

ВОЗДЕЙСТВИЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА НА СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрены неподвижный точечный источник переменной интенсивности в верхнем слое стратифицированной жидкости и частный случай импульсного источника. Получено общее выражение для возмущения свободной поверхности жидкости. Приведены примеры численных расчетов.

E-mail: anton_savin@list.ru

Ключевые слова: двухслойная жидкость, точечный источник, поверхностные волны.

Гидродинамические явления в толще морской воды представляют интерес как с точки зрения теоретического изучения, так и практического освоения океана. Следует отметить, что при мониторинге морской среды с помощью радиолокационных и оптических средств, размещенных на авиационных или космических носителях, такие явления недоступны для непосредственного наблюдения. Процессы, протекающие в водной толще, можно регистрировать по их проявлениям на морской поверхности [1]. В этой связи важным является изучение поверхностных волн, вызванных локализованными в водной среде источниками возмущений различной природы, например обтекаемыми потоком преградами, крупномасштабными вихревыми структурами, подвижными участками дна и т. д.

Источники возмущений можно рассматривать как некоторые неоднородности гидродинамических полей, локализованные в относительно небольших областях, где, например, характерные значения скорости, завихренности или давления заметно отличаются от фоновых. Один из наиболее эффективных способов моделирования воздействия таких неоднородностей на жидкую среду состоит в их замене эквивалентной системой гидродинамических особенностей (источников, стоков, вихрей, мультиполей) [2, 3]. При этом расчет поверхностных волн, порождаемых неоднородностями, основан на определении элементарных волн от моделирующих их гидродинамических особенностей. В частности, если неоднородность вызывает волну небольшой амплитуды, она представляет собой суперпозицию элементарных волн. Таким образом, задача о генерации поверхностных волн гидродинамической особенностью является базовой в рамках названного подхода.

В то же время точечная гидродинамическая особенность характеризуется небольшим числом параметров, например, точечный источник полностью задается своими координатами и интенсивностью, т. е. объемом выбрасываемой в единицу времени жидкости. Поэтому гидродинамическую особенность естественно использовать в качестве простого модельного источника возмущений жидкой среды при проведении численных расчетов для оценки возникающих на поверхности жидкости волн в зависимости от тех или иных гидрофизических условий.

Существенную роль при передаче возмущений от источника в морской толще на свободную поверхность может играть стратификация водной среды. В реальных условиях открытого моря скачкообразные изменения плотности воды с глубиной связаны прежде всего с наличием сезонного и главного термоклиннов. При возмущении морской среды на границе слоев жидкости с разными плотностями возникают внутренние волны, амплитуда которых может достигать десятков метров [4—6]. Волновые движения стратифицированной жидкости оказывают влияние на морскую поверхность и приводят к образованию на ней весьма длинных волн, которые можно рассматривать как вторичное проявление источника возмущений посредством вызываемых им внутренних волн. Учет такого эффекта позволяет находить различные волновые режимы на свободной поверхности в зависимости от стратификации водной среды и параметров источника возмущений. При этом в некоторых гидрофизических ситуациях источники возмущений в толще стратифицированной морской среды могут вызывать весьма заметные поверхностные волны, а в других — практически никак не проявляться [7, 8]. В этой связи представляет интерес вопрос о влиянии стратификации водной среды на заметность поверхностных возмущений. Соответствующие оценки можно получить, моделируя возмущения жидкой среды, например, точечным источником.

Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим двухслойную жидкость со свободной поверхностью. Обозначим плотность жидкости в верхнем слое через ρ_1 , в нижнем — через ρ_2 . Будем считать, что $\rho_1 < \rho_2$, т. е. жидкость находится в состоянии устойчивого равновесия. Пусть в верхнем слое жидкости локализован неподвижный точечный источник переменной интенсивности $Q = Q(t)$. Направим ось z вверх и проведем ее через рассматриваемый источник. Если жидкость не имеет твердых границ, а ее течение вызвано исключительно источником, задача обладает цилиндрической симметрией: ни одна из величин, характеризующих поле гидродинамических возмущений от источника, не зависит от полярного

угла α , отсчитываемого от любой фиксированной прямой, лежащей в горизонтальной плоскости. В силу этого обстоятельства естественно ввести цилиндрическую систему координат (r, α, z) .

