

В. Р. Романовский

**НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ
ВОЗНИКНОВЕНИЯ МАГНИТНЫХ
НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ЖЕСТКИХ
СВЕРХПРОВОДНИКАХ**

С учетом изменения температуры жесткого сверхпроводника, которое неизбежно происходит уже на стадии стабильного проникновения магнитного потока, исследованы особенности возникновения магнитной неустойчивости и сформулированы неизотермические критерии стабильности сверхпроводящего состояния.

E-mail: vromanovskii@netscape.net

Ключевые слова: сверхпроводник, неустойчивость, макроскопическая электродинамика, температура.

Одной из основных особенностей жестких сверхпроводников являются происходящие в них диссипативные процессы, обусловленные термоактивированным движением вихрей. Последние могут приводить к преждевременному разрушению сверхпроводящего состояния. Возникновение и развитие неустойчивостей в сверхпроводниках является типичным примером неравновесного переходного процесса в двухфазной диссипативной структуре. При этом определяющую роль в возникновении неустойчивости играют коллективные процессы, слабо зависящие от микроскопических свойств среды. В рамках макроскопических моделей были сформулированы важнейшие критерии устойчивости критического состояния [1–3]. Однако выполненные ранее теоретические работы, как правило, основывались на исследовании начальной стадии развития неустойчивости. Причем возможный конечный перегрев сверхпроводника перед возникновением неустойчивости, зависящий от характера возмущения, во внимание не принимался.

Решение этой проблемы с учетом стабильного повышения температуры сверхпроводника, которое может иметь место уже на стадии устойчивого формирования сверхпроводящих состояний, расширяет класс явлений, рассматриваемых в феноменологической электродинамике сверхпроводников. В то же время проведенные ранее исследования проблемы возникновения магнитной или токовой неустойчивости в неизотермическом приближении [4–15] не позволяют сформулировать общие закономерности, лежащие в основе допустимого увеличения температуры сверхпроводника перед возникновением неустойчивости, и тем самым найти соответствующие неизотермические условия стабильности сверхпроводящего состояния. Поэтому целью

настоящей работы является анализ основных физических особенностей коллективного формирования температурного и электромагнитного полей в низкотемпературных сверхпроводниках, которые позволили бы понять влияние тепловой предыстории образца на условия сохранения сверхпроводимости при изменении внешнего магнитного поля.

Неизотермическая модель критического состояния жесткого сверхпроводника в режиме вязкого течения. Рассмотрим охлаждаемую плоскопараллельную пластину из жесткого сверхпроводника, находящуюся во внешнем магнитном поле, параллельном его поверхности, в случае, когда оно нарастает с постоянной скоростью dB/dt . Для того чтобы установить границы использования существующих теорий, сформулированных без учета допустимого перегрева сверхпроводника перед возникновением неустойчивости, исследуем взаимосвязанное изменение температуры и электрического поля внутри сверхпроводника в рамках так называемой модели вязкого течения [3] на основе решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} C(T) \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \begin{cases} 0, & 0 < x < x_p; \\ EJ, & x_p \leq x \leq a; \end{cases} \\ \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}; \\ J &= J_c(T, B_a) + E/\rho_f \end{aligned} \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_0; \quad E(x, 0) = 0; \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0; \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + h(T - T_0) \Big|_{x=a} = 0; \\ \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_{x=a} &= \begin{cases} \frac{dB}{dt}, & 0 < t < t_s; \\ 0, & t \geq t_s. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь T — температура, J — плотность тока, E — напряженность электрического поля, ρ_f — сопротивление сверхпроводника в режиме вязкого течения, B_a — индукция внешнего магнитного поля, C — объемная теплоемкость сверхпроводника, λ — коэффициент его теплопроводности, h — коэффициент теплоотдачи, a — полутолщина пластины, T_0 — температура хладагента, t_s — время нарастания внешнего магнитного поля, $J_c(T, B)$ — критическая плотность тока, x_p — изменяющаяся во времени координата глубины проникновения магнитного потока,

определяемая из решения уравнения

$$\mu_0 \int_{x_p}^a J(x, t) dx = B_a = \frac{dB}{dt} t. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) описывают диссипативный процесс диффузии магнитного потока внутри жесткого сверхпроводника, динамика которого зависит не только от скорости изменения внешнего магнитного поля, но и от соответствующего повышения температуры.

