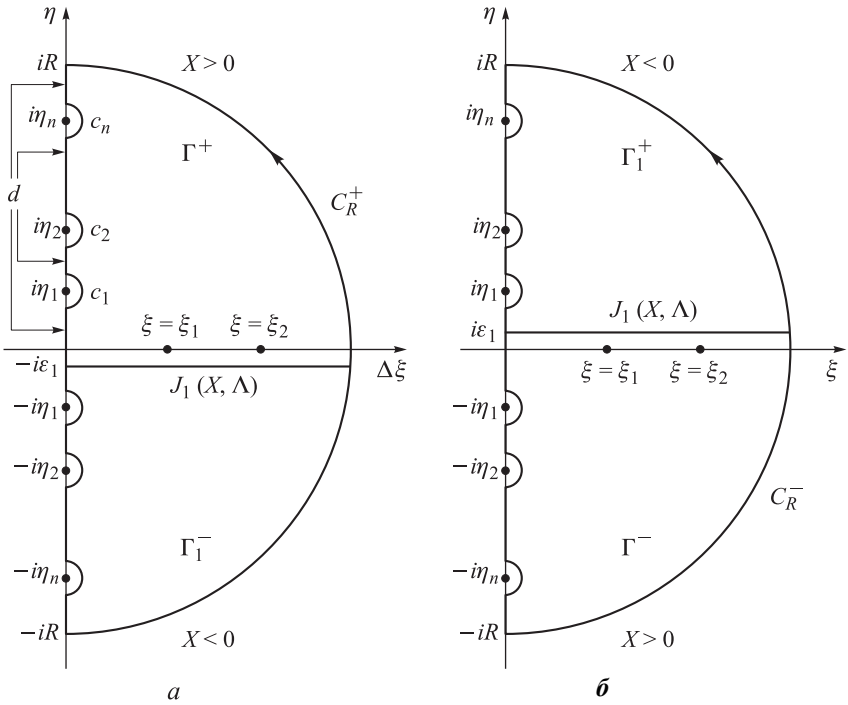


Рис. 3. Схема контуров интегрирования, используемых при вычислении $J_1(X, \Lambda)$ (а) и $J_2(X, \Lambda)$ (б)

контуров интегрирования этого соотношения на комплексной плоскости (ξ, η) . Помимо полюсов на положительной действительной оси подынтегральная функция в (16) имеет бесконечное множество полюсов на мнимой оси. В самом деле, подстановка $\xi = i\eta$ ($\eta \in R$) в (18) приводит к уравнению

$$[-\cos E_1\eta \cos E_2\eta + (1 - \varepsilon) \sin E_1\eta \sin E_2\eta]\eta^2 + \sin(E_1 + E_2)\eta \cdot \eta - \varepsilon \sin E_1\eta \sin E_2\eta = 0,$$

имеющему счетное множество действительных решений при любом $\beta = E_2/E_1$. Воспользовавшись тождеством $\cos X\xi = (e^{iX\xi} + e^{-iX\xi})/2$, представим (16) в виде

$$Z(X) = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \int_0^\Lambda F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^\Lambda F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi \right] = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} [J_1(X, \Lambda) + J_2(X, \Lambda)],$$

где

$$F(\xi) = \frac{ME_1}{\pi} \times \frac{\xi \operatorname{ch}(E_2 - E_0)\xi}{\operatorname{ch} E_1 \xi \operatorname{ch} E_2 \xi \left\{ \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E_1 \xi \operatorname{th} E_2 \xi - \xi (\operatorname{th} E_1 \xi + \operatorname{th} E_2 \xi) \right\}}.$$

Вначале рассмотрим случай положительных X и исследуем функцию $J_1(X, \Lambda)$. Для получения решения, затухающего вверх по потоку, сместим контур интегрирования для $J_1(X, \Lambda)$ в нижнюю полуплоскость, т. е. будем понимать J_1 как следующий предел:

$$J_1(X, \Lambda) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} Z_1(X, \Lambda, \varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + \Lambda} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi.$$

Для вычисления $Z_1(X, \Lambda, \varepsilon_1)$ рассмотрим вспомогательный контур Γ^+ , состоящий из отрезка $[-i\varepsilon_1; -i\varepsilon_1 + \Lambda]$; дуги C_R^+ окружности радиусом $R = \sqrt{\Lambda^2 + \varepsilon_1^2}$, соединяющей точку $-i\varepsilon_1 + \Lambda$ с точкой iR ; n полуокружностей $c_j: |\xi - i\eta_j| = \varepsilon_1, \operatorname{Re} \xi \geq 0$; системы отрезков $d = [-i\varepsilon_1; i(\eta_1 - \varepsilon_1)] \bigcup_{j=1}^{n-1} [i(\eta_j + \varepsilon_1); i(\eta_{j+1} - \varepsilon_1)] \bigcup [i(\eta_n + \varepsilon_1); iR]$, соединяющих соответствующие точки этих полуокружностей на мнимой оси, а также отрезков $[-i\varepsilon_1; i(\eta_1 - \varepsilon_1)]$ и $[i(\eta_n + \varepsilon_1); iR]$. Здесь $i\eta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) — все полюса функции $F(\xi)$, расположенные в верхней полуплоскости на мнимой оси и удовлетворяющие неравенству $\eta_j < R$.