Пусть в невозмущенном состоянии свободная поверхность жидкости совпадает с плоскостью $z = 0$, граница раздела жидких слоев — с плоскостью $z = -H$ (где H — толщина верхнего слоя), а источник находится в точке $(0, 0, -h)$ (где h — глубина, на которой находится источник). Если в некоторый момент времени источник начинает свою работу, то под его воздействием на свободной поверхности жидкости и на границе раздела жидких слоев возникают поверхностные и внутренние волны соответственно. При достаточно большом удалении источника от границ верхнего слоя жидкости эти волны имеют амплитуды, много меньшие их длин. В рамках этого допущения, именуемого приближением малых волн, поле скорости жидкости является потенциальным в каждом слое [9]. Точнее, в верхнем слое это поле потенциально всюду, кроме точки локализации источника.

Найдем потенциал скорости для верхнего слоя жидкости

$$\Phi_1(r, z, t) = \Phi_0(r, z, t) + \varphi(r, z, t), \quad (1)$$

где $\varphi(r, z, t)$ — волновой потенциал, обусловленный наличием границ верхнего слоя жидкости и связанными с ним возмущениями волнового характера;

$$\Phi_0(r, z, t) = - \frac{Q(t)}{4\pi\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} \quad (2)$$

потенциал скорости течения, создаваемого рассматриваемым источником в безграничной однородной жидкости [2, 3]. Волновой потенциал φ представляет собой гармоническую в верхнем слое жидкости функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа. С учетом того, что функция φ не зависит от полярного угла α , уравнение Лапласа представим в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Потенциал скорости Φ_2 нижнего слоя жидкости имеет волновой характер, обладает цилиндрической симметрией и, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа (3). Для случая бесконечно глубо-

кой жидкости должно выполняться условие затухания волновых возмущений с глубиной [10]. Поэтому уравнение Лапласа для потенциала скорости нижнего слоя жидкости следует решать при условии, что

$$\Phi_2(r, z, t) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

В рамках рассматриваемого приближения малых волн граничные условия на свободной поверхности жидкости [9, 10] имеют вид

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + gS = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial t}, \quad z = 0, \quad (5)$$

где g — ускорение свободного падения; S — отклонение свободной поверхности жидкости от ее невозмущенного положения.

Исключив из равенств (5) величину S , можно получить [9, 10] граничное условие для потенциала скорости

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (6)$$

На границе раздела жидких слоев зададим кинематическое условие равенства нормальных составляющих скорости в верхнем и нижнем слоях жидкости, а также динамическое условие непрерывности давления. В приближении малых волн [9, 10] эти условия имеют вид

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}, \quad z = -H, \quad (7)$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right), \quad z = -H. \quad (8)$$

Общее решение задачи. Применив преобразование Ханкеля нулевого порядка [11]

$$F(\rho, z, t) = \int_0^{\infty} \varphi(r, z, t) J_0(r\rho) r dr,$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, к обеим частям уравнения (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение $F_{zz} - \rho^2 F = 0$ с общим решением

$$F(\rho, z, t) = A(\rho, t) \exp(-\rho z) + B(\rho, t) \exp(\rho z). \quad (9)$$

Используя обратное преобразование Ханкеля [11]

$$\varphi(r, z, t) = \int_0^{\infty} F(\rho, z, t) J_0(r\rho) \rho d\rho,$$

находим из выражения (9) общий вид волнового потенциала скорости в верхнем слое жидкости

$$\varphi(r, z, t) = \int_0^{\infty} [A(\rho, t) \exp(-\rho z) + B(\rho, t) \exp(\rho z)] J_0(r\rho) \rho d\rho. \quad (10)$$

Применяя аналогичный прием к определению потенциала скорости в нижнем слое жидкости и учитывая условие (4), получаем

$$\Phi_2(r, z, t) = \int_0^{\infty} C(\rho, t) \exp(\rho z) J_0(r\rho) \rho d\rho. \quad (11)$$

С помощью известного интегрального соотношения [12] представим сингулярную часть потенциала скорости в верхнем слое жидкости (2) в виде

$$\Phi_0(r, z, t) = - \frac{Q(t)}{4\pi} \int_0^{\infty} \exp(-|z+h|\rho) J_0(r\rho) d\rho. \quad (12)$$

