УДК 517.954.5

Оценки первого собственного значения эллиптической краевой задачи с параметром

© А.В. Филиновский[1]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 105005, Россия.

Установлены оценки первого собственного значения краевой задачи с параметром в граничном условии для эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области. Получено асимптотическое разложение первого собственного значения при больших значениях параметра.

Ключевые слова: *эллиптическое уравнение второго порядка, краевая задача с параметром, собственные значения.*

Рассмотрим спектральную задачу с вещественным параметром α для самосопряженного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha g(x) u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей Γ, где λ — спектральный параметр; $g(x)$ — функция, непрерывная на Γ и удовлетворяющая условию $g(x) \geq g_0 > 0$.

Коэффициенты $a_{ij}(x)$ будем предполагать вещественнозначными, непрерывно дифференцируемыми в $\overline{\Omega}$, удовлетворяющими условиям симметричности $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и эллиптичности

$$\left(A(x)\xi, \xi\right) \geq \theta |\xi|^2, \quad \theta > 0, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in R^n.$$

Производная по конормали в граничном условии (2) определена равенством

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j,$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ.

Задача (1), (2) возникает при исследовании колебаний неоднородной мембраны с упруго закрепленным краем. В случае $g(x)=1$ она называется задачей Робена для $\alpha > 0$ и обобщенной задачей Робена для $\alpha < 0$.

Рассматривая задачу (1), (2) в пространстве $H^1(\Omega)$, мы ищем значения λ, для которых существует ненулевая функция $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \alpha \int\limits_{\Gamma} guvds = \lambda \int\limits_{\Omega} uvdx \tag{3}$$

при любой функции $v \in H^1(\Omega)$. Равенство (3) может быть записано с произвольной постоянной $M > 0$:

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + Muv \right) dx + \alpha \int\limits_{\Gamma} guvds = (\lambda + M) \int\limits_{\Omega} uvdx. \tag{4}$$

Определим в пространстве $H^1(\Omega)$ эквивалентное исходному скалярное произведение

$$[u,v]_M = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + Muv \right) dx$$

и норму $\|u\|_M^2 = [u,u]_M$.Теперь равенство (4) можно преобразовать к виду

$$[u,v]_M + \alpha [Tu,v]_M = (\lambda + M)[Bu,v]_M,$$

где самосопряженные операторы $T: H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ и $B: H^1(\Omega) \to$ $\to H^1(\Omega)$ определяются билинейными формами

$$[Tu,v]_M = \int\limits_{\Gamma} guvds; \ [Bu,v]_M = \int\limits_{\Omega} uvdx, \quad u,v \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

Таким образом, имеем спектральную задачу в пространстве $H^1(\Omega)$ с нормой $\|\cdot\|_M$:

$$(I + \alpha T)u = (\lambda + M)Bu, \tag{6}$$

где I — единичный оператор.

В области с гладкой границей для каждой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедлива оценка [1]

$$\int\limits_{\Gamma} v^2 ds \le \int\limits_{\Omega} \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + C_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) v^2 \right) dx \tag{7}$$

с постоянной C_1, зависящей от Ω, и произвольным $\varepsilon > 0$. С учетом выражений (5) и (7) получаем

$$\|Tu\|_M^2 = [Tu, Tu]_M = \int\limits_{\Gamma} guTuds \le g_1 \|u\|_{L_2(\Gamma)} \|Tu\|_{L_2(\Gamma)} \le$$

$$\le g_1 \varepsilon \left\{ \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla Tu|^2 + \frac{C_1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) (Tu)^2 \right] dx \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + \frac{C_1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) u^2 \right] dx \right\}^{1/2} \le$$

$$\le C_2 \varepsilon \|Tu\|_M \|u\|_M. \tag{8}$$

Здесь $M = M_\varepsilon = \dfrac{C_1}{\varepsilon} \left(1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \right)$; $g_1 = \sup\limits_{x \in \Gamma} g(x)$; C_2 — постоянная, зависящая от коэффициентов $a_{ij}(x)$ и g_1, $C_2 > 0$.