Обозначим через ξ_j действительные положительные полюса функции $F(\xi)$, а через s — их число ($0 \leq s \leq 2$). Поскольку внутри контура Γ^+ функция $F(\xi)$ регулярна всюду за исключением особых точек ξ_j , то, согласно основной теореме теории вычетов, имеем

$$\int_{\Gamma^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_k} F(\xi) e^{iX\xi_k}. \quad (23)$$

Однако

$$\int_{\Gamma^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi = \int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + \Lambda} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \int_{C_R^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi -$$

$$-\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-X\eta_j} - \int_l F(i\eta) e^{-X\eta} id\eta, \quad (24)$$

где l — система отрезков d , повернутая на угол $\pi/2$ по направлению движения часовой стрелки относительно начала координат (т. е. l лежит на действительной оси).

Сравнивая выражения (23) и (24), находим

$$\begin{aligned} Z_1(X, \Lambda, \varepsilon_1) &= \pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{iX\xi_j} + \frac{\pi i}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-X\eta_j} - \\ &- \frac{1}{2} \int_{C_R^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_l F(i\eta) e^{-X\eta} id\eta. \end{aligned} \quad (25)$$

Теперь обратимся к интегралу

$$J_2(X, \Lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\Lambda F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi.$$

Сместив контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, будем искать этот интеграл как предел:

$$J_2(X, \Lambda) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} Z_2(X, \Lambda, \varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1 + \Lambda} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi.$$

Рассматривая вспомогательный контур Γ^- , симметричный Γ^+ относительно действительной оси (и ориентированный по направлению движения часовой стрелки), можно показать, что

$$\begin{aligned} Z_2(X, \Lambda, \varepsilon_1) &= -\pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{-iX\xi_j} - \frac{\pi i}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=-i\eta_j} F(\xi) e^{-X\eta_j} - \\ &- \frac{1}{2} \int_{C_R^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_l F(-i\eta) e^{-X\eta} id\eta, \end{aligned} \quad (26)$$

где C_R^- — дуга окружности, симметричная дуге C_R^+ .

Сложив почленно выражения (25) и (26), устремим в полученном соотношении величину ε_1 к нулю. Принимая во внимание, что $F(\xi)$ — четная функция и $\operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) = -\operatorname{res}_{\xi=-i\eta_j} F(\xi)$ ($j=1, 2, \dots, n$), придем к следующему равенству:

$$\begin{aligned}
 J_1(X, \Lambda) + J_2(X, \Lambda) &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (Z_1(X, \Lambda, \varepsilon_1) + Z_2(X, \Lambda, \varepsilon_1)) = \\
 &= -2\pi \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) \sin \xi_j X + \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{C_\Lambda^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_{C_\Lambda^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Поскольку в силу леммы Жордана

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{C_\Lambda^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi = 0, \quad \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{C_\Lambda^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi = 0,$$

то, переходя в (27) к пределу при $\Lambda \rightarrow \infty$, заключаем, что при $X > 0$

$$\begin{aligned}
 Z(X) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (J_1(X, \Lambda) + J_2(X, \Lambda)) = \\
 &= -2\pi \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) \sin \xi_j X + \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X}. \tag{28}
 \end{aligned}$$

В уравнении (28) первое слагаемое задает волновую структуру, а второе — неволновую часть возмущений свободной границы, затухающую вниз по потоку. Для вычисления волновой части поверхностных возмущений $S(X)$ введем обозначения:

$$g_1(\xi, E_1, \gamma, \beta) = \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(\beta - \gamma) E_1 \xi}{\operatorname{ch} E_1 \xi \operatorname{ch} \beta E_1 \xi},$$

$$g_2(\xi, \varepsilon, E_1, \beta) = \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E_1 \xi \operatorname{th} \beta E_1 \xi - \xi (\operatorname{th} E_1 \xi + \operatorname{th} \beta E_1 \xi),$$

где $\gamma = h/H_1 = E_0/E_1$.