Неявная форма записи закона изменения неизвестной границы проникновения $x_p(t)$ значительно усложняет использование известных методов решения систем уравнений параболического типа, описывающих диффузионные явления в средах с неизвестной границей раздела фаз [16–18]. Поэтому для ее решения был разработан численный метод, позволяющий исследовать процессы диффузии с неявно заданной границей раздела фаз, который может быть также успешно применен и при анализе диффузионных явлений с фазовыми переходами второго рода. Он основан на алгоритме сквозного счета разностного аналога задачи (1)–(3) на пространственно-временной сетке с неявным шаблоном. Для определения $x_p(t)$ используется итерационная процедура, основанная на определении корня нелинейного уравнения (3), в котором текущее значение $x_p(t)$ является искомой величиной. В рамках данной методики проводимые вычисления заключаются в отделении, а затем в уточнении корня уравнения (3). На этапе отделения корня для каждого последующего шага итераций $s = 1, 2, \dots$ находится знак выражения

$$r^{(s)} = \mu_0 \int_{x_p^{(s)}}^a J(x, t) dx - \frac{dB}{dt} t.$$

Исходя из простого физического смысла данного равенства, нетрудно понять, что в случае, когда $x_p^{(s)}$ больше истинного значения x_p , знак $r^{(s)}$ будет отрицательным. И наоборот, если $x_p^{(s)} < x_p$, то $r^{(s)} > 0$. Поэтому этап отделения корня прерывается, как только знак $r^{(s)}$ для двух последовательных итераций меняется на противоположный. После этого нетрудно выполнить уточнение корня с заданной точностью, достижение которой являлось общим условием прекращения итераций. Поскольку при определении сеточных функций использовалась неявная разностная схема, то выбор шагов как по времени, так и по пространству определяется только соображениями точности. Изложенный алгоритм без существенных затруднений воспроизводится при анализе неизотермической динамики сверхпроводящего состояния

в сверхпроводниках цилиндрической формы, а также в сверхпроводящих композитах.

Для верификации предложенного метода решения результаты численного анализа в неизотермическом приближении сопоставлялись с известными аналитическими формулами, которые следуют из изотермической модели [1–3] в предположении линейной зависимости критической плотности тока от температуры:

$$J_c(T, B) = J_{c0} (T_{cB} - T) / (T_{cB} - T_0) \quad (4)$$

Здесь J_{c0} и T_{cB} — известные критические параметры сверхпроводника для заданного внешнего магнитного поля. В этом случае выражения, описывающие для плоскопараллельной пластины изменение во времени границы проникновения экранирующих токов x_M и объемной плотности тепловых потерь G_M , выделяемых в процессе диффузии магнитного потока, могут быть записаны в следующем виде [1–3]:

$$x_M(t) = a - \dot{B}t / (\mu_0 J_{c0}), \quad G_M = (\dot{B}t)^3 / (6\mu_0^2 a J_{c0}).$$

На рис. 1 приведены результаты расчетов глубины проникновения и объемной плотности потерь $G = \frac{1}{a} \int_0^t \int_0^a E J dx dt$, выполненных как в неизотермическом приближении (штриховые линии), так и изотермическом (сплошные линии). Исходные параметры следующие: $C = 30 T^3 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$, $\lambda = 0,0075 T^{1,8} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $T_0 = 4,2 \text{ К}$, $T_{cB} = 8,5 \text{ К}$, $\rho_f = 5 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, $h = 0$, $J_{c0} = 4 \cdot 10^9 \text{ А}/\text{м}^2$.

