УДК 517.977, 519.626

Начально-краевая задача для уравнений динамики вращающейся жидкости

© А.А. Гурченков[1]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва 105005, Россия.

Исследованы колебания вязкой несжимаемой жидкости, которая заполняет полупространство, ограниченное плоской стенкой, и вращается вначале как твердое тело вместе со стенкой под действием внезапно начинающихся продольных колебаний. Приведено точное решение начально-краевой задачи для уравнений Навье—Стокса в случае течения жидкости, индуцированного плоской пластиной. Вычислен вектор касательных напряжений, действующих на пластины со стороны жидкости. Показано, что при отсутствии вращения решение переходит в известное решение задачи о нестационарном движении жидкости, ограниченной перемещающейся плоской стенкой. Исследованы квазигармонические колебания пластины и движение с постоянным ускорением. В частном случае гармонических колебаний и предположении о перпендикулярности оси вращения плоскости пластины показано совпадение с результатами, полученными К. Тарнлей. Сформулированы выводы об асимптотическом поведении решений.

Ключевые слова: *вязкая жидкость, уравнения Навье—Стокса, начально-краевая задача, пограничные слои.*

Введение. Задачи динамики тел с полостями, содержащими жидкость, относятся к числу трудных задач классической механики и связаны с именами выдающихся механиков и математиков, таких как Г. Ламб, Г. Стокс, Л. Гельмгольц, Ж. Пуанкаре и др.). Из отечественных ученых необходимо отметить работы Н.Е. Жуковского, С.Л. Соболева, А.Ю. Ишлинского, Г.С. Нариманова, В.В. Румянцева и др.

Общая постановка задачи динамики твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость, принадлежит Н.Е. Жуковскому. Было доказано, что движение жидкости определяется движением тела, а само движение тела совершается так, как если бы жидкость была заменена эквивалентным твердым телом. При этом для определения движения жидкости в полости необходимо решить некоторые стационарные краевые задачи, зависящие только от геометрии полости.

Решение этих задач (потенциалы Жуковского) позволяют найти для данной полости компоненты тензора присоединенных масс. Движение тела с полостью, содержащей идеальную жидкость при потенциальном движении, оказывается эквивалентным движению твердого тела, тензор инерции которого складывается из тензора инерции исходного тела и тензора присоединенных масс для данной полости.

Таким образом, задача динамики тела с жидкостью разбивается на две части. Первая часть, зависящая только от геометрии полости, сводится к решению краевых задач и расчету тензора присоединенных масс, вторая — обычная задача динамики твердого тела — к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи динамики тел с полостями, содержащими вязкую жидкость [1, 2], значительно сложнее, чем в случае идеальной жидкости. Рассматривают их главным образом в линейной постановке. Эти задачи актуальны при изучении динамики космических аппаратов, которые для стабилизации, равномерного нагрева солнечными лучами, создания искусственной силы тяжести и других целей равномерно закручиваются на орбите вокруг некоторой оси, а также при проектировании быстровращающихся роторов, центрифуг, гироскопов с жидким наполнением [3]. Кроме того, поведение жидкости в условиях невесомости или малой гравитации влияет на поведение космического корабля.

Одновременно с изучением задачи о движении тела с полостью, содержащей жидкость, встала проблема устойчивости такого движения. У. Кельвин установил, что вращение волчка будет устойчивым, если полость сжата в направлении оси вращения, и неустойчивым, если волчок имеет слегка вытянутую форму. Х. Андерсен [4] исследовал характеристическое уравнение для малых колебаний твердого тела с жидкостью вблизи равномерного вращения, при этом полостью являлся эллипсоид, а жидкость внутри полости была идеальной и совершала однородное вихревое движение. В многочисленных работах по этой тематике можно выделить три направления:

1) исследование линеаризованных уравнений движения с помощью методов теории малых колебаний и спектральной теории операторов [5–7];

2) исследование полных нелинейных уравнений движения, основанное на применении и развитии второго метода Ляпунова [8, 9];

3) экспериментальные исследования.

Наиболее трудным аспектом задачи динамики тел с полостями, содержащими вязкую жидкость, является учет ее вязкости. Экспериментально установлено, что при быстром вращении движение вязкой жидкости в полости не отличается от движения идеальной жидкости в основной массе, за исключением тонкого пристеночного слоя, толщина которого мала.