Тогда

$$F(\xi) = \frac{ME_1}{\pi} \frac{g_1}{g_2},$$

а поскольку $F(\xi)$ имеет в точках $\xi = \xi_j$ полюса первого порядка, то

$$\operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) = \frac{ME_1}{\pi} \frac{g_1(\xi_j)}{g_2'(\xi_j)},$$

и, следовательно,

$$S(X) = -2ME_1 \sum_{j=1}^s \frac{g_1(\xi_j)}{g'_2(\xi_j)} \sin \xi_j X. \quad (29)$$

Обращаясь теперь к условиям (21), (22), получаем, что при $E_1 > E_{\text{кр}}^{\text{ВН}}$ искомые волновые возмущения представляют собой сумму двух мод — внутренней (вследствие неоднородности жидкости) и поверхностной, причем первая соответствует меньшему корню ξ_1 , а вторая — большему ξ_2 . Если $E_{\text{кр}}^{\text{ПОВ}} < E_1 < E_{\text{кр}}^{\text{ВН}}$, то $S(X)$ состоит лишь из одной поверхностной моды, а при $E_1 < E_{\text{кр}}^{\text{ПОВ}}$ поверхностные волны за обтекаемым препятствием не образуются и $S(X) \equiv 0$.

Рассмотрим интеграл (16) при $X < 0$. Тогда при вычислении $J_1(X, \Lambda)$ будем использовать вспомогательный контур Γ_1^- , представляющий собой объединение горизонтального отрезка $[-i\varepsilon_1; -i\varepsilon_1 + \Lambda]$ и расположенной под ним части контура Γ^- , а при вычислении $J_2(X, \Lambda)$ — контур Γ_1^+ , симметричный контуру Γ_1^- относительно действительной оси (см. рис. 3). Проводя далее рассуждения, аналогичные случаю $X > 0$, для отклонения свободной поверхности получаем выражение

$$Z(X) = \pi i \sum_{j=1}^{\infty} \underset{\xi=i\eta_j}{\text{res}} F(\xi) e^{\eta_j X},$$

показывающее, что поверхностные возмущения перед обтекаемым препятствием имеют непериодический затухающий характер.

Задача 2. В аналогичной постановке исследуем задачу о генерации поверхностных возмущений обтекаемым препятствием, моделируемым точечным диполем, но локализованным над скачком плотности, т. е. в точке $z = ih$ ($0 < h < H_1$ (см. рис. 1)). Как и ранее, комплексно-сопряженную скорость μ_k ($k \in \{1, 2\}$) в k -м слое представим в виде $\mu_k = V + U_k$. Необходимо найти аналитические функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющие граничным условиям (8)–(11), при этом $U_1(z)$ должна иметь полюс второго порядка в точке $z = ih$.

Проводя те же процедуры, что и при решении задачи 1, получаем следующее интегральное выражение для возвышения поверхности:

$$\zeta(x) = \frac{Vm}{2\pi g} \left\{ \frac{x^2 - (H_1 - h)^2}{(x^2 + (H_1 - h)^2)^2} - \int_0^{\infty} [A(k)e^{-kH_1} + B(k)e^{kH_1}] \cos kx dk \right\},$$

где

$$A(k) = \frac{k \{ [\delta k + (1 - \delta)\nu] \operatorname{th} kH_2 - k \} [\nu \operatorname{ch} k(H_1 - h) - k \operatorname{sh} k(H_1 - h)]}{\operatorname{ch} kH_1 \{ k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH_1 \operatorname{th} kH_2 - k\nu(\operatorname{th} kH_1 + \operatorname{th} kH_2) \}},$$

$$B(k) = \frac{k(k + \nu)e^{-kH_1} \{ [(1 - \delta)\nu \operatorname{ch} kh - \delta k \operatorname{sh} kh] \operatorname{th} kH_2 - k \operatorname{ch} kh \}}{\operatorname{ch} kH_1 \{ k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH_1 \operatorname{th} kH_2 - k\nu(\operatorname{th} kH_1 + \operatorname{th} kH_2) \}}.$$

В безразмерных переменных (см. (15)), выражение для $\zeta(x)$ будет иметь вид

$$Z(X) = \frac{ME_1}{2\pi} \frac{X^2 - (E_1 - E_0)^2}{[X^2 + (E_1 - E_0)^2]^2} + J(X),$$

где

$$J(X) = -\frac{ME_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_1(\xi, E_1, E_0, E_2, \varepsilon)}{g_2(\xi, E_1, E_2, \varepsilon)} \cos X\xi d\xi; \quad (30)$$

$$g_1(\xi, E_1, E_0, E_2, \varepsilon) =$$

$$= \xi \{ e^{-E_1\xi} [((1 - \varepsilon)\xi + \varepsilon) \operatorname{th} E_2\xi - \xi] \times$$

$$\times [\operatorname{ch}(E_1 - E_0)\xi - \xi \operatorname{sh}(E_1 - E_0)\xi] + (\xi + 1) \times$$

$$\times \{ [\varepsilon \operatorname{ch} E_0\xi - (1 - \varepsilon)\xi \operatorname{sh} E_0\xi] \operatorname{th} E_2\xi - \xi \operatorname{ch} E_0\xi \} / \operatorname{ch} E_1\xi;$$

$$g_2(\xi, E_1, E_2, \varepsilon) = \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E_1\xi \operatorname{th} E_2\xi - \xi(\operatorname{th} E_1\xi + \operatorname{th} E_2\xi).$$