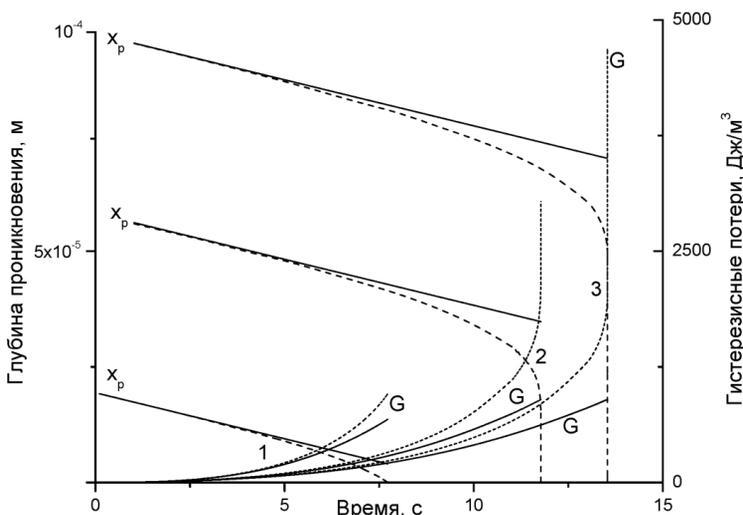


Рис. 1. Изменение во времени глубины проникновения и гистерезисных потерь при диффузии магнитного потока в неохлаждаемом сверхпроводнике ($dB/dt = 0,01 \text{ Тл/с}$) при разных значениях полутолщины пластины a :
 1 — $a = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}$; 2 — $a = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$; 3 — $a = 10^{-4} \text{ м}$

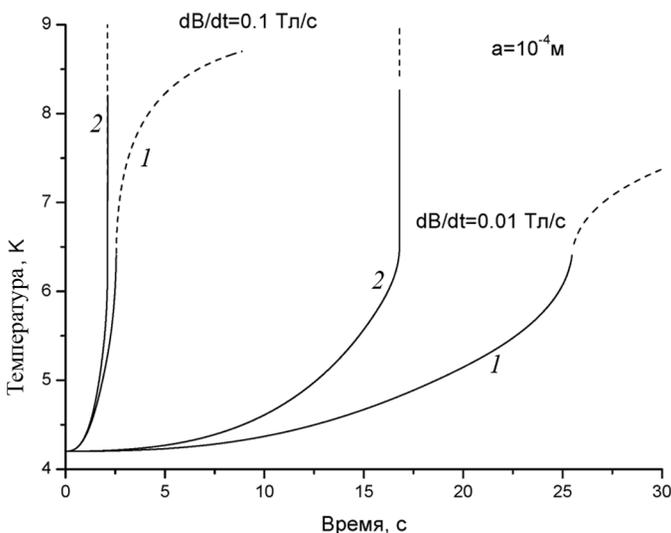


Рис. 2. Изменение температуры поверхности теплоизолированного сверхпроводника при различных зависимостях теплоемкости от температуры: сплошная кривая – $x_p > 0$; штриховая – $x_p = 0$; 1 – $C(T)$; 2 – $C(4,2 \text{ К})$

Нетрудно заметить, что по сравнению с изотермическим приближением неизотермическая динамика критического состояния при адиабатических условиях характеризуется более интенсивным проникновением магнитного потока внутрь сверхпроводника. Поэтому неизотермический расчет потерь может приводить к отклонению от соответствующих значений, вычисленных в изотермическом приближении, и особенно в моменты времени, предшествующие возникновению неустойчивости. В результате тепловая предыстория теплоизолированного сверхпроводника может оказать существенное влияние на условия возникновения и развития магнитной неустойчивости.

В качестве иллюстрации сказанного на рис. 2 приведены результаты расчета изменения теплового состояния теплоизолированного сверхпроводника до и после возникновения магнитной неустойчивости, полученные для различных зависимостей теплоемкости от температуры. Сплошными линиями показано увеличение температуры поверхности сверхпроводника в случаях, когда экранирующие токи не полностью заполняют поперечное сечение сверхпроводника, а штриховыми – после полного проникновения магнитного потока внутрь сверхпроводника. Приведенные на рис. 1 и 2 результаты наглядно демонстрируют влияние тепловой предыстории на формирование даже стабильных электродинамических состояний жесткого сверхпроводника и тем самым подчеркивают необходимость корректного определения допустимого увеличения температуры перед возникновением неустойчивости.