Поле скоростей $\bar{v}$ вязкой жидкости можно представить в виде нормальной и касательной компонент: $\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_\tau$. При этом нормальная компонента вязкой жидкости совпадает с нормальной компонентой скорости, полученной из решения задачи для идеальной жидкости. Что касается касательной компоненты, то она быстро затухает в пограничном слое. Следовательно, задача сводится к определению поля скоростей $\vec{v}_\tau$. В силу того что прилегающий к стенке пограничный слой тонок, элемент поверхности dS с нормалью можно моделировать плоской стенкой, которая ограничивает полупространство с вязкой жидкостью, вращающейся вокруг неперпендикулярного ей направления с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ и движущейся со скоростью $\vec{v}_r$ в своей плоскости.

Нестационарный пограничный слой на вращающейся пластине. Пусть бесконечная пластина H вращается вместе с жидкостью в пространстве с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \text{const}$ и движется в своей плоскости со скоростью $\vec{u}(t)$. Пластина ограничивает полупространство Q, заполненное несжимаемой жидкостью с плотностью ρ и кинематической вязкостью ν. Жидкость находится в поле массовых сил с потенциалом U.

Свяжем с пластиной декартову систему координат $Oxyz$ с ортами $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ таким образом, что плоскость Oxz совпадет с ее плоскостью, а ось Oy будет направлена перпендикулярно пластине внутрь жидкости.

Уравнения движения жидкости в системе $Oxyz$, а также граничные и начальные условия имеют вид

$$\begin{gathered}\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla U + \nu\Delta\vec{V};\\ \operatorname{div}\vec{V} = 0, \quad \vec{r} \in Q;\\ \vec{V}(\vec{r},t) = \vec{u}(t), \quad \vec{r} \in H, \quad t > 0, \quad \left|\vec{V}(\vec{r},t)\right| \to 0, \quad |\vec{r}| \to \infty, \quad t > 0;\\ \vec{V}(\vec{r},0) = 0, \quad \vec{r} \in Q,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор относительно полюса O; $\vec{V}$ — скорость жидкости; t — время; P — давление.

Решение уравнений (1) будем искать в виде

$$\begin{gathered}P = \frac{\rho}{2}(\vec{\omega}_0 \times \vec{r})^2 + \rho U + \rho q(y,t);\\ \vec{V} = V_x(y,t)\vec{e}_x + V_z(y,t)\vec{e}_z,\end{gathered} \tag{2}$$

Тогда система (1) распадается на следующие две подсистемы:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + 2\Omega(\vec{e}_y \times \vec{V}) = \nu\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2}, \quad \vec{V} = \vec{u}(t), \quad y = 0, \quad t > 0;\\ \left|\vec{V}\right| \to 0, \quad y \to \infty, \quad t > 0, \quad \vec{V}(y,0) = 0, \quad y > 0,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\Omega = \vec{\omega}_0 \vec{e}_y$, и

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 2\vec{V}(\vec{\omega}_0 \times \vec{e}_y),$$
$$q(y,t) \to 0, \ \ y \to \infty, \ t > 0. \tag{4}$$

При этом поле скоростей определяется из уравнений (3), а поле давлений — из уравнений (4) по найденному полю скоростей.

Решение системы (3) ищем в форме

$$\vec{V}(y,t) = \vec{W}(y,t)\sin 2\Omega t - \vec{W}(y,t) \times \vec{e}_y \cos 2\Omega t;$$
$$\vec{W}(y,t) = W_x(y,t)\vec{e}_x + W_z(y,t)\vec{e}_z, \tag{5}$$

где $\vec{W}(y,t)$ — неизвестная функция.

Подставляя соотношения (5) в (3), получаем для определения $\vec{W}$ следующую задачу:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial y^2};$$
$$\vec{W}(0,t) = \vec{u}(t)\sin 2\Omega t + \vec{u}(t) \times \vec{u}(t) \times \vec{e}_y \cos 2\Omega t, \quad t > 0; \tag{6}$$
$$\left|\vec{W}(y,t)\right| \to 0, \quad y \to \infty, \quad t > 0, \qquad \vec{W}(y,0) = 0, \quad y > 0.$$

Решение уравнений (6) представляет собой известное выражение [10]

$$\vec{W}(y,t) = \frac{y}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{\vec{W}(0,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{y^2}{4\nu(t-\tau)}\right] d\tau. \tag{7}$$

Используя формулу (7), из уравнений (5) находим поле скоростей жидкости в виде

$$\vec{V}(y,t) = \frac{y}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{\vec{T}(\tau,t)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{y^2}{4\nu(t-\tau)}\right] d\tau. \tag{8}$$