Отметим, что подынтегральные выражения в соотношениях (16) и (30) имеют одинаковые знаменатели. Следовательно, волновая структура возмущений свободной поверхности, возникающих при обтекании препятствия над слоем скачка, будет определяться тем же количеством мод и теми же волновыми числами, что и в рассмотренном выше случае при локализации диполя под слоем скачка. А значит, критерии существования внутренней и поверхностной мод останутся неизменными (см. (21) и (22)). Тогда, вычисляя интеграл $J(X)$ по той же схеме, что и в задаче 1, получаем выражение для волновой части поверхностных возмущений за обтекаемым препятствием:

$$S(X) = ME_1 \sum_{j=1}^s \frac{g_1(\xi_j)}{g'_2(\xi_j)} \sin \xi_j X. \quad (31)$$

Здесь ξ_j — положительные корни уравнения (18); s — их число.

Как и в работах [2, 3], внутренняя мода возникает в случае, когда V меньше некоторого $V_{кр}$ и отражает непосредственную роль скачка плотности как механизма ее формирования. Однако в случае конечности глубины потока критическая скорость наряду с частотой Вьяйсяля—Брента дополнительно связана с глубиной скачка плотности или с параметром $\beta = H_2/H_1$ (см. формулы (21), (22)).

В рассматриваемой модели уместно отметить случай бесконечности нижнего слоя набегающего потока, т. е. $H_2 = \infty$ или $\beta = H_2/H_1 = \infty$, что характерно в условиях открытого моря вдали от побережья. Сравним теперь результаты таких расчетов для поверхностных возмущений с результатами вычислений в случае конечной глубины потока.

Результаты численных расчетов для реальных условий моря. Из физических представлений механизм генерации поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводного препятствия и описываемых выражениями (29) и (31), относительно прост и представляется следующим образом. Так, для задачи 2 (обтекание над скачком) поверхностная мода отражает эффект непосредственного обтекания препятствия потоком жидкости. В этом случае возмущения от него распространяются вверх (с выходом на поверхность — так называемая поверхностная мода) и вниз. В последнем случае это вызывает возмущения самого слоя скачка плотности воды, колебания которого, в свою очередь, эволюционируют как вниз, исчезая, согласно условию (7), или диссипируя на бесконечности, так и вверх, вызывая вторичные возмущения поверхности воды (благодаря внутренней моде). При этом очевидно, что по своей энергии (и импульсу) вторичные колебания слабее первых, что наглядно продемонстрировано ниже.

В условии задачи 1 (обтекание под границей раздела слоев) представляется, что на распространение возмущений от препятствия вверх существенное влияние оказывает скачок плотности, «забирая» часть их энергии на свое возбуждение. Остальная часть (с учетом диссипации) идет на генерацию поверхностных возмущений (поверхностная мода). В свою очередь, возбуждение от скачка, эволюционируя вверх, формирует вторичную (внутреннюю) моду на поверхности воды. А возмущения от препятствия вниз полностью исчезают по условию (7) или диссипируют на бесконечности.

Амплитуды поверхностных волн, обусловленных обтеканием подводного препятствия, рассчитывали при значениях параметров, соответствующих реальным условиям моря. Так, плотность всего слоя моря непрерывно увеличивается от поверхности до дна, варьируя в пределах $1\,023\text{ кг/м}^3 \leq \rho_2 \leq 1028\text{ кг/м}^3$. Таким плотностям отвечают значения параметра $\varepsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$ в пределах $0,001 \leq \varepsilon \leq 0,006$.

Расчеты проводили для трех вариантов мощности скачка плотности: $\varepsilon = 0,001$; $0,002$ и $0,004$. Момент диполя m задавали пропорциональным скорости V его движения: $m/V = 1\,600\text{ м}^2$. Для исследования влияния глубины локализации скачка расчеты вели при $H_1 = 50\text{ м}$ и $H_2 = 70\text{ м}$, а положение препятствия (диполя) ограничивали тремя горизонтами: $z_0 = 7$; 4 и 1 м как снизу (задача 1), так и сверху (задача 2) от уровня границы раздела слоев воды.