Особенности стабильного увеличения температуры жесткого сверхпроводника и закономерности неизотермического формирования критического состояния. Обсудим особенности формирования теплоэлектродинамических состояний жесткого сверхпроводника. Далее приведены результаты численного анализа процессов, протекающих в ниобий-титановом сверхпроводнике ($a = 10^{-4}$ м) при различных условиях теплоотдачи и значениях индукции внешнего магнитного поля, близких к полю скачка потока. Они получены на основе предложенного метода решения задачи неизотермической диффузии магнитного потока в жестком сверхпроводнике, описываемой системой уравнений (1)–(3). При этом тепло-электрофизические свойства сверхпроводника принимались следующими:

$$\begin{aligned}\rho_f &= \rho_n \frac{B}{B_{c2}(T)}; \quad \rho_n = 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}; \\ C &= 0,812 \cdot 10^3 T \frac{B}{B_{c0}} + 42,73 T^3 [19]; \\ \lambda &= 0,0075 T^{1,8} [20];\end{aligned}$$

критическая плотность тока $J_c(T, B)$ описывалась моделью Кима–Андерсона

$$\begin{aligned}J_c(T, B) &= \frac{\alpha_0}{B + B_0} \left(1 - \frac{T}{T_{cB}} \right); \quad T_{cB} = T_{c0} \sqrt{1 - B/B_{c2}}; \\ B_{c2} &= B_{c0} [1 - (T/T_{c0})^2];\end{aligned} \quad (5)$$

($\alpha_0 = 1,5 \cdot 10^{10}$ А · Тл/м²; $T_{c0} = 9$ К; $B_{c0} = 14$ Тл; $B_0 = 1,5$ Тл).

Для нахождения поля скачка потока B_m был разработан метод конечного возмущения исходного равновесного состояния. Он основан на численном определении итерационной последовательности фиксированных значений индукции внешнего магнитного поля $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow \dots B_s \rightarrow B_{s+1}$, когда для заданной точности расчета $|B_{s+1} - B_s| < \varepsilon$ определяются такие граничные значения B_s и B_{s+1} , при которых температура сверхпроводника, определяемая на основе решения задачи (1)–(3), стабилизируется при $B = B_s$ (неустойчивость отсутствует), а при $B = B_{s+1}$ — температура сверхпроводника самопроизвольно увеличивается (магнитный поток неустойчив).

На рис. 3 приведены кривые, описывающие изменение температуры сверхпроводника при стабильных и нестабильных состояниях. Соответствующая динамика границы проникновения и напряженности электрического поля на поверхности пластины показана на рис. 4. Состояния, после которых скорость нарастания внешнего магнитного поля полагалась равной нулю, т.е. внешнее магнитное поле B_a фиксировалось, изображены штриховыми и штрих-пунктирными линиями.

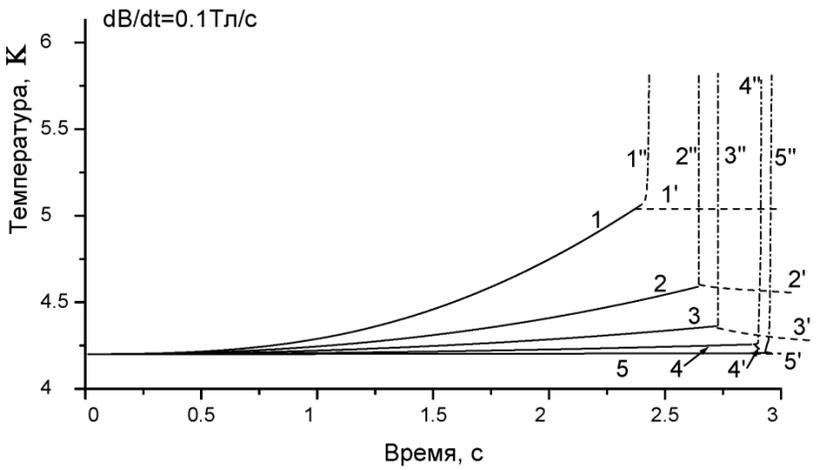


Рис. 3. Изменение температуры поверхности сверхпроводника до и после возникновения магнитной неустойчивости при варьировании коэффициента теплоотдачи h :

$h = 0$: 1 – непрерывный ввод, 1' – $B - a = 0,255$ Тл, 1'' – $B_a = 0,256$ Тл;
 $h = 1$ Вт/(м²·К): 2 – непрерывный ввод, 2' – $B_a = 0,279$ Тл, 2'' – $B_a = 0,280$ Тл;
 $h = 3$ Вт/(м²·К): 3 – непрерывный ввод, 3' – $B_a = 0,287$ Тл, 3'' – $B_a = 0,288$ Тл;
 $h = 10$ Вт/(м²·К): 4 – непрерывный ввод, 4' – $B_a = 0,303$ Тл, 4'' – $B_a = 0,304$ Тл;
 $h = 100$ Вт/(м²·К): 5 – непрерывный ввод, 5' – $B_a = 0,304$ Тл, 5'' – $B_a = 0,305$ Тл