Здесь

$$\vec{T}(\tau,t) = \vec{u}(\tau)\cos 2\Omega(t-\tau) + \vec{u}(\tau) \times \vec{e}_y \sin 2\Omega(t-\tau). \tag{9}$$

Решая уравнения (4) с правой частью, полученной с учетом выражений (8), (9), находим поле давлений

$$q(y,t) = 2\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}(\vec{\omega}_0 \times \vec{e}_y) \int_0^t \frac{\vec{T}(\tau,t)}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left[-\frac{y^2}{4\nu(t-\tau)}\right] d\tau. \tag{10}$$

Вектор касательных напряжений, действующих со стороны жидкости на пластину, определяется выражением [11]

$$\vec{f} = \rho\nu \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\Big|_{y=0}. \tag{11}$$

Подставив скорость $\vec{V}$ вида (8) в формулу (11), после простых, но громоздких вычислений получим

$$\vec{f} = -\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\left[\int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{T}(\tau,t)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau + \frac{\vec{T}(0,t)}{\sqrt{t}}\right]. \tag{12}$$

Соотношения (8)–(10) и (12) полностью решают поставленную задачу. При отсутствии вращения решение переходит в известное решение задачи о нестационарном движении жидкости, ограниченной перемещающейся плоской стенкой [12].

В частном случае гармонических колебаний и в предположении о перпендикулярности оси вращения плоскости пластины показано совпадение с результатами, полученными в работе [13].

Для дальнейшего анализа удобно представить поле скоростей и вектор касательных напряжений в комплексной форме. Введем комплексные векторы скорости жидкости и пластины, а также комплексный вектор напряжений:

$$\hat{V} = V_z + iV_x; \quad \hat{u} = u_z + iu_x; \quad \hat{f} = f_z + if_x. \tag{13}$$

Из выражений (8)–(12) находим

$$\hat{V} = \frac{y}{2\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \frac{\hat{u}(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-i2\Omega(t-\tau) - \frac{y^2}{4\nu(t-\tau)}\right]d\tau; \tag{14}$$

$$\hat{f} = -\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\hat{u}(\tau)\exp\left[-i2\Omega(t-\tau)\right]\right\}}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau. \tag{15}$$

Продольные квазигармонические колебания пластины. Пусть пластина колеблется в своей плоскости со скоростью

$$\hat{u} = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\hat{A}_1\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \hat{A}_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right), \tag{16}$$

где α — коэффициент затухания; $\hat{A}_j\,(j = 1, 2)$ — комплексные постоянные; ω — частота колебаний.

В этом случае поле скоростей и вектор напряжений могут быть выражены через специальные функции. Подставляя выражение (16) в (14) и (15), находим

$$\hat{V} = \frac{y}{2\sqrt{\pi\nu}} \mathrm{e}^{-i2\Omega t} \sum_{j=1}^{2} \hat{A}_j \, \mathrm{e}^{p_j t} \int_0^t \exp\left(-p_j\theta - \frac{y^2}{4\nu\theta} \right) \frac{d\theta}{\theta^{3/2}}; \tag{17}$$

$$\hat{f} = -\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \mathrm{e}^{-i2\Omega t} \sum_{j=1}^{2} \hat{A}_j p_j \, \mathrm{e}^{p_j t} \int_0^t \exp(-p_j\theta) \frac{d\theta}{\theta^{1/2}}, \tag{18}$$

где $p_{1,2} = -\alpha + i(2\Omega \pm \omega)$ (знаки «+» и «–» соответственно для индексов «1» и «2»); $\theta = t - \tau$.

Входящий в выражение (18) интеграл

$$J_1 = \int_0^t \exp(-p\theta)\theta^{-1/2} d\theta$$

заменой переменных $\xi = \sqrt{p\theta}$, $\mathrm{Re}\sqrt{p} > 0$ приводится к виду

$$J_1 = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \cdot \mathrm{erf}\sqrt{pt},$$

где $\mathrm{erf}\, x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\xi^2} d\xi.$

Входящий в выражение (17) интеграл

$$J_2 = \frac{y}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \exp\left(-p\theta - \frac{y^2}{4\nu\theta} \right) \frac{d\theta}{\theta^{3/2}} \tag{19}$$

не приводится к табличному виду [14] и требует специального приема вычисления.

