

Взаимодействие стабилизирующих и дестабилизирующих факторов и бифуркации фронтов фазового раздела в геотермальных системах

© А.Т. Ильичев¹, Г.Г. Цыпкин²

¹ Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва 119991, Россия.

² ИПМех им. Н.Ю. Ишлинского РАН, Москва 119526, Россия.

Исследовано взаимодействие стабилизирующего и дестабилизирующего эффектов в геотермальной системе с фиксированным перепадом давлений по вертикали в зависимости от толщины низкопроницаемого слоя и его проницаемости в предположении малости конвективного переноса энергии по сравнению с кондуктивным. Проанализировано взаимодействие неустойчивости, вызываемой положением тяжелой жидкости над легкой (гидростатической неустойчивости), с одной стороны, и стабилизации потоком через поверхность фазового перехода, низкой проницаемостью и градиентом температуры — с другой.

Ключевые слова: геотермальные системы, фазовые переходы, устойчивость.

Введение. В ряде геотермальных систем (таких, например, как Лардерелло в Италии, Гейзеры в США, Матсукава в Японии) слой воды находится в пористой среде над слоем пара [1]. Это означает, что область, занятая тяжелой жидкостью, может устойчиво находиться над областью легкой жидкости. При изменении параметров возможна дестабилизация физической системы, которая в случае несмешивающихся жидкостей вызывает неустойчивость Рэлея — Тейлора [2]. Однако в рассматриваемом случае поверхность фазового перехода, разделяющая воду и пар, не является классической поверхностью раздела двух жидкостей: она, прежде всего, допускает переток массы и на ней могут действовать стабилизирующие механизмы термодинамического характера, связанные с изменением температуры, давления и т. д. [3].

Впервые возможность устойчивой конфигурации вода — пар в геотермальной системе была теоретически показана в работе [3]. При этом движение фаз в основном вертикальном потоке, подлежащем исследованию на устойчивость, отсутствовало в силу выбранных граничных условий. В работах [4–6] такое движение фаз допускалось. Возникает оно при условии движения воды и пара через верхнюю и нижнюю границы геотермального резервуара.

Течения в геотермальном резервуаре при отсутствии гравитации и постоянстве температуры фазового перехода для различных условий на

верхней границе геотермального слоя рассмотрены в работе [7]. Неустойчивость Рэлея — Тейлора в этом случае не имеет места, и положение поверхности фазового перехода при однородных условиях на верхней границе (заданы постоянные давление и температура) единственно для фиксированных физических параметров.

В работах [8, 9] показано, что при изменении физических параметров может возникнуть бифуркация поверхности фазового перехода типа точки поворота, когда происходит рождение или исчезновение пары поверхностей, одна из которых подвержена длинноволновой неустойчивости через дестабилизацию возмущением с нулевым волновым числом. В этом случае эволюция узкой полосы слабонелинейных волн вблизи порога неустойчивости описывается вещественным диффузионным уравнением Колмогорова — Петровского — Пискунова с невырожденной квадратичной нелинейностью в случае общего положения [10].

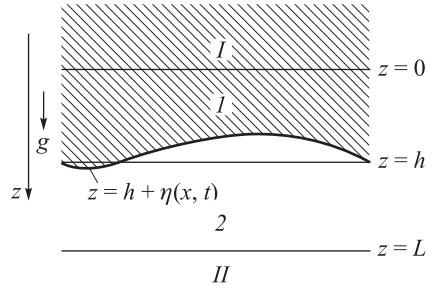
В настоящей работе при фиксированном перепаде давления и однородных условиях на верхних границах низкопроницаемого горизонтального слоя изучается конкуренция неустойчивости Рэлея — Тейлора и стабилизации вертикальным течением через границу фазового перехода вода — пар в геотермальных системах в зависимости от толщины низкопроницаемого слоя и проницаемости. Эта конкуренция проявляется в неединственности локализации стационарных плоских фронтов фазового перехода, по крайней мере один из которых всегда неустойчив. Множественные фронты возникают в результате бифуркации из устойчивого фронта. В окрестности точки бифуркации динамика узкой полосы слабонеустойчивых и слабонелинейных мод описывается одной из форм нелинейного диффузионного уравнения Колмогорова — Петровского — Пискунова.