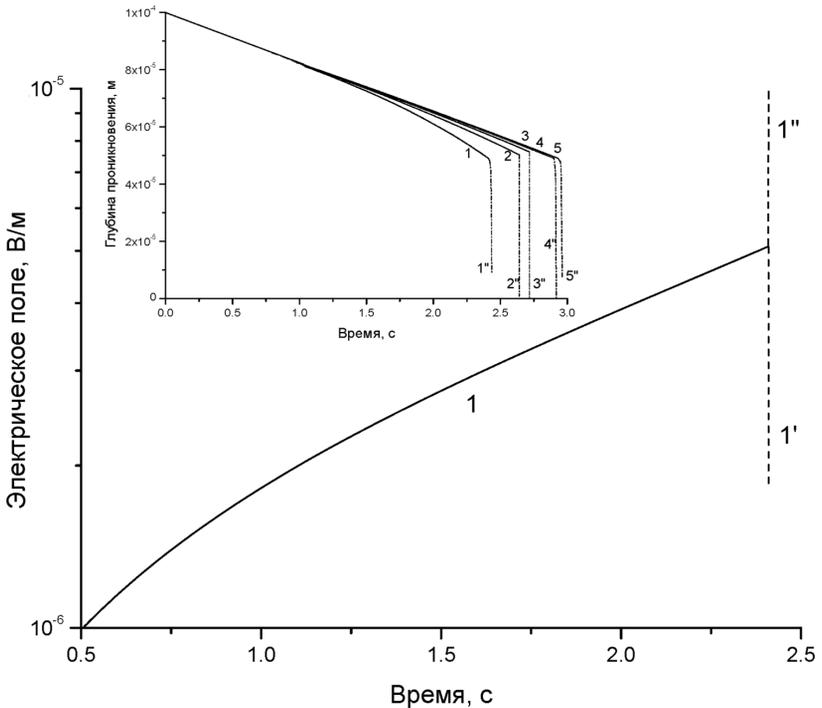


Рис. 4. Изменение глубины проникновения и напряженности электрического поля на поверхности сверхпроводника до и после скачка потока при $dB/dt = 0,1$ Тл/с (обозначения см. рис. 3)

Из рис. 3 следует, что изменение температуры жесткого сверхпроводника на протяжении всего процесса диффузии магнитного потока имеет характерный вид [21–21], наблюдающийся при действии до- и закритического импульсного теплового возмущения различной мощности. Действительно, сверхпроводник может либо сохранить сверхпроводящие свойства, несмотря на его заметный допустимый перегрев, либо перейти в нормальное состояние при незначительном повышении его температуры даже после прекращения изменения внешнего магнитного поля. В частности, при быстром нарастании поля или при тепловой изоляции сверхпроводника, когда время стабильного проникновения магнитного потока t_s относительно мало, повышение его температуры перед возникновением магнитной неустойчивости весьма заметно. (В рассматриваемом численном эксперименте допустимый перегрев достигает 10 % критической температуры сверхпроводника.) Но с уменьшением dB/dt или при улучшении условий теплоотдачи допустимый перегрев уменьшается при соответствующем увеличении времени стабильной диффузии магнитного поля.

Зависимость допустимого перегрева сверхпроводящей пластины от характера электродинамического возмущения может быть оценена по формуле

$$\Delta T \sim \frac{1}{a} \int_0^{t_s} \int_0^a EJ dx dt / (C_t + ht_s/a), \quad t_s = B_a/\dot{B}, \quad (6)$$

которую нетрудно получить, переходя от уравнения теплопроводности к уравнению теплового баланса (здесь C_t — среднеинтегральная теплоемкость сверхпроводника). Соответственно, когда неустойчивость инициируется за относительно малое время ($t_s \ll aC_t/h$), допустимый перегрев зависит от общей энергии, выделенной в процессе диффузии магнитного поля. При этом условия теплообмена будут оказывать слабое влияние на значение ΔT , а условия возникновения неустойчивости будут слабо зависеть от характера изменения внешнего магнитного поля. С увеличением времени диффузии магнитного потока, предшествующей скачку потока, допустимый перегрев сверхпроводника уменьшается и при $t_s \gg aC_t/h$, например при малых скоростях его нарастания или при интенсивном охлаждении, основной вклад в величину перегрева сверхпроводника будет вносить мощность диссипируемого тепла. В этом случае характер изменения во времени внешнего магнитного поля будет оказывать влияние на стабильное формирование электродинамических состояний.