Запишем

$$p\theta + \frac{y^2}{4\nu\theta} = \left(\sqrt{p\theta} + \frac{y}{2\sqrt{\nu\,\theta}} \right)^2 - y\sqrt{\frac{p}{\nu}}; \quad \mathrm{Re}\sqrt{p} > 0.$$

Замена переменных $\frac{y}{2\sqrt{\nu\theta}} = \zeta$ в (19) дает

$$J_2 = \mathrm{e}^{y\sqrt{\frac{p}{\nu}}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{2\sqrt{\nu\mathrm{t}}}}^{\infty} \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{p}{\nu}} \cdot \frac{y}{2\zeta} + \zeta \right)^2 \right] d\zeta. \tag{20}$$

Полагая $\sqrt{\dfrac{p}{\nu}}\cdot\dfrac{y}{2\zeta}+\zeta=\xi$, представим интеграл (20) в следующем виде:

$$J_2=\mathrm{e}^{y\sqrt{\frac{p}{\nu}}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{y}{2\sqrt{\nu y}}+\sqrt{pt}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi^2}\,d\xi+\frac{y}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\cdot\mathrm{e}^{y\sqrt{\frac{p}{\nu}}}\int\limits_{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\zeta+\sqrt{\frac{p}{\nu}}\frac{y}{2\zeta}\right)^2}\frac{d\zeta}{\zeta^2}. \tag{21}$$

Вычисляя (19) по другой схеме, имеем

$$p\theta+\frac{y^2}{4\nu\,\theta}=\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu\,\theta}}-\sqrt{p\theta}\right)^2+y\sqrt{\frac{p}{\nu}},\quad \mathrm{Re}\sqrt{p}>0.$$

Замена переменных $\dfrac{y}{2\sqrt{\nu\theta}}=\zeta$ приводит (19) к виду

$$J_2=\mathrm{e}^{-y\sqrt{\frac{p}{y}}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\zeta-\frac{y}{2\zeta}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)^2}d\zeta. \tag{22}$$

Полагая в (22) $\xi=\zeta-\dfrac{y}{2\zeta}\sqrt{\dfrac{p}{\nu}}$, имеем

$$J_2=\mathrm{e}^{-y\sqrt{\frac{p}{\nu}}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}-\sqrt{pt}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi^2}\,d\xi-\mathrm{e}^{-y\sqrt{\frac{p}{\nu}}}\frac{y}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\int\limits_{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\zeta-\frac{y}{2\zeta}\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)^2}\frac{d\zeta}{\zeta^2}. \tag{23}$$

Складывая (21) и (23), получаем выражение (19), записанное через специальные функции:

$$J_2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y\sqrt{\frac{p}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}-\sqrt{pt}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y\sqrt{\frac{p}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}+\sqrt{pt}\right), \tag{24}$$

где $\operatorname{erfc}x=1-\operatorname{erf}x$.

С учетом (17) и (24) выражения для скорости и вектора касательных напряжений могут быть представлены так:

$$\hat{V}=\frac{\mathrm{e}^{-i2\Omega t}}{2}\sum_{j=1}^{2}\hat{A}_j\,\mathrm{e}^{p_j t}\left[\mathrm{e}^{y\sqrt{\frac{p_j}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}+\sqrt{p_j t}\right)+\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{e}^{-y\sqrt{\frac{p_j}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}-\sqrt{p_j t}\right)\right];\qquad(25)$$

$$\hat{f}=-\rho\sqrt{\nu}\left[\mathrm{e}^{-2i\Omega t}\sum_{j=1}^{2}\hat{A}_j\sqrt{p_j}\cdot\mathrm{e}^{p_j t}\operatorname{erf}\sqrt{p_j t}+\frac{\hat{u}(0)\,\mathrm{e}^{-2i\Omega t}}{\sqrt{\pi t}}\right].\qquad(26)$$

Представляет интерес рассмотреть поведение решения, учитывая, что

$$\begin{aligned}&\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}+\sqrt{p_j t}\right)\to 0\quad\text{при}\quad t\to\infty,\quad \operatorname{Re}\sqrt{p_j}>0;\\&\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}-\sqrt{p_j t}\right)\to 2\quad\text{при}\quad t\to\infty,\quad \operatorname{Re}\sqrt{p_j}>0.\end{aligned}\qquad(27)$$