Из неравенства (8) вытекает, что

$$\|Tu\|_{M_\varepsilon} \le C_2 \varepsilon \|u\|_{M_\varepsilon},$$

поэтому при $\varepsilon < \varepsilon_1$, где ε_1 зависит от C_2 и α, справедливо неравенство $\|\alpha T\|_{H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)} < 1$, обратный оператор $(I + \alpha T)^{-1}$ ограничен и $\left\|(I + \alpha T)^{-1}\right\| \le \left(1 - |\alpha| \|T\|\right)^{-1}$. Следовательно, уравнение (6) может быть приведено к виду

$$\left[I - (\lambda + M)(I + \alpha T)^{-1} B \right] u = 0.$$

Оператор B является компактным [1], а значит, оператор $(I + \alpha T)^{-1} B: \, H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ также компактен при данном α. Таким образом, спектр задачи (6) состоит из последовательности собственных значений конечной кратности $\{\lambda_j\} \subset R$, $j = 1, 2, ...,$ с единственной предельной точкой на бесконечности. Поскольку $\left[(I + \alpha T)^{-1} Bu, u \right]_M \ge 0$, имеем

$$\lambda_j \ge -M, \;\; \lambda_j \to +\infty, \;\; j \to \infty.$$

Рассмотрим первое собственное значение $\lambda_1 = \lambda_1(\alpha)$ задачи (1), (2). Собственное значение λ_1 является простым при всех $-\infty < \alpha < \infty$ [2]. Обозначим соответствующую собственную функцию u_α. Поскольку оператор $(I + \alpha T)^{-1} B$ является компактным и самосопряженным, в соответствии с вариационным принципом имеем равенство

$$\lambda_1(\alpha) = \inf_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\int\limits_\Omega \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \alpha \int\limits_\Gamma g v^2 ds}{\int\limits_\Omega v^2 dx}. \tag{9}$$

Нас будет интересовать поведение $\lambda_1(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$. Пусть $\lambda_1^{(d)}$ — первое собственное значение задачи Дирихле

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega; \tag{10}$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{11}$$

а $\tilde{u}$ — соответствующая собственная функция.

Лемма 1. *Функция* $\lambda_1(\alpha)$ *имеет следующие свойства:*

монотонно возрастает и удовлетворяет неравенству $\lambda_1 < \lambda_1^{(d)}$;

выпукла вверх, т. е.

$$\lambda_1\left(\beta\alpha_1 + (1-\beta)\alpha_2\right) \geq \beta\lambda_1\left(\alpha_1\right) + (1-\beta)\lambda_1\left(\alpha_2\right), \ 0 < \beta < 1;$$

дифференцируема и

$$\lambda_1'(\alpha) = \frac{\int\limits_\Gamma g u_\alpha^2 ds}{\int\limits_\Omega u_\alpha^2 dx} > 0. \tag{12}$$

Доказательство. Монотонное возрастание $\lambda_1(\alpha)$ следует непосредственно из равенства (9). Кроме того, в силу (9) выполняется неравенство

$$\lambda_1(\alpha) \leq \inf_{v \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)} \frac{\int\limits_\Omega \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \alpha \int\limits_\Gamma g v^2 ds}{\int\limits_\Omega v^2 dx} =$$

$$= \inf_{v \in \overset{0}{H}{}^{1}(\Omega)} \frac{\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx}{\int\limits_{\Omega} v^2 dx} = \lambda_1^{(d)}, \tag{13}$$

откуда следует оценка

$$\lambda \le \lambda_d^{(d)}.$$

Неравенство $\lambda < \lambda_d^{(d)}$ будет доказано ниже.

Выпуклость $\lambda_1(\alpha)$ вытекает из неравенства

$$\lambda_1\left(\beta\alpha_1 + (1-\beta)\alpha_2\right) \ge \beta \inf_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \alpha_1 \int\limits_{\Gamma} g v^2 ds}{\int\limits_{\Omega} v^2 dx} +$$

$$+ (1-\beta) \inf_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \alpha_2 \int\limits_{\Gamma} g v^2 ds}{\int\limits_{\Omega} v^2 dx} =$$

$$= \beta\lambda_1\left(\alpha_1\right) + (1-\beta)\lambda_1\left(\alpha_2\right).$$

Наконец, для доказательства равенства (12) применим оценки

$$\lambda_1(\alpha_2) - \frac{\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_{\alpha_2}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{\alpha_2}}{\partial x_j} dx + \alpha_1 \int\limits_{\Gamma} g u_{\alpha_2}^2 ds}{\int\limits_{\Omega} u_{\alpha_2}^2 dx} \le \lambda_1(\alpha_2) - \lambda_1(\alpha_1) \le$$

$$\le \frac{\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u_{\alpha_1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{\alpha_1}}{\partial x_j} dx + \alpha_2 \int\limits_{\Gamma} u_{\alpha_1}^2 ds}{\int\limits_{\Omega} u_{\alpha_1}^2 dx} - \lambda_1(\alpha_1),$$

