УДК 661.521

А. Л. Шуяков, А. И. Смородин

ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ДВИЖУЩИМСЯ ПОТОКОМ ВОДОРОДА И ГРАНУЛИРОВАННЫМ КАТАЛИЗАТОРОМ ОРТО-ПАРАКОНВЕРСИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ

Рассмотрено влияние внутренних источников теплоты на распределение температуры в канале аппарата орто-параконверсии водорода. Создана математическая модель, методом преобразования Лапласа получено законченное аналитическое решение в безразмерной форме.

E-mail: crio@power.bmstu.ru

Ключевые слова: орто-параконверсия, критерий Померанцева, двумерное распределение температуры, цилиндрический канал, преобразования Лапласа.

Тенденция использования высокоактивных катализаторов в аппаратах орто-параконверсии обусловливает значительную объемную плотность тепловыделения. Следствием этого является возникновение заметных градиентов температуры, способных оказывать влияние на характер протекания реакции [1].

В качестве физической модели рассмотрим цилиндрический канал, заполненный нерегулярной однородной насадкой, с равномерно распределенными источниками теплоты. Температура стенки канала фиксируется, т.е. заданы граничные условия первого рода. Газовый поток и насадку будем считать квазигомогенной структурой, характеризуемой эффективным коэффициентом теплопроводности $\lambda_{эф}$. Условимся также считать изменение давления пренебрежимо малым, а физические свойства потока — постоянными величинами.

С учетом сделанных допущений, переходя к полярным координатам, получим

$$\rho C_T w_r \frac{\partial T}{\partial r} + \rho C_T w_x \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda_{эф} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_v.$$

Поскольку теплопроводность в радиальном направлении много меньше, чем в осевом, полагаем $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. Кроме того, отсутствует радиальная составляющая скорости $w_r = 0$. Как показано многочисленными исследованиями [2, 3], профиль скорости в зернистом слое имеет равномерное распределение по сечению. С учетом вышесказанного уравнение выглядит как

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{w \rho C_T}{\lambda_{эф}}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{q_v}{\lambda_a} = 0. \quad (1)$$

Начальные условия $r = 0$; $T = T_0$.

Граничные условия для радиальной симметрии $r = 0$; $\dfrac{\partial T}{\partial r} = 0$; $r = R$; $T = T_0$.

Приведем уравнение к безразмерному виду, обозначим

$$v = \frac{T - T_C}{T_0 - T_C}; \quad r_1 = \frac{r}{R}; \quad x_1 = \frac{x}{R},$$

тогда

$$r = R\,r_1; \quad x = Rx_{1;}$$

$$dr = R\,dr_1; \quad dx = R\,dx_1;$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r}(T_0 - T_C); \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x_1}(T_0 - T_C).$$

Приведем уравнение (1) к виду

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r_1^2}(T_0 - T_C) + \frac{1}{R^2 r_1}\frac{\partial v}{\partial r_1}(T_0 - T_C) - \\ - \frac{w\rho C_p}{R\lambda_{\text{эф}}}\frac{\partial v}{\partial x_1}(T_0 - T_C) + \frac{q_v}{\lambda_{\text{эф}}} = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $\dfrac{R^2}{T_0 - T_C}$, получаем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial v}{\partial r_1} - \frac{Rw\rho C_p}{\lambda_{\text{эф}}}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{q_v R^2}{\lambda_{\text{эф}}(T_0 - T_C)} = 0,$$

где $\dfrac{Rw\rho C_p}{\lambda_{\text{эф}}} = \mathrm{Pe}$ — критерий Пекле; $\dfrac{q_v R^2}{\lambda_{\text{эф}}(T_0 - T_C)} = \mathrm{Po}$ — критерий Померанцева, выражающий отношение количества теплоты, выделяемой источником в единицу времени в объеме R, к максимально возможному количеству теплоты, передаваемой теплопроводностью.

Тогда уравнение в безразмерной форме записывается так

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial v}{\partial r_1} - \mathrm{Pe}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \mathrm{Po} = 0. \tag{2}$$

Начальные условия $x_1 = 0$; $v = 1$; граничные условия $r_1 = 0$; $\dfrac{\partial v}{\partial r_1} = 0$; $r_1 = 1$; $v = 0$.

Выполним преобразование Лапласа уравнения (2) по переменной x_1. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r_1} - \mathrm{Pe}\,p\tilde{v} + \mathrm{Po} = 0, \tag{3}$$

где p — искомая комплексная функция.