Асимптотические выражения для поля скоростей и сил трения имеют вид

$$\hat{V}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\hat{A}_1\,\mathrm{e}^{i\omega t-y\sqrt{\frac{p_1}{\nu}}}+\hat{A}_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t-y\sqrt{\frac{p_2}{\nu}}}\right),\quad \alpha\neq 0;\qquad(28)$$

$$\hat{f}=-\rho\sqrt{\nu}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\hat{A}_1\sqrt{p_1}\,\mathrm{e}^{i\omega t}+\hat{A}_2\sqrt{p_2}\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right).$$

Структура пограничных слоев. Исследуем подробнее выражение (28). Введем для удобства следующие обозначения:

$$\begin{aligned}k_{1,2}&=\frac{2\Omega\pm\omega}{\sqrt{2\nu}}\left[\alpha^2+(2\Omega\pm\omega)^2\right]^{-\frac{1}{4}};\\ \delta_{1,2}&=\left(\frac{2\nu}{2\alpha^2+(2\Omega\pm\omega)^2}\right)^{1/2}\left[\alpha^2+(2\Omega\pm\omega)^2\right]^{1/4}.\end{aligned}\qquad(29)$$

Здесь знак «+» соответствует индексу «1», а знак «–» — индексу «2».

С учетом (29) поле скоростей (28) может быть записано в виде

$$\hat{V}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\hat{A}_1\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{\delta_1}}\mathrm{e}^{i(\omega t-k_1 y)}+\hat{A}_2\,\mathrm{e}^{-\frac{y}{\delta_2}}\mathrm{e}^{-(\omega t-k_2 y)}\right].\qquad(30)$$

Полученное решение представляет собой суперпозицию двух волн с волновыми числами $k_j (j = 1, 2)$ и частотой $\omega,$ распространяющихся вдоль оси Oy навстречу одна другой и экспоненциально затухающих на расстояниях порядка δ_j. Решение (30) равномерно пригодно для всей области как в нерезонансном, так и в резонансном случае $(2\Omega = \omega)$. Действительно, при $2\Omega = \omega$

$$k_1 = \frac{4\Omega}{\sqrt{2\nu}}\left(\alpha^2 + 16\Omega^2\right)^{-\frac{1}{4}}, \quad \delta_1 = \frac{4\Omega}{k_1}\left(2\alpha^2 + 16\Omega^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$k_2 = 0, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}},$$

т. е. в резонансном случае волна, набегающая на пластину, отсутствует, но решение продолжает затухать в глубь жидкости. Однако при $\alpha = 0,$ $\delta_2 \to \infty$ и решение становится непригодным при $y \to \infty,$ так как толщина одного из пограничных слоев неограниченно возрастает. Этот эффект отсутствия колебательного решения при $\omega = 2\Omega$ обсуждается в работе [13]. Важным следствием из приведенного анализа является тот факт, что затухание снимает трудности, отмеченные в работе [13]. В этом смысле оно играет аналогичную роль, что и отсос жидкости с поверхности пористой пластины, рассмотренный в работах [15–19].

Согласно выражениям (25) и (27), при $\omega = 2\Omega$ и $\alpha = 0$ установившееся решение, равномерно пригодное во всей занятой жидкостью области, имеет вид

$$\hat{V} = A_1\, \mathrm{e}^{i\omega \mathrm{t}} \exp\left(-y\sqrt{\frac{p_1}{\nu}}\right) + A_2\, \mathrm{e}^{-i\omega \mathrm{t}} \mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right). \qquad (31)$$

Решение (31) носит колебательный характер. Расстояние от пластины, на котором это отличие становится существенным, $y = 0\left[(\nu t)^{1/2}\right]$. Когда угловая скорость $\vec{\omega}_0$ вращения пластины перпендикулярна ее плоскости, выражение (31) переходит в полученное в работе [13] решение для этого случая.

Исследуем экспоненциально затухающее движение пластины. Положим в соотношениях (25), (26)

$$\omega = 0,\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A},\ \sigma = 2i\Omega - \alpha,$$

тогда поле скоростей и вектор касательных напряжений имеют вид

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\hat{A}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\mathrm{e}^{y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} + \sqrt{\sigma t}\right) + \mathrm{e}^{-y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} - \sqrt{\sigma t}\right)\right];$$

$$f = -\rho\sqrt{\sigma\nu}\cdot\hat{A}\operatorname{erf}(\sqrt{\sigma t})\,\mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad \operatorname{Re}\sqrt{\sigma} > 0.$$

В дальнейшем обратим внимание на установившееся решение и его характеристики. Используя асимптотическое представление дополнительной функции ошибок при $t \to \infty$, найдем

$$\hat{V} = \hat{A}\,\mathrm{e}^{-y\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}} - \alpha t}; \quad \hat{f} = -\rho\sqrt{\sigma\nu}\,\hat{A}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Аналогичным образом на основе общего решения (8) могут быть рассмотрены другие случаи нестационарного движения пластины.