из которых получаем двустороннее неравенство

$$\frac{\int\limits_{\Gamma} g u_{\alpha_2}^2 ds}{\int\limits_{\Omega} u_{\alpha_2}^2 dx} \le \frac{\lambda_1(\alpha_2) - \lambda_1(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} \le \frac{\int\limits_{\Gamma} g u_{\alpha_1}^2 ds}{\int\limits_{\Omega} u_{\alpha_1}^2 dx}. \tag{14}$$

Поскольку собственная функция u_α зависит от α непрерывно в пространстве $H^1(\Omega)$ [3], из оценки (14) следует, что

$$\lambda_1'(\alpha_1) = \lim_{\alpha_2 \to \alpha_1} \frac{\lambda_1(\alpha_2) - \lambda_1(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\int_\Gamma g u_{\alpha_1}^2 ds}{\int_\Omega u_{\alpha_1}^2 dx}.$$

Применяя теорему единственности решения задачи Коши для эллиптических уравнений [4], получаем, что $\int_\Gamma u_{\alpha_1}^2 ds > 0$, а значит, $\int_\Gamma g u_{\alpha_1}^2 ds > 0$. Это доказывает соотношение (12) и неравенство $\lambda_1 < \lambda_1^{(d)}$.

Неравенство $\lambda_1 < \lambda_1^{(d)}$ дает верхнюю границу $\lambda_1(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$. В работе [5] для $a_{ij} = \delta_{ij}$, $g = 1$ и $n = 2$ была получена следующая двусторонняя оценка:

$$\lambda_1^{(d)} \left(1 + \frac{\lambda_1^{(d)}}{\alpha q_1}\right)^{-1} \le \lambda_1(\alpha) \le \lambda_1^{(d)} \left(1 + \frac{4\pi}{\alpha |\Gamma|}\right)^{-1}, \qquad (15)$$

где $\alpha > 0$; $q_1 = \inf\limits_{y \in H^1(\Omega), \Delta y = 0} \frac{\int_\Gamma y^2 ds}{\int_\Omega y^2 dx}$; $|\Gamma|$ — длина граничной кривой. В дальнейшем свойства функции $\lambda_1(\alpha)$ изучали различные авторы [6–11].

Теорема 1. *Для $n \ge 2$ и $\alpha > 0$ справедлива оценка*

$$\lambda_1(\alpha) \ge \left(\frac{1}{\lambda_1^{(d)}} + \frac{1}{\alpha q_g}\right)^{-1}, \qquad (16)$$

где

$$q_g = \inf_{y \in H^1(\Omega),\ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i}\right) = 0} \frac{\int_\Gamma g y^2 ds}{\int_\Omega y^2 dx}.$$

Доказательство. Для произвольной функции $v \in H^1(\Omega)$ рассмотрим краевую задачу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{17}$$

$$v - y = 0 \ \text{ на } \ x \in \Gamma. \tag{18}$$

Условие (18) означает, что $w = v - y \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$. В этом случае

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}dx = 0; \ \int_\Gamma gywds = 0. \tag{19}$$

С учетом выражений (9) и (19) получаем

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega v^2 dx}{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \alpha\int_\Gamma gv^2 ds} =$$

$$= \sup_{v \in H^1(\Omega), v-y \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega), \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)=0} \times$$

$$\times \frac{\int_\Omega (y+w)^2 dx}{\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)dx + \alpha\int_\Gamma g(y^2+w^2)ds} \le$$

$$\le \sup_{v \in H^1(\Omega), v-y \in \overset{0}{H}{}^1(\Omega), \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)=0} \times$$

$$\times \frac{\left[\left(\int_\Omega y^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega w^2 dx\right)^{1/2}\right]^2}{\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)dx + \alpha\int_\Gamma g(y^2+w^2)ds}.$$

Используя теперь неравенство

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+d^2} \le \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}$$

при

$$a^2 = \int_\Omega w^2 dx;\;\; b^2 = \int_\Omega y^2 dx;$$

$$c^2 = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} dx + \alpha \int_\Gamma g w^2 ds;\; d^2 = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j} dx + \alpha \int_\Gamma g y^2 ds,$$