Постановка задачи. Рассмотрим течения, реализующиеся в высокотемпературных геотермальных резервуарах. Пусть резервуар состоит из двух высокопроницаемых горизонтальных слоев, разделенных слоем низкопроницаемой породы — горизонтальной полосой бесконечной протяженности: $-\infty < x < \infty$, $0 < z < L$, с осью z , направленной вертикально вниз (рис. 1). Верхний I и нижний II высокопроницаемые слои заполнены соответственно водой и паром. Внутри слоя низкопроницаемой породы находится поверхность фазового перехода, разделяющая области 1 и 2, занятые соответственно водой и паром.

Процессы тепломассопереноса в геотермальных системах описываются в рамках равновесной термодинамики и подчиняются законам сохранения массы и энергии, закону Дарси для воды и пара, уравнениям состояния. Предполагается, что вода и пар несжимаемы.

Рис. 1. Схема геотермальной системы:

I — высокопроницаемая область $\{z < 0, -\infty < x < \infty\}$; **II** — то же $\{z > L, -\infty < x < \infty\}$; **1** — низкопроницаемая область $\{0 < z < h + \eta, -\infty < x < \infty\}$, занятая водой; **2** — то же $\{h + \eta < z < L, -\infty < x < \infty\}$, занятая паром



Система основных уравнений в двух областях низкопроницаемой породы, разделенных поверхностью, имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_j = 0, \mathbf{v}_j = -\frac{k}{\mu_j} (\operatorname{grad} P - \rho_j g \mathbf{e}_z);$$

$$(\rho C)_{2,1} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_j C_j \mathbf{v}_j \operatorname{grad} T = \operatorname{div} (\lambda_j \operatorname{grad} T); \quad (1)$$

$$\lambda_{1,2} = m \lambda_j + (1 - m) \lambda_s, (\rho C)_{2,1} = m \rho_j C_j + (1 - m) \rho_s C_s, j = v, w.$$

Здесь \mathbf{v}_j — вектор скорости фильтрации; k — проницаемость; μ — вязкость; P — давление; ρ — плотность; g — ускорение свободного падения; \mathbf{e}_z — орт оси z ; C — теплоемкость; T — температура; λ_j — теплопроводность; m — пористость; w, v, s — индексы воды, пара и скелета пористой среды соответственно.

Условия на границе раздела между областями воды и пара сформулируем как условия на поверхности термодинамически равновесного фазового перехода $z = h + \eta$ (где $\eta = \eta(t, x)$ — отклонение поверхности раздела фаз) [5], т. е.

$$\begin{aligned} m \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) V_n &= \frac{k}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} (\operatorname{grad} P)_{n+} - \frac{k}{\mu_w} (\operatorname{grad} P)_{n-} + \\ &+ \frac{k}{\mu_w} \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v^2}{\rho_w^2} \right) (\mathbf{e}_z)_n; \\ m q \rho_w V_n &= \lambda_- (\operatorname{grad} T)_{n-} - \lambda_+ (\operatorname{grad} T)_{n+} - \\ &- \frac{k q \rho_w}{\mu_w} [(\operatorname{grad} P)_{n-} - \rho_w g (\mathbf{e}_z)_n]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$T_+ = T_-, \quad P_+ = P_-, \quad \ln \frac{P_-}{P_a} = A + \frac{B}{T_-};$$

$$A = 12,512; \quad B = -4\,611,73 \text{ К.}$$

Здесь величины, относящиеся к области пара, имеют индекс «+», а к области жидкости — «-»; P_a — атмосферное давление; V — скорость, нормальная к области поверхности фазового перехода.

Граничные условия на плоских границах между низко- и высокопроницаемыми слоями имеют вид

$$z = 0: P = P_0, T = T_0; z = L: P = P^0, T = T^0. \quad (3)$$

При достаточно низких значениях проницаемости в уравнении теплопроводности можно пренебречь конвективным теплопереносом по сравнению с кондуктивным [5]. Полагая соответствующие конвективные члены в уравнении теплопроводности равными нулю, перепишем уравнения (1) в виде

$$\Delta P = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a_{1,2} \Delta T, \quad 0 < z < h \cup h < z < L; \quad (4)$$

$$a_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{(\rho C)_{1,2}}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Будем считать, что эффективные теплоемкость и теплопроводность определяются только соответствующими параметрами пород, т. е. $\lambda_{1,2} = \lambda$, $a_{1,2} = a$. Последнее является хорошим приближением в случае малой пористости, реализуемой в геотермальных системах.