Для наглядности сравнения амплитуд поверхностных волн $B(V)$ бесконечным и конечным потоками графики на рис. 4 и 5 представлены парами. Графики рассчитаны для внутренней моды при локализации

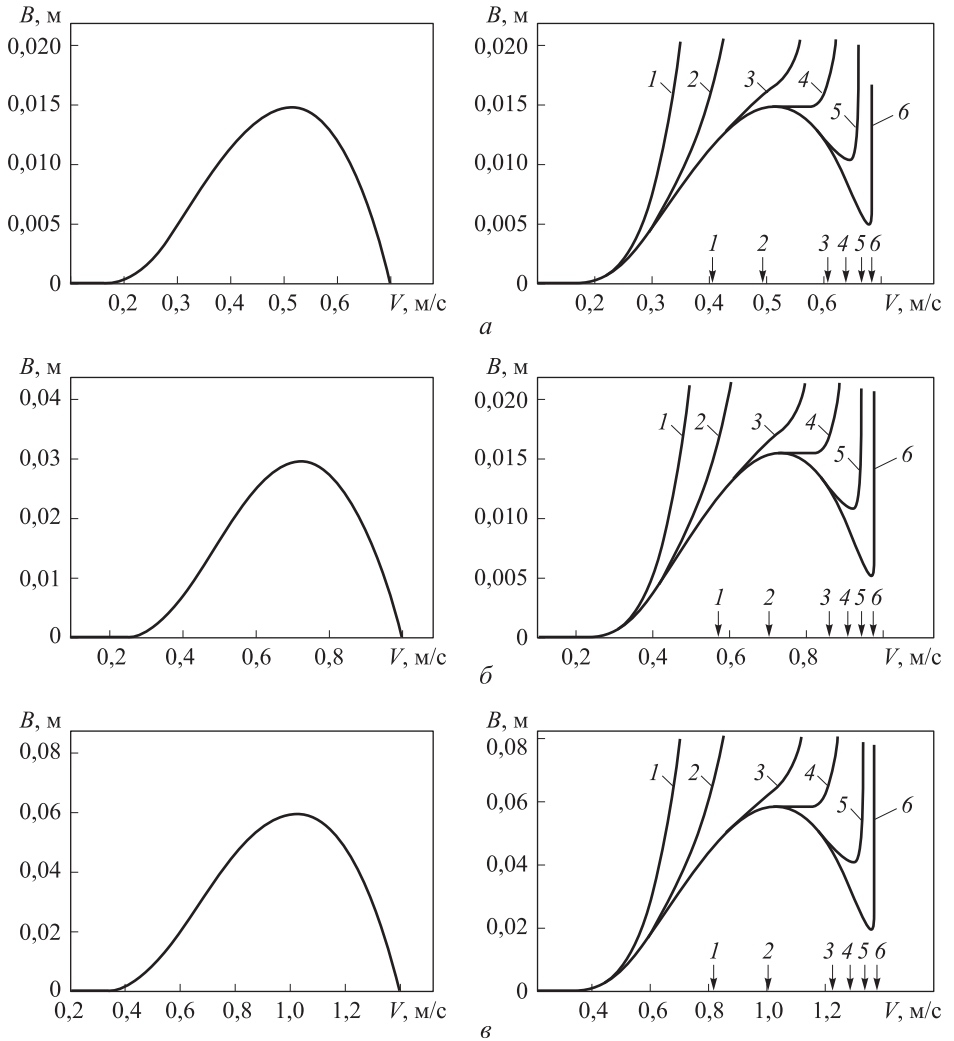


Рис. 4. Амплитуды внутренней моды поверхностных возмущений при обтекании препятствия под слоем скачка плотности при бесконечной (слева) и конечной (справа) глубине при $\varepsilon = 0,001$ (а); $0,002$ (б) и $0,004$ (в) и $\beta = 0,5$ (1), 1 (2), 3 (3), 5 (4), 10 (5) и 25 (6)

диполя соответственно под (см. рис. 4) и над (см. рис. 5) слоем скачка плотности и поверхностной моды под (рис. 6, а) и над (рис. 6, б) скачком.

Прежде всего видно, что возмущения на свободной границе проявляются в двух существенно разнесенных между собой диапазонах значений скорости потока: $0 \dots V_{кр}$ и $6,5 \dots 8,5$ м/с. При больших скоростях линейная теория не применима. В первом диапазоне при небольших скоростях «работает» внутренняя мода, во втором — поверхностная. В промежуточной зоне от критической скорости внутренней моды до $\approx 6,5$ м/с возмущения отсутствуют, т. е. эта зона представляется закрытой для выхода глубинных возмущений на поверхность воды. Отсюда, следуя принятой в морской гидроакустике терминологии, такой промежуточный интервал можно определить как «зону тени» для выхода на поверхность подобных гидродинамических возмущений.