получаем оценки

$$\frac{1}{\lambda_1} \le \sup_{v\in H^1(\Omega),\, v-y\in \overset{0}{H}{}^1(\Omega),\, \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)=0} \left(\frac{\int_\Omega w^2 dx}{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} dx + \alpha \int_\Gamma g w^2 ds} + \right.$$

$$\left. + \frac{\int_\Omega y^2 dx}{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j} dx + \alpha \int_\Gamma g y^2 ds} \right) \le$$

$$\le \sup_{v\in H^1(\Omega),\, v-y\in \overset{0}{H}{}^1(\Omega),\, \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)=0} \frac{\int_\Omega w^2 dx}{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} dx + \alpha \int_\Gamma g w^2 ds} +$$

$$+ \sup_{v\in H^1(\Omega),\, v-y\in \overset{0}{H}{}^1(\Omega),\, \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)=0} \frac{\int_\Omega y^2 dx}{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j} dx + \alpha \int_\Gamma g y^2 ds} \le$$

$$\le \sup_{w\in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega w^2 dx}{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} dx} + \frac{1}{\alpha} \sup_{y\in H^1(\Omega),\, \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)=0} \times$$

$$\times \frac{\int_\Omega y^2 dx}{\int_\Gamma g y^2 ds} = \frac{1}{\lambda_1^{(d)}} + \frac{1}{\alpha q_g}.$$

Теорема доказана.

Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что при $C_3 > 0$ и $\alpha \ge \alpha_0 > 0$ имеет место двусторонняя оценка

$$0 < \lambda_1^{(d)} - C_3\alpha^{-1} \le \lambda_1(\alpha) \le \lambda_1^{(d)}.$$

Помимо оценок нас также интересует получение асимптотических разложений собственного значения $\lambda_1(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n \ge 2$. *Тогда справедливо представление*

$$\lambda_1(\alpha) = \lambda_1^{(d)} - \frac{\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial N}\right)^2 \frac{ds}{g}}{\int\limits_{\Omega} \tilde{u}^2 dx} \alpha^{-1} + o\left(\alpha^{-1}\right), \quad \alpha \to +\infty. \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\right) + \lambda_1 u_\alpha = 0, \quad x \in \Omega;$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial N} + \alpha g(x) u_\alpha = 0, \quad x \in \Gamma, \quad \alpha > 0,$$

и определим новый параметр $k = 1/\alpha$. Тогда, полагая $z(x,k) = u_{1/k}(x)$, $\mu(k) = \lambda_1(1/k)$, имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) + \mu z = 0, \quad x \in \Omega; \tag{21}$$

$$k\frac{\partial z}{\partial N} + g(x) z = 0, \quad x \in \Gamma, \quad k > 0. \tag{22}$$

Дифференцируя соотношения (21), (22) по k, получаем краевую задачу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dz}{dk}\right) + \mu\frac{dz}{dk} = -\frac{d\mu}{dk} z, \quad x \in \Omega; \tag{23}$$

$$k\frac{\partial}{\partial N}\frac{dz}{dk} + g(x)\frac{dz}{dk} = -\frac{\partial z}{\partial N}, \quad x \in \Gamma. \tag{24}$$

Положим $\mu(0)=\lim\limits_{k\to 0}\mu(k)=\lambda_1^{(d)}$, $z(x,0)=\tilde{u}$. Тогда, используя соотношения (21)–(24) и формулу Грина, имеем

$$0=\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial z(x,0)}{\partial x_i}\right]+\mu(0)z(x,0)\right\}\frac{dz(x,k)}{dk}dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial z(x,0)}{\partial x_i}\right]+\mu(k)z(x,0)\right\}\frac{dz(x,k)}{dk}dx+$$

$$+\left[\mu(0)-\mu(k)\right]\int\limits_{\Omega}z(x,0)\frac{dz(x,k)}{dk}dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dz(x,k)}{dk}\right]+\mu(k)\frac{dz(x,k)}{dk}\right\}z(x,0)dx+$$

$$+\left[\mu(0)-\mu(k)\right]\int\limits_{\Omega}z(x,0)\frac{dz(x,k)}{dk}dx-$$

$$-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial z(x,0)}{\partial N}\left[\frac{\partial z}{\partial N}(x,k)+k\frac{\partial}{\partial N}\frac{dz(x,k)}{dk}\right]\frac{ds}{g(x)}=$$