Вертикальные течения. При условии пренебрежения конвективным теплопереносом из выражений (2)–(4) следует, что распределения давления и температуры имеют следующий вид [5]:

$$P_-^s = P_0 + \frac{P_* - P_0}{h} z; \quad T_-^s = T_0 + \frac{T_* - T_0}{h} z; \quad (5)$$

$$P_+^s = \frac{P^0 - P_*}{L - h} z + \frac{LP_* - hP^0}{L - h}; \quad T_+^s = \frac{T^0 - T_*}{L - h} z + \frac{LT_* - hT^0}{L - h},$$

где P_* , T_* — давление и температура на поверхности раздела соответственно.

Подставляя выражения (5) в условия (2), получаем уравнения для определения равновесных давления P_* и температуры T_* , а также положения поверхности раздела h :

$$\frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P^0 - P_*}{L - h} - \frac{P_* - P_0}{h} + \rho_w g \left[1 - \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v^2}{\rho_w^2} \right] = 0;$$

$$\lambda \frac{T^0 - T_*}{L - h} - \lambda \frac{T_* - T_0}{h} + \frac{kq\rho_w}{\mu_w} \left[\frac{P_* - P_0}{h} - \rho_w g \right] = 0;$$

$$P_* = f(T_*) = P_a \exp\left(A + \frac{B}{T_*}\right).$$

Выражая из первых двух уравнений давление и температуру и подставляя их в третье уравнение, находим уравнение для определения положения поверхности фазового перехода:

$$G(H) = 0, \quad (6)$$

где $G(H)$ — трансцендентная функция [5]; $H = h/L$.

Уравнение (6) имеет один или три корня (с учетом кратности), а следовательно, для фиксированных значений физических параметров существует одна или три поверхности фазового перехода.

Устойчивость вертикальных течений. Представим решение задачи (2)–(4) для каждого низкопроницаемого слоя в виде

$$\begin{aligned} P_{\pm}(t, x, z) &= P_{\pm}^s + P'_{\pm}(t, x, z), T_{\pm}(t, x, z) = T_{\pm}^s + T'_{\pm}(t, x, z); \\ V &= V(t, x) = \{0, 0, \partial\eta / \partial t\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $z = h + \eta(t, x)$ — уравнение поверхности фазового перехода.

Решение (7) является возмущением решения (5), описывающего вертикальный поток. Считая, что давление и температура на верхней и нижней горизонтальных границах низкопроницаемого слоя не возмущаются, после подстановки (7) в (2)–(4) получаем систему уравнений с граничными условиями на возмущения $P'_{\pm}(z)$, $T'_{\pm}(z)$. Решение этой системы определяет глобальное по времени поведение возмущенного потока, в частности, как сильно он отклоняется от невозмущенного. В связи с этим можно говорить об устойчивости или неустойчивости вертикального течения. В силу того факта, что решение нередуцированных уравнений с граничными условиями для возмущений практически невозможно, имеет смысл рассматривать линейную устойчивость вертикального потока по отношению к малым возмущениям, а также пытаться учесть влияние нелинейности на эволюцию этих возмущений.

Для линейной (или нормальной) устойчивости характерен экспоненциальный рост или убывание малых возмущений:

$$\begin{aligned} P'_{\pm}(t, x, z) &= \delta P_{\pm}(z) \exp(i\hat{k}x + \hat{\sigma}t); \quad T'_{\pm}(t, x, z) = \delta T_{\pm}(z) \exp(i\hat{k}x + \hat{\sigma}t); \\ \eta(t, x) &= \hat{\eta} \exp(i\hat{k}x + \hat{\sigma}t), \end{aligned} \quad (8)$$

что удовлетворяет линеаризованным вокруг вертикального течения (5) граничным условиям и уравнениям (2)–(4).