Обобщая результаты численного и качественного анализа, сформулируем общую закономерность, которая имеет место перед возникновением магнитной неустойчивости: с увеличением времени

стабильной диффузии магнитного потока, предшествующего его необратимому проникновению внутрь сверхпроводника, допустимый перегрев образца монотонно уменьшается, но количество теплоты $G_m = \frac{1}{a} \int_0^{t_s} \int_0^a EJdxdt$, выделенное за это время, увеличивается

(рис. 5). Именно данная связь объясняет, почему при увеличении коэффициента теплоотдачи будет наблюдаться неожиданное, на первый взгляд, уменьшение допустимого перегрева сверхпроводника, на фоне которого возникает магнитная неустойчивость.

Таким образом, возникновению магнитной неустойчивости всегда предшествует конечный допустимый перегрев сверхпроводника, зависящий от скорости изменения внешнего магнитного поля и условий охлаждения. Наибольшие перегревы будут иметь место при отсутствии охлаждения или при высоких скоростях нарастания внешнего магнитного поля. Это необходимо учитывать при определении условий устойчивости сверхпроводящих магнитных систем с плотными обмотками, подверженных воздействию быстроизменяющихся магнитных полей.

Подчеркнем важность сформулированных результатов, полученных на основе использования модели вязкого течения, когда ВАХ сверхпроводника — кусочно-непрерывна. Существующая в настоящее время точка зрения на условия возникновения магнитной неустойчивости допускает малый допустимый перегрев сверхпроводника, но

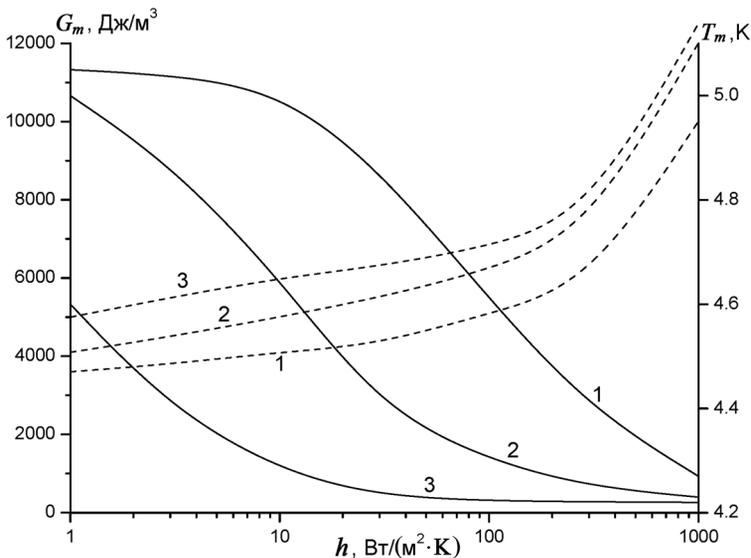


Рис. 5. Связь допустимого повышения температуры сверхпроводника T_m и количества теплоты G_m , выделяемого перед скачком потока, при варьировании коэффициента теплоотдачи h и различных значениях скорости нарастания внешнего магнитного поля