Подстановка общих выражений для потенциалов скорости в жидких слоях (1), (10)—(12) в граничные условия (6)—(8) приводит к системе интегральных равенств, из которых следует система уравнений для определения неизвестных функций $A(\rho, t)$, $B(\rho, t)$, $C(\rho, t)$:

$$\begin{aligned} A_{tt} - \rho g A + B_{tt} + \rho g B &= (4\pi\rho)^{-1} (Q_{tt} - \rho g Q) \exp(-h\rho), \\ A \exp(2H\rho) - B + C &= -(4\pi\rho)^{-1} Q \exp(h\rho), \\ (A_{tt} - \rho g A) \exp(2H\rho) + B_{tt} + \rho g B - \delta^{-1} (C_{tt} + \rho g C) &= \\ &= (4\pi\rho)^{-1} (Q_{tt} + \rho g Q) \exp(h\rho), \quad \delta = \rho_1/\rho_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем считать, что источник, локализованный в толще изначально невозмущенной жидкости, начинает работать в некоторый момент времени $t_0 > 0$. В этом случае функции A , B , C , Q и их производные по времени при $t = 0$ равны нулю. Решим систему дифференциаль-

ных уравнений (13), удовлетворяющих таким начальным условиям, с помощью преобразования Лапласа [11]. Полученные выражения для функций A, B, C подставим в равенства (10), (11) и с учетом соотношений (1), (2) получим формулы для потенциалов скорости течений в верхнем и нижнем слоях жидкости (здесь эти выражения не приведены ввиду их громоздкости).

Волна, возникающая на свободной поверхности жидкости, описывается величиной $S = S(r, t)$. Из первого граничного условия (5) следует, что

$$S = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \quad z = 0. \quad (14)$$

Воспользовавшись найденной в результате решения системы дифференциальных уравнений (13) формулой для потенциала скорости течения в верхнем слое жидкости, представим равенство (14) в виде

$$S(r, t) = S_1(r, t) + S_2(r, t), \quad (15)$$

$$S_1(r, t) = \frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-h\rho) J_0(r\rho) \rho}{\delta + (1-\delta) \exp(-2H\rho)} \int_0^t Q(\tau) \cos[\sqrt{g\rho}(t-\tau)] d\tau d\rho, \quad (16)$$

$$S_2(r, t) = \frac{(1-\delta)}{2\pi} \int_0^\infty U(\rho) J_0(r\rho) \rho \int_0^t Q(\tau) \cos[\omega(\rho)(t-\tau)] d\tau d\rho, \quad (17)$$

$$U(\rho) = \frac{\exp(-H\rho) \{ \operatorname{ch}[(H-h)\rho] + \delta \exp(h\rho) \operatorname{sh}(H\rho) \}}{[\operatorname{ch}(H\rho) + \delta \operatorname{sh}(H\rho)] [\operatorname{ch}(H\rho) + (2\delta - 1) \operatorname{sh}(H\rho)]}, \quad (18)$$

$$\omega(\rho) = \sqrt{\frac{(1-\delta) \rho g \operatorname{th}(H\rho)}{1 + \delta \operatorname{th}(H\rho)}}. \quad (19)$$

При равенстве плотностей жидкостей в верхнем и нижнем слоях ($\delta = 1$) из формул (15)—(19) находим выражение для волны на поверхности однородной бесконечно глубокой жидкости

$$S(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp(-h\rho) J_0(r\rho) \rho \int_0^t Q(r) \cos[\sqrt{g\rho}(t-\tau)] d\tau d\rho. \quad (20)$$

Другой предельный случай соответствует бесконечно большой плотности жидкости нижнего слоя ($\delta = 0$):

$$S(r, t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}[(H-h)\rho]}{\operatorname{ch}(H\rho)} J_0(r\rho) \rho \int_0^t Q(\tau) \cos\left[\sqrt{g\rho} \operatorname{th}(H\rho)(t-\tau)\right] d\tau d\rho. \quad (21)$$

Выражение (21) описывает волну на поверхности слоя однородной жидкости конечной глубины H .