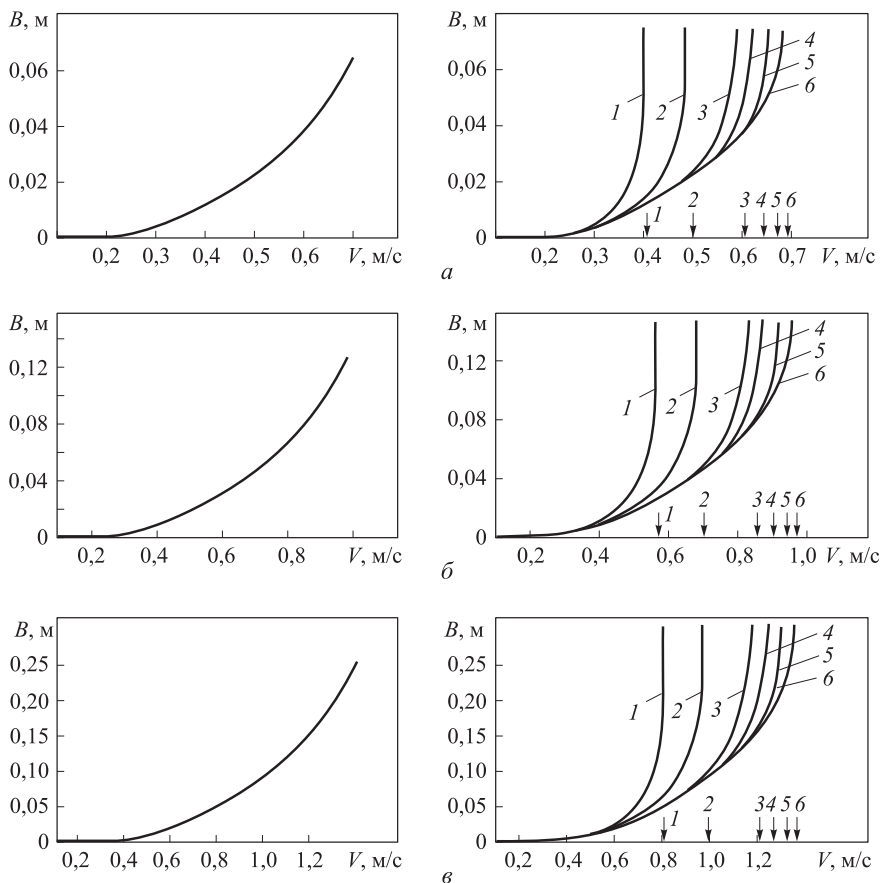


Рис. 5. Амплитуды внутренней моды поверхностных возмущений при обтекании препятствия под слоем скачка плотности при бесконечной (слева) и конечной (справа) глубине при $\varepsilon = 0,001$ (а); $0,002$ (б) и $0,003$ (в) и $\beta = 0,5$ (1), 1 (2), 3 (3), 5 (4), 10 (5) и 25 (6)

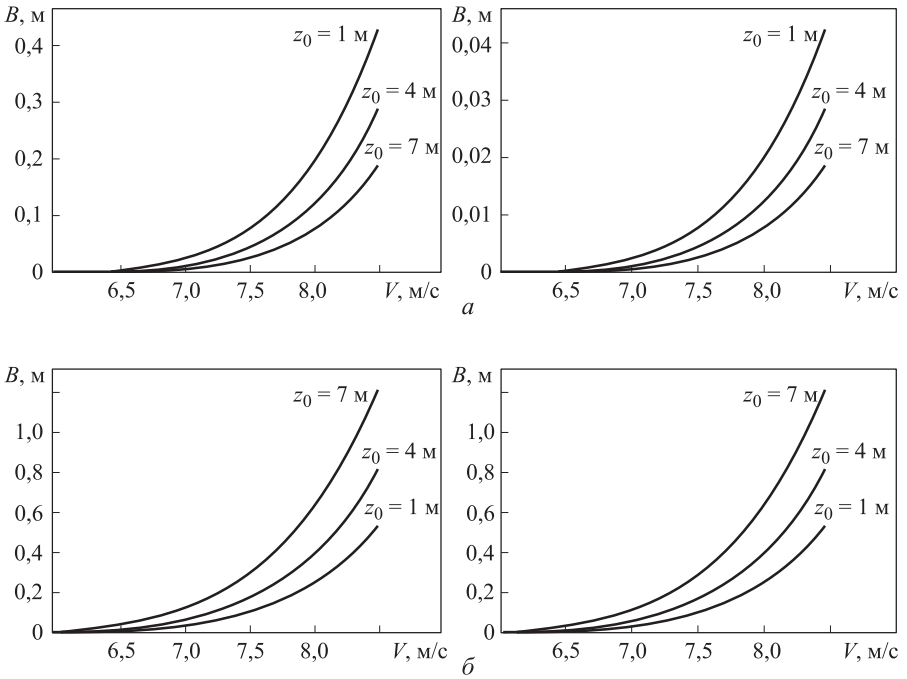


Рис. 6. Амплитуды поверхностной моды при обтекании препятствия под (а) и над (б) слоем скачка плотности при бесконечной (слева) и конечной (справа) глубине