только в рамках моделей, предполагающих конечные значения параметров нарастания ВАХ сверхпроводников [9, 10, 24]. При этом в соответствии с условием устойчивости $\int_S E J ds \leq hpT_\delta$, сформулированном в работах [9, 10, 24] для сверхпроводников с ВАХ вида $E = J\rho_n \exp[J/J_\delta + (T_0 - T_c(B))/T_\delta]$, допустимое значение их стабильного перегрева независимо от пространственно-временных особенностей диффузии магнитного потока ограничивается малым значением температурного параметра нарастания ВАХ сверхпроводника T_δ , зависящего только лишь от степени нелинейности ВАХ. Поэтому при предельном переходе к условиям стабильности сверхпроводников с идеальной ВАХ ($T_\delta \rightarrow 0$) критерий стабильности, предложенный в работах [9, 10, 24], не имеет физического смысла, так как допустимый перегрев в этом случае должен быть равен нулю. Это привело авторов работ [9, 10, 24] к выводу: в модели критического состояния сверхпроводники не устойчивы в быстроизменяющемся магнитном поле. По своей сути это ошибочный вывод, как это следует из рассмотренных ранее результатов. Действительно если анализ стабильности критического состояния проводить с точки зрения коллективного формирования теплоэлектродинамических состояний сверхпроводника, происходящего на протяжении всего процесса диффузии магнитного потока, то у жесткого сверхпроводника даже с ВАХ, описываемой моделью вязкого течения ($T_\delta = 0$), перед скачком магнитного потока имеют место не только конечный допустимый перегрев, но и его зависимость от условий электродинамического воздействия. Поэтому при вариации внешнего магнитного поля в соответствии с изменением допустимого перегрева сверхпроводника, зависящего от скорости нарастания магнитного поля и условий охлаждения, будет иметь место соответствующее изменение поля скачка магнитного потока. Подчеркнем, что сформулированные характерные тепловые закономерности проникновения электромагнитного поля также имеют место и в сверхпроводящих средах с реальными ВАХ, которые могут быть описаны, например, степенным или экспоненциальным уравнением. Следовательно, искусственное ограничение допустимого перегрева сверхпроводника перед возникновением неустойчивости может приводить к искажению результатов анализа условий возникновения скачка потока. Согласно рис. 3 и 5 ошибка вычислений, выполненных в предположении существования допустимого перегрева, равного T_δ , тем больше, чем больше скорость ввода магнитного поля или меньше коэффициент теплоотдачи.

Итак, связь между допустимым перегревом и условиями стабильности критического состояния изначально лежит в основе зависимо-

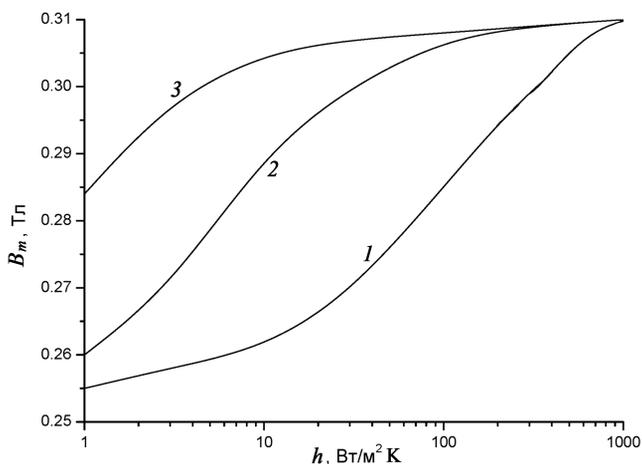


Рис. 6. Влияние коэффициента теплоотдачи и скорости ввода на поле скачка потока при разных значениях $\partial V/\partial t$, Тл/с: 10, 1 и 0,1 (кривые 1–3 соответственно)

сти поля скачка потока от скорости его изменения. В качестве иллюстрации данной зависимости на рис. 6 построены кривые, описывающие изменение поля скачка потока как функции коэффициента теплоотдачи для различных значений скорости нарастания внешнего магнитного поля.

Из результатов, рассмотренных выше, также следует еще один важный вывод о существовании связи между допустимыми потерями энергии в сверхпроводнике, находящемся в переменном магнитном поле, и стабильным повышением его температуры перед возникновением неустойчивости. Согласно рис. 5 с улучшением условий теплоотдачи допустимые тепловыделения в сверхпроводнике, которые не будут вызывать возникновение неустойчивости, увеличиваются на фоне его монотонно уменьшающегося стабильного перегрева. Причем в случаях интенсивного охлаждения сверхпроводника потери приводят к возникновению неустойчивости, развивающейся на фоне весьма малого допустимого перегрева сверхпроводника. В результате даже при идеальных условиях охлаждения поверхности сверхпроводника ($h \rightarrow \infty$) допустимое стабильное значение температуры сверхпроводника перед возникновением неустойчивости будет намного ниже критической температуры сверхпроводника, но при этом оно будет выше температуры хладагента. Поэтому широко распространенное предположение, согласно которому тепловые потери в сверхпроводнике при интенсивных условиях теплообмена будут приводить к его переходу в нормальное состояние только после того, как температура сверхпроводника превысит его критическую температуру, является ошибочным. Подчеркнем, что данный вывод получен в рамках модели вязкого течения. В то же время в рамках существующей теории

получить его принципиально невозможно в силу ограничения используемых методов анализа.