$$=-\frac{d\mu}{dk}(k)\int\limits_{\Omega}z(x,k)z(x,0)dx+$$

$$+\left[\mu(0)-\mu(k)\right]\int\limits_{\Omega}z(x,0)\frac{dz(x,k)}{dk}dx-$$

$$-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial z(x,0)}{\partial N}\left[\frac{\partial z(x,k)}{\partial N}+k\frac{\partial}{\partial N}\frac{dz(x,k)}{dk}\right]\frac{ds}{g(x)}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\mu}{dk}(k)=\frac{1}{\int\limits_{\Omega}z(x,k)z(x,0)dx}\left\{\left[\mu(0)-\mu(k)\right]\int\limits_{\Omega}z(x,0)\frac{dz(x,k)}{dk}dx-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial z(x,0)}{\partial N}\left[\frac{\partial z(x,k)}{\partial N}+k\frac{\partial}{\partial N}\frac{dz(x,k)}{dk}\right]\frac{ds}{g(x)}\right\}. \qquad (25)$$

Из равенства (25) получаем

$$\frac{d\mu}{dk}(0) = \lim_{k\to 0}\frac{d\mu}{dk}(k) = -\frac{\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial z(x,0)}{\partial N}\right)^2 \frac{ds}{g}}{\int\limits_{\Omega} z^2(x,0)dx}$$

и функция $\mu(k)$ имеет асимптотическое разложение

$$\mu(k) = \mu(0) + k\frac{d\mu}{dk}(0) + o(k) =$$

$$= \lambda_1^{(d)} - k\frac{\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial N}\right)^2 \frac{ds}{g}}{\int\limits_{\Omega} \tilde{u}^2 dx} + o(k), \quad k \to 0. \tag{26}$$

Разложение (26) доказывает соотношение (20).

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11-01-00989.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ladyzhenskaya O. A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Berlin, Springer-Verlag, 1985, 356 p.
2. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. New York, Wile, 1989, vol. 1, 560 p.
3. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Berlin, Springer-Verlag, 1995, 642 p.
4. Кондратьев В.А., Ландис Е.М. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. Москва, ВИНИТИ, т. 32, 1988, с. 99– 218.
5. Sperb R. Untere und Obere Schranken fur den Tiefsten Eigenwert Elastisch Gestutzen Membran. *Zeitschrift Angew. Math. Phys*, 1972, vol. 23, no. 2, ss. 231–244.
6. Daners D., Kennedy J.B. On the Asymptotic Behaviour of the Eigenvalues of a Robin Problem. *Differential Integral Equations*, 2010, vol. 23, no. 7–8. pp. 659–669.
7. Hintermuller M., Kao C.-Y., Laurain A. Principal Eigenvalue Minimization for an Elliptic Problem with Indefinite Weight and Robin Boundary Conditions. *Appl. Math. Optim*, 2012, vol. 65, no. 1, pp. 111–146.
8. Giorgi T., Smits R. Monotonicity Results for the Principal Eigenvalue of the Generalized Robin Problem. *Illinois J. Math*, 2005, vol. 49, no. 4, pp. 1133–1143.
9. Giorgi T., Smits R. Bounds and Monotonicity for the Generalized Robin Problem. *Z. Angew. Math. Phys*, 2008, vol. 59, no. 4, pp. 600–618.

10. Levitin M., Parnovski L. On the Principal Eigenvalue of a Robin Problem with a Large Parameter. *Math. Nachr*, 2008, vol. 281, no. 2, pp. 272–281.
11. Bucur D., Giacomini A. A Variational Approach to the Isoperimetric Inequality for the Robin Eigenvalue Problem. *Arch. Rat. Mech. Anal*, 2010, vol. 198, no. 3, pp. 927–961.

Статья поступила в редакцию 21.02.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

А.В. Филиновский. Оценки первого собственного значения эллиптической краевой задачи с параметром. *Инженерный журнал: наука и инновации*, *2013, вып*. *2*. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/604.html

Филиновский Алексей Владимирович — проф. кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана; д-р физ.-мат. наук; автор более 60 научных работ. Сфера научных интересов: спектральная теория краевых задач, стабилизация решений, экстремальные задачи для уравнений в частных производных. e-mail: flnv@yandex.ru