УДК 533.6.013.42

Задача взаимодействия упругой сферической оболочки с жидкостью

© В.Г. Богомолов[1], А.А. Федотов[1]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 105005, Россия.

Рассмотрена модель сферической оболочки в рамках оболочечных уравнений типа Тимошенко. Решена задача о взаимодействии тонкой сферической оболочки с окружающей ее акустической жидкостью с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига. Предложен метод получения аналитического решения задачи о взаимодействии тонкой сферической оболочки с окружающей ее акустической жидкостью, основанный на применении преобразования Лапласа.

Ключевые слова: *сферическая оболочка, акустическая жидкость, падающая волна.*

Введение. Изучению взаимодействия упругой конструкции с жидкостью посвящен ряд работ [1–8]. Некоторые типы оболочек и оболочечных конструкций (в рамках гипотез Кирхгофа — Лява) исследованы в работах [1, 9, 10].

В моделях, описывающих упругое тело, заключенное между двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми постоянно и мало по сравнению с другими характерными размерами, при описании движения частиц тела можно перейти от уравнений теории упругости к уравнениям теории тонких оболочек. Теория оболочек типа Тимошенко учитывает инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига. В таких оболочках возмущение распространяется с конечной скоростью.

В настоящей работе в рамках указанной модели получено аналитическое решение в изображениях задачи о взаимодействии тонкой сферической оболочки, описываемой уравнениями типа Тимошенко, с окружающей ее акустической жидкостью. Исследован частный предельный случай для безразмерной оболочки. Установлено, что в предельном случае полученные результаты совпадают с предельными результатами, выведенными на основе оболочечных уравнений Кирхгофа — Лява.

Постановка и решение задачи. Пусть t — время, $Ox'y'z'$ — подвижная декартова система координат, начало O которой в любой момент времени совпадает с центром масс сферической оболочки и, следовательно, в начальный момент движения (до начала воздействия волны и нагрузки) — с центром сферы радиусом a. Обозначим w', v' — соответственно радиальное и тангенциальное смещения срединной поверхности оболочки в подвижной системе координат ($w' > 0$ по направлению к центру сферы); p'_d, p'_R — соответственно дифракционное давление и давление излучения в жидкости, q' — поверхностная сила на единицу площади (предполагается, что избыточная падающая волна p'_i и сила q' являются осесимметричными и до момента $t = 0$ они тождественно равны нулю); ξ' — смещение центра масс оболочки относительно начального положения в момент $t = 0$, когда он совпадал с центром сферической оболочки (предполагается, что $\xi' > 0$ в направлении отрицательной полуоси Oz'); ρ, ρ' — соответственно плотности жидкости и материала оболочки; a, h — радиус срединной поверхности оболочки и ее толщина; c_{10}, c_{20} — скорости распространения фронтов волн по срединной поверхности оболочки; c — скорость звука в жидкости; Ψ — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки в плоскости $(r,\ \theta)$; k_T — численный коэффициент сдвига; ν, E — соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала оболочки; $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

В рамках оболочечных уравнений типа Тимошенко [9], учитывающих инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига, в линейном приближении осесимметричное движение в акустической жидкости тонкой упругой сферической оболочки, подверженной воздействию нестационарной падающей волны избыточного давления $p'_i = p'_i(r',\ \theta,\ t)$ и поверхностной силы с интенсивностью $q' = q'(\theta,\ t)$, описывается в безразмерных переменных в подвижной системе координат следующей системой уравнений:

$$\left[\nabla^2 - (\nu + \mathrm{ctg}^2\theta) - \chi - (1+\varepsilon)\gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]V + \\ + \left[\chi - 2\varepsilon\gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]\Psi - \left[(1+\nu+\chi)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]W = 0; \quad (1)$$

$$\left[\chi - 2\varepsilon\gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]V + \left[\varepsilon\left(\nabla^2 - \mathrm{ctg}^2\theta - \nu - \gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) - \chi\right]\Psi + \chi\frac{\partial}{\partial\theta}W; \quad (2)$$

$$\left[(1+\nu+\chi)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\,\theta\right)\right]V - \left[\chi\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\,\theta\right)\right]\Psi + \\ + \left[\chi\nabla^2 - 2(1+\nu) - (1+\varepsilon)\gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]W = -\gamma_0 p; \quad (3)$$

$$2\gamma\left(1+\varepsilon\right)\ddot{\xi}=\gamma_0\int\limits_0^\pi p\cos\theta\sin\theta\,d\theta,\ \ p=\left(p_i+p_d+p_R\right)_{r=1}+q, \tag{4}$$