По характеру изменчивости и значениям амплитуд две моды — внутренняя $B^{\text{вн}}(V)$ и поверхностная $B^{\text{пов}}(V)$ — существенно различаются между собой. В то же время резкие отличия проявляются и внутри каждой из мод в зависимости от локализации обтекаемого объекта относительно скачка плотности, глубины его погружения и глубины самого объекта. Кроме того, для внутренней моды, как и ожидалось, наблюдается существенная (почти пропорциональная) зависимость ее амплитуды от мощности скачка плотности (см. рис. 4, 5). Причем такая зависимость проявляется как в условии бесконечной глубины потока, так и его конечной толщины.

Еще одной характерной особенностью отличаются внутренние моды. Так, на рис. 4 в случае бесконечной глубины внутренняя мода представлена одной кривой $B^{\text{вн}}(V)$, а при конечной глубине — бесконечным множеством кривых $B_j^{\text{вн}}(V)$, соответствующих разным значениям H_j или $\beta_j = H_1/H_j$. На всех правых графиках каждое множество таких кривых образует линию в виде огибающей, в целом совпадающей с кривой $B^{\text{вн}}(V)$ на левых графиках как по форме, так и по ее амплитудным значениям, причем кривая $B_\infty^{\text{вн}}(V)$ совпадает с ней полностью. В то же время правые концы семейства кривых $B_j^{\text{вн}}(V)$ из

определенных точек на кривой $B_{\infty}^{\text{BH}}(V)$ резко отклоняются вверх, уходя в бесконечность. Здесь представляется, что в окрестностях таких точек начинает нарушаться условие линейности рассматриваемой задачи. Таким образом, по сравнению с бесконечным потоком в случае его конечной глубины диапазон изменения внутренней моды ограничен в зависимости от параметра $\beta_j = H_1/H_j$ или толщины нижнего слоя H_j .

Аналогичный характер изменчивости кривых $B_j^{\text{BH}}(V)$ при сравнительном анализе между конечной и бесконечной глубинами потока проявляется и в случае локализации препятствия над скачком плотности (см. рис. 5). Здесь, как и в случае конечной глубины, внутренняя мода на графиках представлена бесконечным множеством кривых $B_j^{\text{BH}}(V)$, соответствующих разным значениям H_j или $\beta_j = H_1/H_j$. Также каждое множество таких кривых образует линию в виде огибающей, в целом совпадающей с соответствующей кривой $B^{\text{BH}}(V)$ на левом графике, а кривая $B_{\infty}^{\text{BH}}(V)$ совпадает с ней полностью. Поэтому при конечной глубине потока диапазон изменения внутренней моды ограничен в зависимости от параметра конечности потока — $\beta_j = H_1/H_j$ или толщины нижнего слоя воды H_j .

В то же время сравнение внутренних мод, возникающих при локализации препятствия под и над скачком плотности, показывает, что не только по форме, но и по значениям амплитуд (в несколько раз) они резко различаются между собой. Отсюда следует, что скачок плотности оказывает сильный экранирующий эффект на распространение возмущений от обтекаемого препятствия вверх к поверхности воды.

Рассмотрим теперь поверхностную моду $B^{\text{пов}}(V)$ (см. на рис. 6). Сразу же отметим, что каждая кривая такой моды может быть представлена очень узким пучком кривых, рассчитанных по всем трем значениям, что указывает на практическую независимость поверхностной моды от мощности скачка плотности воды, т. е. такая мода проявляется непосредственно в результате обтекания диполя. Аналогично, как показывают расчеты, поверхностная мода практически не зависит и от толщины нижнего слоя, и кривые $B_j^{\text{пов}}(V)$ на левых и правых графиках практически идентичны как по форме, так и по значениям их амплитуд, т. е. условия конечной и бесконечной глубины не влияют на итоговые модельные результаты. В то же время сравнение значений амплитуд $B_j^{\text{пов}}(V)$ над скачком плотности и под ним свидетельствует о существенном (в несколько раз) различии между ними. Поэтому на первый взгляд представляется, что скачок плотности и в этом случае оказывает сильно экранирующий эффект на распространение вверх возмущений от обтекаемого препятствия. Одна-

ко анализ решения поверхностных возмущений показывает (см. выше), что поверхностная мода возникает непосредственно благодаря обтеканию препятствия (диполя). В этом случае в рамках рассматриваемой задачи и при малых скачках плотности оценки амплитуд поверхностных возмущений вследствие поверхностных мод в основном зависят от глубины локализации обтекаемого препятствия. Существенная зависимость от глубины препятствия наблюдается и для кривых внутренней моды. Так, согласно расчетам значений $B_j^{\text{пов}}(V)$ и $B_j^{\text{вн}}(V)$ для двух различных глубин обтекаемого препятствия (50 и 70 м), именно увеличение глубины приводит к существенному уменьшению поверхностных возмущений.