Импульсный источник. Пусть в некоторый момент времени $t_0 > 0$ точечный источник мгновенно выбрасывает жидкость объемом V и прекращает дальнейшую работу. В этом случае интенсивность источника можно задать в виде

$$Q(t) = V\delta(t-t_0), \quad (22)$$

где $\delta(t-t_0)$ — дельта-функция. С учетом выражения (22) из равенств (15)—(17) следует, что на поверхности двухслойной жидкости возникает суперпозиция двух волн

$$S_1(r, t) = \frac{V\delta}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(-h\rho) J_0(r\rho) \rho \cos\left[\sqrt{g\rho}(t-t_0)\right] d\rho}{\delta + (1-\delta)\exp(-2H\rho)}, \quad (23)$$

$$S_2(r, t) = \frac{V(1-\delta)}{2\pi} \int_0^\infty U(\rho) J_0(r\rho) \rho \cos\left[\omega(\rho)(t-t_0)\right] d\rho, \quad (24)$$

где величины $U(\rho)$, $\omega(\rho)$ определяются формулами (18), (19).

В реальных условиях (морская среда) толщина верхнего слоя воды, как правило, лежит в диапазоне значений $30 \leq H \leq 70$ м, при этом плотность воды в верхнем слое $\rho_1 = 1022$ кг/м³. Плотность воды в нижнем слое $1023 \leq \rho_2 \leq 1029$ кг/м³. При таких плотностях параметр $\delta = \rho_1/\rho_2$ находится в диапазоне значений $0,993 \leq \delta \leq 0,999$. Наиболее заметно эффекты, обусловленные наличием жидких слоев с различными плотностями, проявляются в случае существенного различия плотностей ρ_1 и ρ_2 . Поэтому рассмотрим случай сильной стратификации морской среды, соответствующий значению параметра $\delta = 0,993$. Пусть источник находится на сравнительно небольшой глубине $h = 10$ м и выбрасывает в момент времени $t_0 = 0$ жидкость объемом $V = 10$ м³.

Согласно результатам численных расчетов, генерируемая таким источником волна S_1 , определяемая формулой (23), практически не

зависит от толщины верхнего слоя жидкости. При ее изменении в диапазоне значений $30 \leq H \leq 70$ м амплитуда волны S_1 меняется примерно на 0,1%. Это можно объяснить тем, что даже при сильной стратификации морской среды значение отношения плотностей жидких слоев близко к единице. В этом случае общее выражение (16) для волны S_1 мало отличается от его асимптотического ($\delta \rightarrow 1$) вида (20), поэтому волна S_1 с большой точностью соответствует волне, распространяющейся в однородной жидкости. Профили волн $S_1 = S_1(r, t)$ в различные моменты времени приведены на рис. 1. Характерное время процесса, связанного с волной S_1 , определяет зависимость от времени обусловленных этой волной отклонений $S_1(0, t)$ свободной поверхности жидкости от равновесного положения непосредственно над источником (рис. 2).

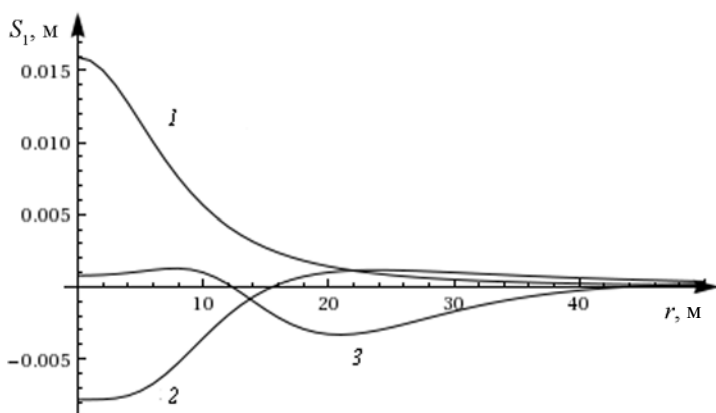


Рис. 1. Профили волны $S_1 = S_1(r, t)$ ($30 \leq H \leq 70$ м) в моменты времени $t = 0$ (1), 2,5 (2), 5 с (3)