с граничными и начальными условиями вида

$$\Psi=V=\frac{\partial W}{\partial\theta}=0,\ \ (\theta=0,\ \pi); \tag{5}$$

$$\xi=V=\Psi\,W=0,\ \ \frac{d\xi}{d\tau}=\frac{dV}{d\tau}=\frac{d\Psi}{d\tau}=\frac{dW}{d\tau}=0\ \ \ (\tau=0); \tag{6}$$

$$\Delta p_d=\frac{\partial^2 p_d}{\partial\tau^2}\ \ (r>1); \tag{7}$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial r}=\frac{\partial p_i}{\partial r}\ \ \ (r=1); \tag{8}$$

$$p_d=\frac{\partial p_d}{\partial\tau}=0\ \ \ \ (\tau=0); \tag{9}$$

$$\Delta p_R=\frac{\partial^2 p_R}{\partial\tau^2}\ \ \ \ (r>1); \tag{10}$$

$$\frac{\partial p_R}{\partial r}=\gamma_1\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}\ \ \ (r=1); \tag{11}$$

$$p_R=\frac{\partial p_R}{\partial\tau}=0\ \ \ (\tau=0). \tag{12}$$

Решения уравнений (1)–(6) и (10)–(12) взаимно связаны, так как в них входит величина W. В выражениях (1)–(12) обозначено

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta};$$

$\Delta\equiv\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{1}{\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]$ — оператор Лапласа в сферических координатах r, θ (осесимметричный случай), где $r = r'/a$; $z' = r\cos\theta$; $y' = r\sin\theta\sin\varphi$; $x' = r\sin\theta\cos\varphi$ [11]. Введем безразмерные величины:

$$\tau=\frac{ct}{a},\ V=v+\xi\sin\theta,\ W=w+\xi\cos\theta,\ v=\frac{v'}{a},\ w=\frac{w'}{a},\ \xi=\frac{\xi'}{a},\ \chi=\frac{c_{20}^2}{c_{10}^2},$$

$$c_{10}^2=\frac{E}{\left[\rho_1\left(1-\nu^2\right)\right]},\ c_{20}^2=\frac{Ek_T}{\left[2\rho_1\left(1+\nu\right)\right]},\ \varepsilon=\frac{h^2}{12a^2},\ \ \gamma=\frac{c^2}{c_{10}^2},\ \ p_i=\frac{p_i'}{E},$$

$$p_d=\frac{p_d'}{E},\ p_R=\frac{p_R'}{E},\ \gamma_0=\frac{\left(1-\nu^2\right)a}{h},\ \gamma_1=\frac{\rho c^2}{E},\quad q=\frac{q'}{E}.$$

Отметим, что в рассматриваемой задаче ищется только возмущенное движение оболочки и жидкости по отношению к статическому состоянию, определяемому до момента движения $t=0$ статическим постоянным давлением p_0' в жидкости, окружающей оболочку.