Поведение возмущений (8) (их рост или убывание) определяется ветвями дисперсионных кривых вида

$$\sigma = \sigma(\kappa), \quad \sigma = \frac{L^2}{a} \hat{\sigma}, \quad \kappa = L \hat{\kappa}$$

при вещественных волновых числах κ [5].

Взаимодействие стабилизирующего и дестабилизирующего факторов. Рассмотрим геотермальный резервуар со следующими параметрами:

$$\mu_w = 1,478 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad \mu_v = 1,587 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad \rho_w = 888,66 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_v = 4,83 \text{ кг/м}^3; \quad q = 2,04 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}; \quad T_0 = 450 \text{ К};$$

$$T^0 = 538,96 \text{ К}; \quad P_0 = 10^6 \text{ Па}; \quad P^0 = 3,62 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\lambda_s = 2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \quad \lambda_w = 0,58 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)};$$

$$\lambda_v = 0,033 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}; \quad g = 9,8 \text{ м/с}^2; \quad m = 0,1;$$

$$\rho_s = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad C_s = 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)};$$

$$C_w = 4,39 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}; \quad C_v = 1,8 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)};$$

с переменной проницаемостью k и толщиной L .

Зафиксируем сначала проницаемость и будем менять толщину низкопроницаемого слоя. На рис. 2 изображена бифуркационная кривая $H(L)$ при $k = 6 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$.

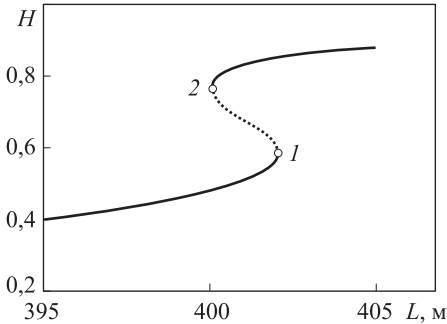


Рис. 2. Зависимость положения H фронта фазового перехода от толщины L низкопроницаемого слоя в геотермальном резервуаре при фиксированной проницаемости $k = 6 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$

При толщинах низкопроницаемого слоя $L < 400$ м имеется один устойчивый фронт фазового перехода. В точке $L \approx 400$ м (точка 2 на рис. 2) возникает еще пара фронтов, один из которых (темные точки) неустойчив для возмущений, имеющих волновые числа в окрестности нуля (длинноволновые возмущения). На пороге неустойчивости центрального фронта эта пара сливается и при $L < 400$ м перестает существовать. При дальнейшем увеличении толщины низкопроницаемого слоя в точке $L \approx 402$ м (точка 1 на рис. 2) пара фронтов фазового перехода пропадает и остается один устойчивый фронт.

В окрестности точек бифуркации $L \approx 400$ и 402 ($H \approx 0,789$ и $0,655$ соответственно) поведение гармонических возмущений неустойчивой и устойчивой поверхностей фазового перехода описывается дисперсионными кривыми для волновых чисел κ , близких к нулю (рис. 3).

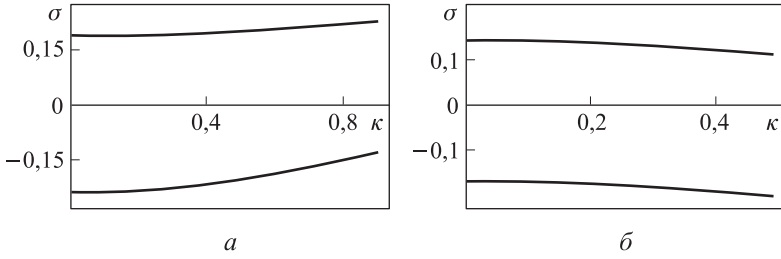


Рис. 3. Дисперсионные кривые $\sigma(\kappa)$ для двух фронтов вблизи точек бифуркации; *a* — в правой полуокрестности точки 2; *b* — в левой полуокрестности точки 1 (см. рис. 2)