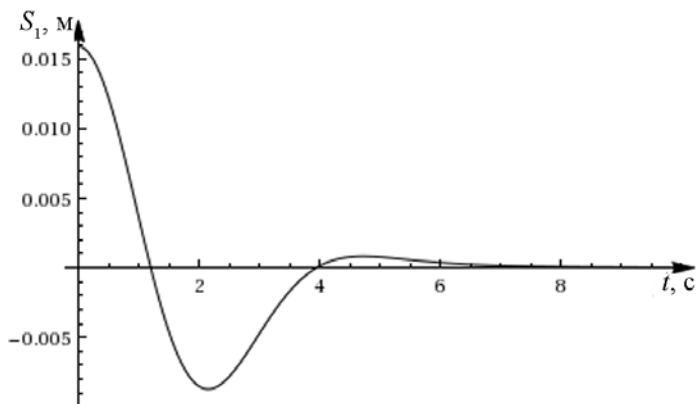
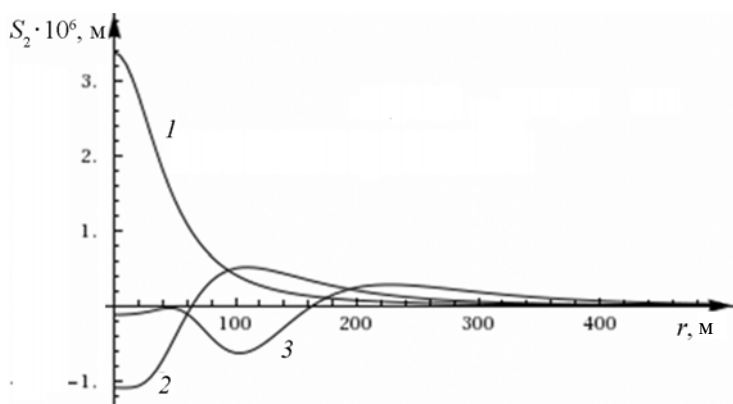
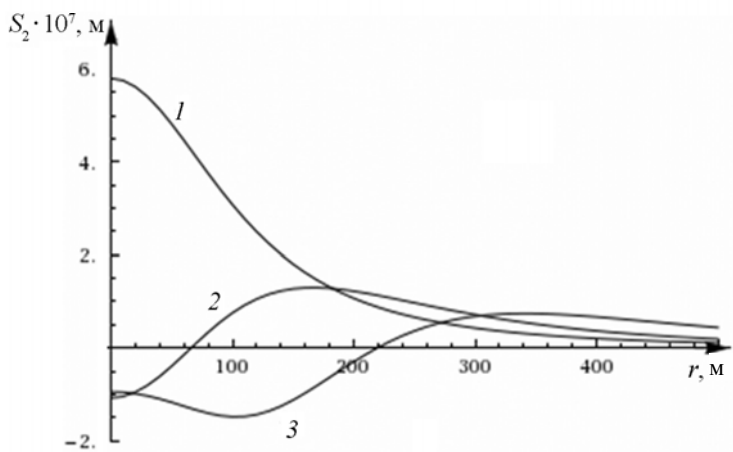


Рис. 2. Зависимость амплитуды волны $S_1 = S_1(0, t)$ над источником от времени. ($30 \leq H \leq 70$ м)

На рис. 3 приведены профили волн $S_2 = S_2(r, t)$ в различные моменты времени для тонкого ($H = 30$ м) и толстого ($H = 70$ м) верхних слоев воды. Волну S_2 можно рассматривать как проявление на поверхности моря внутренней волны. Видно, что волна S_2 существенно зависит от толщины H верхнего слоя жидкости. При увеличении H от 30 до 70 м амплитуда волны S_2 уменьшается примерно в 5 раз, а характерная длина волны возрастает примерно в 2 раза. Графики зависимостей от времени амплитуд волн S_2 непосредственно над источником для тонкого и толстого верхних слоев жидкости показаны на рис. 4.