Применяя к уравнениям (1)–(6) преобразование Лапласа по τ:

$$f^-=\int\limits_0^\infty f e^{-s\tau}d\tau \ \text{ при } \operatorname{Re}s>0;$$

$$f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} f^- e^{s\tau}\,ds\,(b>0),$$

вводя новые переменные V^{-0}, Ψ^{-0}, W^{-0} по формулам

$$V^-=\frac{\partial V^{-0}}{\partial\theta},\ \Psi^-=\frac{\partial\Psi^{-0}}{\partial\theta},\ W^-=W^{-0} \tag{13}$$

и разлагая функции V^{-0}, Ψ^{-0}, W^{-0}, p_i, p_d, p_R, d в ряды по полиномам Лежандра:

$$f^-=\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos\theta),\quad f_n^-=(n+1/2)\int\limits_0^\pi f^- P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

приводим систему (1)–(6) к виду

$$(\lambda+k_1)V_n^{-0}-k_2\Psi_n^{-0}+k_3W_n^{-0}=0; \tag{14}$$

$$-k_2V_n^{-0}+(\lambda\varepsilon-k_5)\Psi_n^{-0}-\chi W_n^{-0}=0; \tag{15}$$

$$-\lambda k_3V_n^{-0}+\lambda\chi W_n^{-0}-(\lambda\chi-k_4)W_n^{-0}=-\gamma_0 p_n^-, \tag{16}$$

где

$$k_1=\chi+(1+\varepsilon)\gamma s^2-1+\nu,\quad k_2=\chi-2\varepsilon\gamma_s^2;\ k_3=1+\nu+\chi;$$

$$k_4=-2(1+\nu)-(1+\varepsilon)\gamma_s^2,\quad k_5=\varepsilon(1-\nu)-\varepsilon\gamma_s^2-\chi; \tag{17}$$

$$p_n^-=\left(p_{i,n}^-+p_{d,n}^-+p_{R,n}^-\right)_{r=1}+q_n^-. \tag{18}$$

Решая систему (14)–(16) относительно W_n^{-0}, получаем с учетом обозначений (13) выражение для W_n^-:

$$W_n^- = \frac{\gamma_0 \left(A_{1n} s^4 + B_{1n} s^2 + C_{1n} \right) p_n^-}{\left(D_{2n} s^6 + A_{2n} s^4 + B_{2n} s^2 + C_{2n} \right)}; \tag{19}$$

$$W_n^- = w_n^- + \xi^- \delta_{1n}. \tag{20}$$

Здесь $\delta_{1n} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 1 \\ 1 & \text{при } n = 1 \end{cases}$ — символ Кронекера, а коэффициенты в выражении (19) находятся по формулам

$$A_{1n} = -k_{11} k_{51} - k_{21}^2;$$

$$B_{1n} = \lambda \left(\varepsilon k_{11} - k_{51} \right) - k_{12} k_{51} - k_{11} k_{52} - 2 k_{21} k_{22};$$

$$C_{1n} = \lambda^2 \varepsilon + \lambda \left(\varepsilon k_{12} - k_{52} \right) - k_{12} k_{52} - k_{22}^2;$$

$$D_{2n} = k_{11} A_{1n};$$

$$A_{2n} = \lambda \left(-\chi k_{11} k_{51} + \varepsilon k_{11}^2 - k_{51} k_{11} - \chi k_{21}^2 \right) +$$

$$+ k_{11} k_{51} k_{42} - k_{12} k_{51} k_{11} - k_{11}^2 k_{52} - 2 k_{22} k_{11} k_{21} + k_{21}^2 k_{42};$$

$$B_{2n} = \lambda^2 \left(\varepsilon \chi k_{11} - \chi k_{51} + \varepsilon k_{11} \right) +$$

$$+ \lambda (\varepsilon k_{12} k_{11} - \chi k_{12} k_{51} - \chi k_{11} k_{52} - \varepsilon k_{11} k_{42} -$$

$$- k_{52} k_{11} + k_{51} k_{42} + 2 \chi k_3 k_{21} + k_3^2 k_{51} - \chi^2 k_{11} - 2 \chi k_{21} k_{22}) +$$

$$+ k_{12} k_{51} k_{42} - k_{12} k_{11} k_{52} + k_{11} k_{52} k_{42} + 2 k_{22} k_{21} k_{42} - k_{22}^2 k_{11};$$

$$C_{2n} = \lambda^3 \varepsilon \chi + \lambda^2 \left(\varepsilon \chi k_{12} - \chi k_{52} - \varepsilon k_{42} - \varepsilon k_3^2 - \chi^2 \right) +$$