Заключение. В реальных условиях открытого моря за обтекаемым препятствием возможно образование двух различных типов поверхностных волн. Волны первого типа слабо зависят от стратификации среды и в морских условиях начинают визуально проявляться при относительно большой скорости потока V (не менее 6 м/с). Волны второго типа существенным образом зависят от мощности скачка плотности и толщины нижнего слоя; в морских условиях такие волны образуются при скорости потока, не превышающей 1...1,5 м/с.

Обнаружены существенные различия между параметрами поверхностных волн при различных локализациях обтекаемого препятствия: над скачком плотности воды или под ним. Подобный эффект указывает на характерную роль скачка плотности как неоднородности, блокирующей выход возмущений на поверхность воды, что представляется важным при использовании этого эффекта в практических задачах, в частности контролирующем мониторинге морских акваторий.

Выявлена особая роль скорости потока в формировании поверхностных возмущений при реальных условиях моря. На свободной границе возмущения проявляются в двух разнесенных между собой интервалах скорости потока. В промежуточной зоне они отсутствуют в диапазоне значений от критической скорости внутренней моды до определенного характерного значения, зависящего от параметров задачи, т. е. эта зона представляется закрытой для выхода глубинных возмущений на поверхность воды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 11-01-00335 и № 13-08-00538)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Методы, процедуры и средства аэрокосмической компьютерной радиотомографии приповерхностных областей Земли.* Нестеров С.В., Шамаев А.С., Шамаев С.И., ред. Москва, Научный мир, 1996, 272 с.

2. Баханов В.В., Горячкин Ю.Н., Корчагин Н.Н., Репина И.А. Локальные проявления глубинных процессов на поверхности моря и в приводном слое атмосферы. *Докл. РАН*, 2007, т. 414, № 1, с. 111–115.
3. Горелов А.М., Зевакин Е.А., Иванов С.Г., Каледин С.Б., Леонов С.О., Носов В.Н., Савин А.С. О комплексном подходе к дистанционной регистрации гидродинамических возмущений морской среды оптическими методами. *Физические основы приборостроения*, 2012, т. 1, № 4, с. 58–64.
4. Корчагин Н.Н., Римский-Корсаков Н.А. Исследования эволюции гидродинамических возмущений, вызванных естественными и искусственными источниками в толще воды, и их проявления на поверхности моря и в приводном слое атмосферы. *Отчет НИР «ФОРПИК–ИОРАН»*. Москва, ИО РАН, 2005–2006, 278 с.
5. Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн. *Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа*. Москва, ВИНТИ, 1987, т. 21, с. 93–179.
6. Корчагин Н.Н., Савин А.С., Савина Е.О. Волны на поверхности моря, обусловленные обтеканием подводного препятствия. *Океанология*, 2009, т. 49, № 3, с. 348–354.
7. Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С., Савина Е.О. Обтекание препятствий стратифицированным потоком со свободной границей. *Океанология*, 2011, т. 51, № 6, с. 974–983.
8. Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Поверхностные эффекты при обтекании препятствий в неоднородно-стратифицированной среде. *Докл. РАН*, 2011, т. 440, № 6, с. 826–829.
9. Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Поверхностные возмущения при обтекании препятствий стратифицированным потоком конечной глубины. *Океанология*, 2012, т. 52, № 6, с. 1–11.
10. Владимиров И.Ю., Корчагин Н.Н., Савин А.С. Моделирование обтекания преград в потоке со свободной границей. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Специальный выпуск «Математическое моделирование»*, 2011, с.114–135.

Статья поступила в редакцию 21.02.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

И.Ю. Владимиров, Н.Н. Корчагин, А.С. Савин. Влияние стратификации и глубины на поверхностные возмущения при обтекании препятствий морским течением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/609.html>

Владимиров Игорь Юрьевич — младший научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН; автор 5 опубликованных работ; сфера научных интересов: физика океана. e-mail: lyuvladimirov@rambler.ru

Корчагин Николай Николаевич — главный научный сотрудник Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН, д-р физ.-мат. наук, автор около 160 опубликованных работ; сфера научных интересов: физика океана. e-mail: e-niknik@mail.ru

Савин Александр Сергеевич — профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; д-р физ.-мат. наук; сфера научных интересов: теоретическая и прикладная гидродинамика; автор около 100 научных работ. e-mail: losavina@rambler.ru