В окрестности точек бифуркации 2 и 1 ($z = H + \varepsilon\eta$, $\varepsilon = L^2/\nu^2 = \eta_a/L$, где ν и η_a — характерные длина волны и амплитуда соответственно) узкая полоса слабонеустойчивых мод описывается нелинейным диссипативным уравнением Колмогорова — Петровского — Пискунова [10]:

$$\varepsilon\alpha_f\eta^* + \varepsilon^2\beta_f\eta^{*2} + \varepsilon^2\delta_f\partial_{XX}\eta^* + \varepsilon^2\omega_f\partial_\tau\eta^* = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\alpha_f = \frac{1}{H} - \frac{P_0}{HP_*} + \frac{\Sigma}{P_*} + \frac{B\Sigma_4}{T_*^2} - \frac{BT_0}{HT_*^2} + \frac{B}{HT_*};$$

$$\eta^* = \varepsilon \frac{\eta}{L};$$

$$\beta_f = -\frac{1}{2H^2} - \frac{P_0^2}{2H^2P_*^2} + \frac{P_0}{H^2P_*} + \frac{P_0\Sigma}{HP_*^2} - \frac{\Sigma^2}{2P_*^2} + \frac{\Sigma_1}{P_*} - \frac{B\Sigma_4^2}{T_*^3} + \frac{2B\Sigma_4T_0}{HT_*^3} - \frac{BT_0^2}{H^2T_*^3} - \frac{B\Sigma_4}{HT_*^2} + \frac{B\Sigma_5}{T_*^2} + \frac{2BT_0}{H^2T_*^2} - \frac{B}{H^2T_*};$$

$$\delta_f = \frac{\Sigma_3}{P_*} + \frac{B\Sigma_7}{T_*^2};$$

$$X = \varepsilon \frac{x}{L};$$

$$\omega_f = \frac{\Sigma_2}{P_*} + \frac{B\Sigma_6}{T_*^2};$$

$$\tau = \varepsilon \frac{\eta_a}{L^2} t,$$

а коэффициент $\alpha_f = O(\varepsilon)$.

Выражения для Σ , ..., Σ_7 имеют вид

$$\Sigma = \frac{\Gamma H \mu_w \rho_v}{-H \mu_w \rho_v - \mu_v \rho_w + H \mu_v \rho_w};$$

$$\Sigma_1 = \frac{\Gamma H \mu_w \rho_v (\mu_w \rho_v - \mu_v \rho_w)}{(H \mu_w \rho_v + \mu_v \rho_w - H \mu_v \rho_w)^2};$$

$$\Sigma_2 = -\frac{a(-1+H)Hm\mu_v\mu_w(\rho_v - \rho_w)}{k(H\mu_w\rho_v + \mu_v\rho_w - H\mu_v\rho_w)};$$

$$\Sigma_3 = \frac{(-1+H)H\{\Gamma(-1+H)\mu_w\rho_v + [(-1+H)\mu_w\rho_v - H\mu_v\rho_w]\Sigma\}}{3(H\mu_w\rho_v + \mu_v\rho_w - H\mu_v\rho_w)};$$

$$\Sigma_4 = -\frac{\Gamma_1 H \lambda_s \mu_w + (-1+H)kq\rho_w \Sigma}{\lambda_s \mu_w}, \quad \Sigma_5 = -\frac{kq\rho_w [\Sigma + (-1+H)\Sigma_1]}{\lambda_s \mu_w};$$

$$\Sigma_6 = -\frac{(-1+H)(\Gamma_1(-1+H)H\lambda_s\mu_w + 3aHm\mu_wq\rho_w + 3kq\rho_w\Sigma_2 - H\lambda_s\mu_w\Sigma_4)}{3\lambda_s\mu_w};$$

$$\Sigma_7 = \frac{(-1+H)[\Gamma_1(-1+H)H\lambda_s\mu_w + H^2kq\rho_w\Sigma - 3kq\rho_w\Sigma_3 - H\lambda_s\mu_w\Sigma_4]}{3\lambda_s\mu_w},$$

где

$$\Gamma = \frac{P_0 - HP_0 - P_* + HP^0}{(-1+H)H}; \quad \Gamma_1 = \frac{T_0 - HT_0 - T_* + HT^0}{(-1+H)H}.$$