$$+ \lambda \left(k_{52} k_{42} - \chi k_{12} k_{52} - \varepsilon k_{12} k_{42} + 2 \chi k_{22} k_3 + k_3^2 k_{52} - \chi k_{12} - \chi k_{22}^2 \right) +$$

$$+ k_{12} k_{52} k_{42} + k_{22}^2 k_{42};$$

$$k_{11} = (1 + \varepsilon) \gamma; \;\; k_{12} = \chi - 1 + \nu; \;\; k_{21} = -2 \varepsilon \gamma; \;\; k_{22} = \chi; \;\; k_3 = 1 + \nu + \chi;$$

$$k_{54} = -\varepsilon \gamma; \;\; k_{52} = \varepsilon (1 - \nu) - \chi; \;\; k_{42} = -2 (1 + \nu).$$

Для определения величин $p_{d,n}$ и $p_{R,n}$, входящих в выражение (18) для p_n, найдем решение систем (7)–(9) и (10)–(12), применяя к ним преобразование Лапласа по τ и разлагая изображение в ряды по полиномам Лежандра. В результате получаем

$$p_{d,n}^{-}(r) = -\left(\frac{\partial p_{i,n}}{\partial r}\right)_{r=1} \frac{K_{n+1/2}(sr)/r^{1/2}}{s^{3/2}\left(K_{n+1/2}(s)/s^{1/2}\right)_s'};$$

$$p_{R,n}^{-}(r) = \frac{\gamma_1 s^{1/2} W_n^{-} K_{n+1/2}(sr)/r^{1/2}}{\left(K_{n+1/2}(s)/s^{1/2}\right)_s'}.$$

Здесь $K_{n+1/2}(s)$ — функция Макдональда от аргумента s порядка $n + 1/2$.

Тогда с учетом (18) находим

$$p_n^{-} = \left(p_{i,n}^{-} + p_{d,n}^{-} + p_{R,n}^{-}\right)_{r=1} + q_n^{-} =$$

$$= \left(p_{i,n}^{-}\right)_{r=1} - \left(\frac{\partial p_{i,n}^{-}}{\partial r}\right)_{r=1} \frac{\Phi_n}{s} + \gamma_1 s \Phi_n W_n^{-} + q_n^{-}, \qquad (21)$$

где

$$\Phi_n \equiv \Phi_n(s) = \frac{\left[K_{n+1/2}/s^{1/2}\right]}{\left[\left(K_{n+1/2}/s^{1/2}\right)_s'\right]}.$$

Из выражений (19) и (21) определяем

$$W_n^{-} = \frac{\left\{A_{1n}s^4 + B_{1n}s^2 + C_{1n}\gamma_0\left[(p_{i,n}^{-})_{r=1} - \left(\partial p_{i,n}^{-}/\partial r\right)_{r=1}\Phi_n/s + q_n^{-}\right]\right\}}{D_{2n}s^6 + A_{2n}s^4 + B_{2n}s^2 + C_{2n} - \gamma_1\gamma_0 s\Phi_n\left(A_{1n}s^4 + B_{1n}s^2 + C_{1n}\right)}. \qquad (22)$$

Из соотношений (17) и (22) получаем

$$\xi^{-} = \frac{\gamma_0}{3(1+\varepsilon)\gamma s^2}\left[(p_{i,1}^{-})_{r=1} - \left(\frac{\partial p_{i,1}^{-}}{\partial r}\right)_{r=1}\frac{\Phi_1}{s} + q_1^{-}\right] + m\frac{\Phi_1}{s}W_1^{-}, \qquad (23)$$