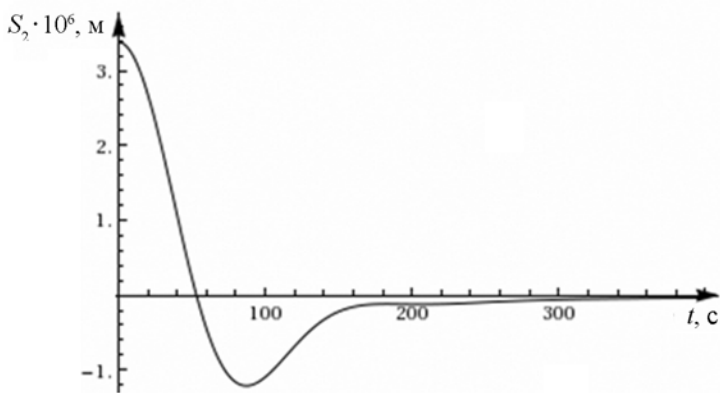


a

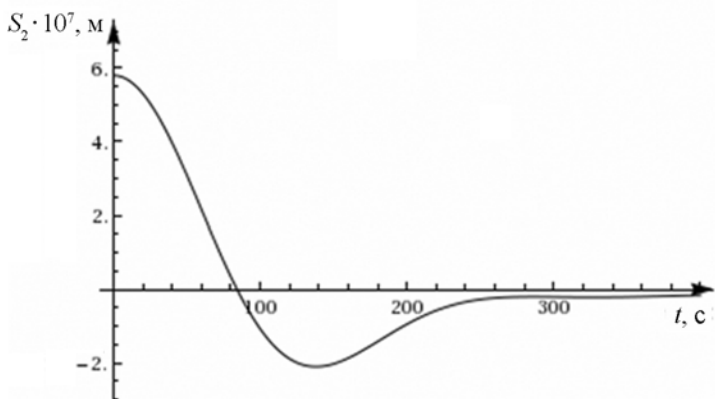


б

Рис. 3. Профили волн $S_2 = S_2(r, t)$ для тонкого (а) и толстого (б) верхних слоев в моменты времени $t = 0$ (1), 100 (2), 200 с (3)



a



б

Рис. 4. Зависимость амплитуд волн $S_2 = S_2(0, t)$ над источником от времени для тонкого (*a*) и толстого (*б*) слоев жидкости

Как следует из рисунков, при рассмотренных условиях волна S_1 в начальной стадии имеет максимальную амплитуду порядка 10^{-2} м и характерную длину порядка 10 м. Для волны S_2 максимальная амплитуда есть величина порядка 10^{-6} м, длина — порядка 100 м. Заметность волны на морской поверхности можно характеризовать ее наклоном, т. е. отношением характерных значений амплитуды и длины.

Проведенные расчеты показывают, что волна S_1 имеет наклон порядка 10^{-3} , а волна S_2 — порядка 10^{-8} . Характерный период колебаний точек свободной поверхности жидкости, обусловленный волной S_1 , имеет порядок 1 с, волной S_2 — 100 с. Следовательно, волна S_2 в рассматриваемых условиях проявляется существенно слабее как по амплитуде, так и по наклону, чем волна S_1 . Кроме того, она имеет значительно больший характерный период.

Таким образом, импульсный источник, локализованный в верхнем слое жидкости, генерирует две кольцевые расходящиеся поверхностные волны. В реальных морских условиях первая волна S_1 слабо зависит от соотношения плотностей жидких слоев и практически совпадает с волной, возникающей под действием источника в однородной жидкости. Вторая волна S_2 связана исключительно со стратификацией и в однородной среде не образуется. Однако при самых благоприятных гидрофизических условиях волна S_2 , порождаемая источником возмущений морской среды, сопоставимым с рассмотренным выше, практически не наблюдается даже в начальной стадии своей эволюции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№11-01-00335).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методы, процедуры и средства аэрокосмической компьютерной радиотомографии приповерхностных областей Земли / Под ред. С.В. Нестерова, А.С. Шамаева, С.И. Шамаева. М.: Научный мир, 1996.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
3. Милн-Томпсон Л. М. Теоретическая гидродинамика : пер. с англ. М.: Мир, 1964.
4. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982.
5. Степанянц Ю. А., Стурова И. В., Теодорович Э. В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1987. Т. 21. С. 93–179.
6. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. М.: Наука, 2005.
7. Владимиров И. Ю., Корчагин Н. Н., Савин А. С. Поверхностные эффекты при обтекании препятствий в неоднородно-стратифицированной среде // Докл. РАН. 2011. Т. 440. № 6. С. 826–829.
8. Обтекание препятствий стратифицированным потоком со свободной границей // И.Ю. Владимиров, Н.Н. Корчагин, А.С. Савин и др. Океанология. 2011. Т. 51. № 6. С. 974–983.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
10. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.