С помощью масштабных преобразований

$$\eta^* \rightarrow \frac{|\alpha_f|}{\varepsilon |\beta_f|} \eta^*, \quad X \rightarrow \sqrt{\varepsilon \frac{|\delta_f|}{|\alpha_f|}} \cdot X, \quad \tau \rightarrow \varepsilon \frac{|\omega_f|}{|\alpha_f|} \tau$$

постоянные коэффициенты в уравнении (9) можно сделать равными ± 1 . Преобразованное таким образом уравнение (9) в окрестности точки 2 примет вид

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial \tau} = \pm \eta^* - \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial X^2} - \eta^{*2}, \quad (10)$$

а в окрестности точки 1 —

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial \tau} = \pm \eta^* + \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial X^2} + \eta^{*2}. \quad (11)$$

В уравнении (10) знак « \leftrightarrow » соответствует верхней устойчивой ветви, а « $+$ » — средней неустойчивой ветви в правой полукрестности точки 2, а в (11) знак « \leftarrow » — соответствует нижней устойчивой

ветви, а «+» — средней неустойчивой ветви в левой полукрестности точки I (см. рис. 2).

Зафиксируем теперь толщину L низкопроницаемого слоя и будем менять проницаемость k . На рис. 4, *а* изображена бифуркационная диаграмма при $L = 400,2$ м.

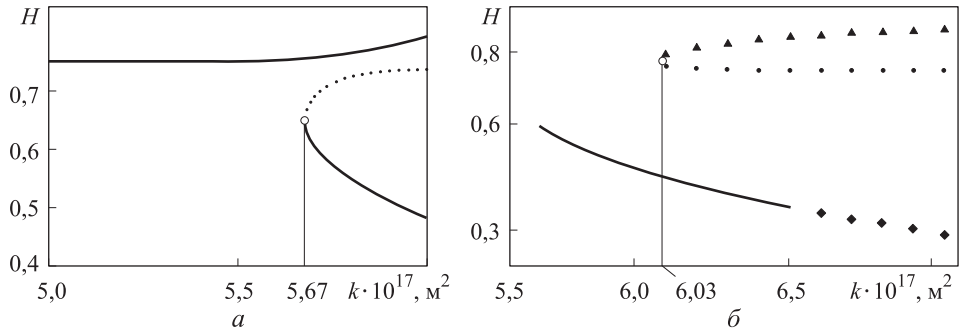


Рис. 4. Зависимость положения H фронта фазового перехода от проницаемости k низкопроницаемого слоя в геотермальном резервуаре при фиксированной толщине $L = 400,2$ м (*а*) и 400 м (*б*)

При $k < 5,67 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$ имеется один устойчивый фронт фазового перехода. В точке $k = 5,67 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$ возникают еще два фронта, один из которых (центральный) неустойчив для возмущений, имеющих волновые числа в окрестности нуля (длинноволновые возмущения). Существующий до бифуркации фронт остается устойчивым и после бифуркации и занимает низшее (соответствующее максимуму H) положение. В достаточно малой окрестности этой точки все фронты фазового перехода находятся близко один к другому, так что динамика возмущений всех трех фронтов в этой окрестности, по-видимому, может быть описана единым модифицированным уравнением Колмогорова — Петровского — Пискунова [11]. Неустойчивым здесь также является центральный фронт фазового перехода.

На рис. 4, *б* изображена бифуркационная диаграмма при $L = 400$ м. При $k < 6,03 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$ имеется один устойчивый фронт. При $k = 6,03 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$ происходит бифуркация и рождается еще два плоских стационарных фронта фазового перехода. При увеличении проницаемости k имеем неустойчивый к длинноволновым возмущениям центральный фронт (точки •), устойчивый верхний фронт, соответствующий минимуму H , а также нижний фронт фазового перехода, неустойчивый к гармоническим возмущениям и имеющий конечные ненулевые волновые числа (точки ▲). При $k \approx 6,535 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$ происходит дестабилизация верхнего стационарного фронта (точки ◆) фазового перехода. Механизм дестабилизации описан в работе [6] и проис-

ходит при $\kappa = \infty$. При дальнейшем увеличении проницаемости левый конец бесконечного отрезка неустойчивых волновых чисел для $\kappa > 0$ и правый — для $\kappa < 0$ перемещается к точке $\kappa = 0$ и область неустойчивых волновых чисел расширяется.