В результате преобразования получено неоднородное дифференциальное уравнение Бесселя в пространстве изображений.

Тогда общее решение неоднородного уравнения (3) имеет вид

$$\tilde{v} = BI_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, p\, r_1}\,) + \frac{1}{p} + \frac{\mathrm{Po}}{\mathrm{Po}\, p^2}.$$

Константу интегрирования B определим из граничного условия: $r_1 = 1$, $\tilde{v} = 0$:

$$B = -\frac{1}{pI_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, p}\,)} + \frac{\mathrm{Po}}{\mathrm{Pe}\, p^2 I_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, p}\,)}.$$

Окончательное решение операторного уравнения (3)

$$\tilde{v} = \frac{I_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, pr_1}\,)}{pI_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, p}\,)} + \frac{\mathrm{Po}\, I_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, pr_1}\,)}{\mathrm{Pe}\, p^2 I_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, p}\,)} + \frac{1}{p} + \frac{\mathrm{Po}}{\mathrm{Pe}} \cdot p^2. \tag{4}$$

Обращение к пространству оригиналов осуществляется следующим образом:

$$v(r_1, x_{1)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{j-i\infty}^{j+i\infty} \left[\frac{1}{p} + \frac{\mathrm{Po}}{\mathrm{Pe}} p^2 - \frac{I_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, pr_1}\,)}{pI_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, p}\,)} - \frac{\mathrm{Po}\, I_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, pr_1}\,)}{\mathrm{Pe}\, p^2 I_0(\sqrt{\mathrm{Pe}\, p}\,)}\right] e^{px_1} dp,$$

где $j = \mathrm{Re}(p)$, $i = \sqrt{-1}$.

Подынтегральная функция аналитична во всей комплексной плоскости p, за исключением особых точек, и удовлетворяет условию

$$\lim F(p) = 0.$$

Тогда, как известно из теории функций комплексного переменного,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{j-i\infty}^{j+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{n=1}^{n=k} \mathrm{Res}\left[F(p) e^{pt} a_n\right] = f(t),$$

где a_n — особая точка функции-изображения $F(p)$; $f(t)$ — функция-оригинал.

В свою очередь

$$\mathrm{Res}\left[F(p) e^{pt} a_n\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{p \to a} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} \left[(p-a)^m F(p) e^{pt}\right],$$

где m — кратность особой точки a.

Кроме того, если функция $F(p)$ может быть представлена в виде

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — многочлены, причем степень $A(p)$ меньше степени

$B(p)$, то имеет место теорема разложения Хевисайда [4]:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{A(p)}{B(p)}\right]=\sum_{n=1}^{n=k}\frac{1}{(m_n-1)!}\lim\frac{d^{m_n-1}}{dp^{m_n-1}}\left[(p-a_n)^{m_n}\frac{A(p)}{D(p)}e^{a_n t}\right],$$

где a_n — корни многочлена $B(p)$.

В случае простых корней

$$f(t)=\sum_{n=1}^{n=k}\frac{A(a_n)}{B^1(a_n)}e^{a_n t}.$$

Применим изложенный аппарат обращения к соотношению (4).

Окончательным решением уравнения (2) будет сумма всех найденных оригиналов. Суммируя и приводя подобные члены, получаем

$$v(r_1;x_1)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2I_0(\mu_n r_1)}{\mu_n I_1(\mu_n)}e^{-\frac{\mu n^2}{\mathrm{Pe}}x_1}+ \\ +p_0\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2I_0(\mu_n r_1)}{\mu_n^3 I_1(\mu_n)}-p_0\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2I_0(\mu_n r_1)}{\mu_n^3 I_1(\mu_n)}. \quad (5)$$

Полученное соотношение является полным решением уравнения (2), позволяющим рассчитать двумерное распределение температуры в цилиндрическом канале с внутренними источниками теплоты в граничных условиях первого рода, установить соотношения для экстремальной и средней температур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ш у я к о в А. Л., С м о р о д и н А. И. Математическое моделирование процесса изотермической орто-параконверсии // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1994. – № 8.
2. А э р о в М. Э., Т о д е с О. П. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. – М.: Химия, 1965. – 512 с.
3. И о ф ф е И. И., П и с ь м е н Л. М. Инженерная химия гетерогенного катализа. – М.: Химия, 1965. – 456 с.
4. А н г о А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964.

Статья поступила в редакцию 27.06.2012