где m — отношение массы жидкости в объеме сферической оболочки радиусом a к массе самой оболочки,

$$m = \frac{\gamma_0\gamma_1}{3\gamma(1+\varepsilon)}.$$

С учетом (13), (20), (22), (23) окончательные выражения для изображений смещения центра масс ξ^{-}, коэффициентов разложений радиального смещения w_n^- и результирующей нагрузки на оболочку p_n^- примут вид

$$\xi^- = \gamma_0 L_1 \left[3(1+\varepsilon)\gamma s^2 \left(1-\gamma_1\gamma_0 s\Phi_1 \mathrm{M}_1\right)\right]^{-1}; \tag{24}$$

$$w_n^- = W_n^- - \xi^- \delta_{1n} = \frac{\gamma_0 L_n M_n}{1-\gamma_1\gamma_0 s\Phi_n M_n}\left[1-\frac{\delta_{1n}}{2\gamma(1+\varepsilon)s^2 M_1}\right]; \tag{25}$$

$$p_n^- = L_\mathrm{n}\left(1-\gamma_1\gamma_0 s\Phi_n M_n\right)^{-1}, \tag{26}$$

$$L_n = (p_{i,n}^-)_{r=1} - \left(\partial p_{i,n}^- \big/ \partial r\right)_{r=1} \Phi_n \big/ s + q_n^-; \tag{27}$$

$$M_n = \left(A_{1n}s^4 + B_{1n}s^2 + C_{1n}\right) \Big/ \left(D_{2n}s^6 + A_{2n}s^4 + B_{2n}s^2 + C_{2n}\right). \tag{28}$$

Для изображения безразмерной силы находим

$$F = 2\int_0^\pi \left[\left(p_i^- + p_d^- + p_R^-\right)_{r=1} + q^-\right]\cos\theta\sin\theta\, d\theta = 4\gamma(1+\varepsilon)s^2\xi^- \big/ \gamma_0.$$

В частном предельном случае безразмерной оболочки ($\chi \to 0$, $\varepsilon \to 0$) из соотношений (24)–(28) получаем результаты, совпадающие с полученными в работе [9] (если в формулах, выведенных на основе оболочечных уравнений Кирхгофа — Лява, перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$).

Заключение. Таким образом, установлено, что аналитическое решение в изображениях задачи о взаимодействии тонкой сферической оболочки с окружающей ее акустической жидкостью в предельном случае совпадает с предельными результатами, выведенными на основе оболочечных уравнений Кирхгофа — Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авербух А.З., Вецман Р.И., Генкин М.Д. *Колебания элементов конструкции в жидкости*. Москва, Наука, 1987, 158 с.
2. Богомолов В.Г. Динамическая задача взаимодействия упругой оболочечной конструкции с акустической средой. *Современные методы теории краевых задач*. *Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXI»*. ВГУ, МГУ, МИ РАН, 2010, с. 38–39.
3. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. Москва, Физматлит, 2004. 467 с.
4. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарные контактные задачи с подвижными границами для деформируемого тела и полупространства. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, 2000, № 3, с. 41–45.

5. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. *Нестационарная гидроупругость оболочек*. Ленинград, Судостроение, 1974, 208 с.
6. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. *Методы расчета оболочек*. Киев, Наук. думка, 1982, т. 5, 399 с.
7. Кубенко В. Д. *Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость*. Киев, Наук. думка, 1981, 160 с.
8. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Ленинград, Судостроение, 1980, 343 с.
9. Метсавээр Я.А., Векслер Н.Д., Стулов А.С. *Дифракция акустических импульсов на упругих телах*. Москва, Наука, 1979, 239 с.
10. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. О резонансных частотах оболочек, колеблющихся в бесконечной жидкости. *ПММ*, 1979, т. 43, вып. 5, с. 869–876.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука, 1973, 736 с.

Статья поступила в редакцию 21.02.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

В.Г. Богомолов, А.А. Федотов. Задача взаимодействия упругой сферической оболочки с жидкостью. *Инженерный журнал: наука и инновации*, *2013, вып. 2*. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/605.html

Богомолов Владимир Георгиевич — доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; канд. физ.-мат. наук; сфера научных интересов: задачи гидроупругости. e-mail: bogomovg@yandex.ru

Федотов Анатолий Александрович — доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана; канд. физ.-мат. наук; сфера научных интересов: задачи аэрогидродинамики. e-mail: le-tail@list.ru