Заключение. Таким образом, если искать решение в виде (2), то нелинейная система трехмерных нестационарных уравнений Навье—Стокса распадается на две подсистемы, одна из которых служит для определения поля скоростей, а другая — поля давления. Подстановка вида (5) убирает «роторный» член из уравнений (1) и приводит систему (3) к уравнению теплопроводности, что позволяет получить точное решение для поля скоростей и давления.

Для случая движения пластины в своей плоскости со скоростью, определяемой формулой (16), поле скоростей выражается через специальные функции. При $t \to \infty$ поле скоростей представляет собой суперпозицию двух волн, распространяющихся по оси Oy навстречу одна другой и экспоненциально затухающих на расстояниях δ_j.

ЛИТЕРАТУРА

1. Olendraru C., Seller A. Viscous Effects in the Absolute-Convective Instability of the Batchelor Vortex. *Fluid Mech*, 2002, vol. 459, pp. 371–396.
2. Serre E., Pulicani J.P. A Three-Dimensional Pseudospectral Method for Rotating Flows in a Cylinde. *Comput. Fluids*, 2001, vol. 30, no. 4, pp. 491–519.
3. Гурченков А.А. Устойчивость жидконаполненного гироскопа. *ИФЖ*, 2002, т. 75, № 3, с. 6–11.
4. Andersson H. Swirling Flows. Euromech and Ereaftac Colloquium. 16–20 Sept. 2001. Bergen, Norway. *Ercoftac Bull*, 2002, vol. 52, pp. 31–36.
5. Гурченков А.А. *Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела*. Москва, Физматлит, 2010, 221 с.
6. Афанасьев К.Е., Стукалов С.В. Циркуляционное обтекание стационарным плоскопараллельным потоком тяжелой жидкости конечной глубины со свободной поверхности. *ПМТФ*, 2000, № 3, с. 87–94.
7. Гринспен Х. *Теория вращающихся жидкостей*. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1995, 496 с.
8. Алексин В.А. Моделирование влияния параметров турбулентности набегающего потока на течение в нестационарном пограничном слое. *Изв. РАН. МЖГ*, 2003, № 6, с. 64–77.

9. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика и анализ областей неустойчивости вращения деформируемого ИСЗ корневым методом. *Изв. РАН. МТТ*, 2000, № 4, с. 3–17.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика*. Т.VI. Москва, Наука, 1988, 736 с.
11. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Дрофа, 2003, 840 с.
12. Слезкин Н.А. *Динамика вязкой несжимаемой жидкости*. Москва, Гостехиздат, 1958, 517 с.
13. Thornely CL. On Stokes and Rayleigh Layers in a Rotating system. *Quart. J. Mech. and Appl.Math*, 1968, vol. 21, no. 4, pp. 451–461.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений*. Москва, Физматгиз, 1962, 1232 с.
15. Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками. *ПММ*, 2002, т. 66, вып. 2, с. 251–256.
16. Гурченков А.А., Носов М.В. *Устойчивость ротора с вязкой жидкостью*. Москва, ВЦ РАН, 2005, 85 с.
17. Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии поперечного потока. *ПМТФ*, 2001, № 4, с.48–51.
18. Гурченков А.А. Неустановившиеся пограничные слои на пористых пластинах вращающейся щели при наличии вдува (отсоса) среды. *ЖВМ и МФ*, 2001, т. 41, № 3, с. 443–449.
19. Гурченков А.А. Диссипация энергии в колеблющейся полости с вязкой жидкостью и конструктивными неоднородностями. *Док. РАН.* 2002, т. 382, № 4, с. 470–473.

Статья поступила в редакцию 21.02.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

А.А. Гурченков. Начально-краевая задача для уравнений динамики вращающейся жидкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, *2013, вып. 2*. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/603.html

Гурченков Анатолий Андреевич — профессор кафедры «Высшая математика», д-р. физ.-мат. наук; автор более 100 научных работ, 10 из которых монографии; сфера научных интересов: управление вращательными твердыми телами с низким наполнением, устойчивость динамических систем с жидкостью.
e-mail: challenge2005@mail.ru.