Обсуждение результатов. В работе [7] температура фазового перехода практически постоянна вдоль всего слоя, поэтому ее значение задано, а условие фазового перехода (последнее уравнение в системе (2)) не используется. Однако для больших толщин низкопроницаемого слоя и высоких градиентов давления перепад температуры фазового перехода может быть значительным. На рис. 5 приведен пример геотермальной системы, для которой перепад $\Delta T \approx 65$ К, а $\Delta T/T_0 \approx 0,144$. Поэтому использование условия фазового перехода играет существенную роль прежде всего при определении локализации фронта.

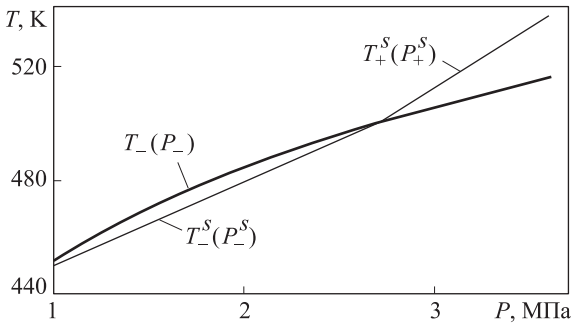


Рис. 5. Зависимости температуры от давления: $T_-(p_-)$ — на поверхности фазового перехода; $T_-^s(p_-^s)$, $T_+^s(p_+^s)$ — при $L = 400$ м

На примере локализации фронтов фазового перехода при различной толщине геотермального слоя и фиксированной проницаемости (см. рис. 2) рассмотрим механизмы образования фронтов основного вертикального течения в зависимости от конкурирующих механизмов дестабилизации Рэлея — Тейлора и стабилизации потоком флюида через поверхность фазового перехода.

На устойчивой ветви AB бифуркационной диаграммы (рис. 6), вертикальная скорость отрицательна, т. е. пар втекает в воду и конденсируется. Значения скорости на ветви AB находятся в интервале $-1,03 \cdot 10^{-10} \dots -0,6 \cdot 10^{-1}$ м/с. Поток жидкости направлен вверх, и скорость жидкости является достаточной, чтобы компенсировать распространение воды вниз, против потока. При малой деформации результирующая поверхность фазового перехода направлена по потоку жидкости вверх, и неустойчивость Рэлея — Тейлора, связанная с проникновением воды в занимаемую паром область, не развивается.

На устойчивой ветви CD (см. рис. 6) вертикальная скорость воды положительна, т. е. вода течет вниз в область пара и испаряется. Ветвь CD соответствует значениям скорости $0,129 \cdot 10^{-10} \dots 1,33 \cdot 10^{-10}$ м/с. Поток жидкости направлен вниз, и более холодная вода, достигая поверхности фазового перехода, охлаждает ее, в результате чего возмущенный фронт передвигается вверх в область более низких давлений. При этом гидростатическое давление воды, вызывающее неустойчивость Рэля — Тейлора, уменьшается и поверхность фазового перехода остается устойчивой. В этом случае фронт фазового перехода движется в сторону, противоположную направлению движения флюидов (что невозможно для поверхности раздела в случае двух несмешивающихся жидкостей).

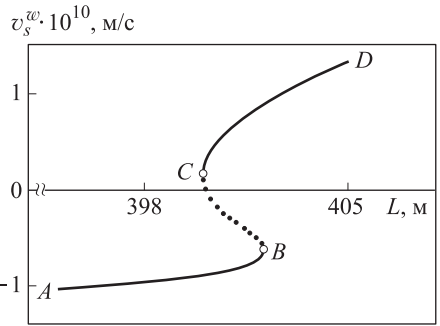


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма, соответствующая кривой на рис. 2

Наконец, на одной части ветви BC бифуркационной диаграммы происходит конденсация пара (скорости воды и пара направлены вверх), а на другой — испарение воды (поток через фронт направлен вниз). Однако абсолютного значения скорости потока через поверхность фазового перехода недостаточно, чтобы компенсировать гидростатическую неустойчивость Рэля — Тейлора, и соответствующие поверхности фазового перехода являются неустойчивыми, причем неустойчивость имеет длинноволновый характер.

В связи со сложностью основных уравнений и граничных условий динамику геотермальной системы можно описать только с помощью численного анализа. Поэтому при выборе достоверной численной схемы большое значение имеет аналитическое описание некоторых режимов. В частности, режимы в окрестности точек бифуркации B и C (см. рис. 6), которые описываются уравнением (9), могут служить для корректировки численных методов исследования уравнений (1)–(3).

Заключение. Таким образом, установлено, что особенности формирования поверхностей фазового перехода вертикальных течений в геотермальных системах при неизменных градиентах давления и температуры и различных проницаемостях и толщинах слоя связаны с взаимодействием дестабилизирующих и стабилизирующих факторов. К первым относится гидростатическая неустойчивость (вода находится над паром) или неустойчивость Рэля — Тейлора, ко вторым — поток фаз через поверхность фазового перехода. Стабилизирующий фактор преобладает, когда модуль скорости на фронте имеет достаточно большое значение. Новая пара фронтов, один из которых обязательно неустойчив, возникает или пропадает при критическом

(минимальном при возникновении и максимальным при исчезновении) значении скорости потока на фронте.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00335 и № 11-01-12051-офи-м-2011).

ЛИТЕРАТУРА

1. Grant M.A. Geothermal Reservoir Modeling. *Geothermics*, 1983, vol. 12, no. 4, pp. 251–263.
2. Дразин Ф. *Введение в теорию гидродинамической устойчивости*. Москва, Физматлит, 2005, 287 с.
3. Schubert G., Straus J.M. Gravitational Stability of Water over Steam in Vapor-dominated Geothermal System. *J. Geoph. Res.*, 1980, vol. 85, no. B11, pp. 6505–6512.
4. Цыпкин Г.Г., Ильичев А.Т. Устойчивость стационарного фронта фазовых переходов вода–пар в гидротермальных системах. *Докл. РАН*, 2001, т. 378. № 2, с. 197–200.
5. Tsyppkin G.G., Il'ichev A.T. Gravitational Stability of the Water-Vapor Phase Transition Interface in Geothermal Systems. *Transport in porous media*, 2004, vol. 55, pp. 183–199.
6. Il'ichev A.T., Tsyppkin G.G. Transition to Instability of the Interface in Geothermal Systems. *European Journal of Mech. B.Fluids*, 2005, vol. 24, pp. 491–501.
7. Rubin A., Schweitzer S. Heat Transfer in Porous Media with Phase Change. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1972, vol. 15, pp. 43–60.
8. Il'ichev A.T., Tsyppkin G.G. Catastrophic Transition to Instability of Evaporation Front in a Porous Medium. *European Journal of Mech. B.Fluids*, 2008, vol. 27, pp. 665–677.
9. Ильичев А.Т., Цыпкин Г.Г. Неустойчивости однородных фильтрационных течений с фазовым переходом. *ЖЭТФ*, 2008, т. 134, вып. 4(10), с. 815–830.
10. Ильичев А.Т., Цыпкин Г.Г. Слабонелинейная теория неустойчивости длинноволновых возмущений. *Докл. Акад. Наук*, 2007, т. 416, № 1, с. 96–104.
11. Ильичев А.Т., Цыпкин Г.Г. Классификация типов неустойчивости вертикальных течений в геотермальных системах. *Труды Математического института им. В.А. Стеклова*, 2013, т. 281, вып. 2 (в печати).

Статья поступила в редакцию 21.02.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

А.Т. Ильичев, Г.Г. Цыпкин. Взаимодействие стабилизирующих и дестабилизирующих факторов и бифуркации фронтов фазового раздела в геотермальных системах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/608.html>

Ильичев Андрей Теймуразович — профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; ведущий научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова РАН; д-р физ.-мат. наук; автор более 80 научных работ в области механики сплошной среды; сфера научных интересов: нелинейные волны, гидродинамическая устойчивость, теория фильтрации. e-mail: ilichev@mi.ras.ru

Цыпкин Георгий Геннадьевич — ведущий научный сотрудник Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; автор около 100 научных работ в области механики сплошной среды; сфера научных интересов: теория фильтрации. e-mail: tsyppkin@ipmnet.ru