В связи с отмеченной нетривиальной связью между тепловыми потерями и допустимым перегревом сверхпроводника еще раз проанализируем критерий $\int_S E J ds \leq hpT_\delta$, согласно которому потери независимо от условий охлаждения не должны перегревать сверхпроводник выше температурного параметра нарастания ВАХ сверхпроводника, т.е. T_δ . Данное условие приводит к нулевым значениям допустимых потерь при адиабатических условиях охлаждения ($h \rightarrow 0$), а также к их неограниченным значениям при идеальных условиях охлаждения ($h \rightarrow \infty$). Следовательно, этот критерий не соблюдает предельных переходов к двум практически важным режимам охлаждения. В результате, он не позволяет в целом корректно оценить допустимый уровень потерь в зависимости от коэффициента теплоотдачи. Это обусловлено некорректной оценкой связи между допустимым повышением температуры сверхпроводника и диссипативными явлениями. В то же время, как следует из рис. 5, даже в рамках модели вязкого течения ($T_\delta = 0$) наблюдается нетривиальная взаимосвязь между допустимыми потерями и перегревами жесткого сверхпроводника, которая существует во всем диапазоне варьирования значений коэффициента теплоотдачи. Она приводит к новой формулировке условий разрушения критического состояния: магнитная неустойчивость возникает вследствие тепловыделения, превышающего критическое значение, которое зависит от условий теплоотдачи, интенсивности электромагнитного возмущения. Данный вывод и обсужденные выше закономерности изменения допустимых перегревов связывают между собой независимо развивающиеся теорию магнитной неустойчивости, теорию потерь и теорию тепловой стабилизации. Как известно, в рамках последней доказано существование значительных допустимых перегревов, зависящих от характера возмущения, введенного тока и условий теплоотдачи [21–23]. Поэтому в целом соблюдается общий тепловой механизм возникновения магнитной и тепловой неустойчивостей. Он позволяет с единых теоретических предпосылок сформулировать условия возникновения каких-либо неустойчивостей при действии возмущений различной природы, учитывая взаимосвязанное изменение тепловых и электродинамических состояний сверхпроводника перед их возникновением.

Связь адиабатических условий устойчивости критического состояния жесткого сверхпроводника с потерями и его допустимым перегревом. Стабильное повышение температуры сверхпроводника (максимальное при адиабатических условиях изменения внешнего

магнитного поля ($t_s \ll aC_t/h$), должно видоизменить известное адиабатическое условие стабильности критического состояния. Сформулируем соответствующий критерий в неизотермическом приближении для сверхпроводника с линейной температурной зависимостью критической плотности тока вида (4) в случае неполного проникновения магнитного потока внутрь сверхпроводника, предполагая, что $C \sim \text{const}$. Введем безразмерные переменные

$$X = x/a; \quad \tau = t/t_x \quad (t_x = \mu_0 a^2 / \rho_f); \quad e = E / (J_{c0} \rho_f);$$

$$\theta = (T - T_0) / (T_{cB} - T_0).$$

Исключая плотность тока в системе уравнений (1), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \Lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \begin{cases} 0, & 0 < X < X_p; \\ \gamma e, & X_p \leq X \leq 1; \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 e}{\partial X^2} + \gamma e + \Lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad \gamma = \beta(1 - \theta);$$

где $\Lambda = \frac{\lambda \mu_0}{C \rho_f}$, $\beta = \frac{\mu_0 J_{c0} a^2}{C} \left| \frac{dJ_c}{dT} \right|$ — характерные безразмерные параметры, от которых зависит стабильность критического состояния [1–3].

Приведенная система уравнений позволяет проанализировать влияние температуры на условия стабильности сверхпроводящего состояния. Так, второе уравнение системы (7), описывающее эволюцию электрического поля внутри сверхпроводника, относится к классу диффузионных уравнений с объемным размножением [25]. Типичным процессом указанного типа является диффузия нейтронов в активной среде с коэффициентом размножения $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, где $\gamma_1 = g\beta$ — коэффициент рождения нейтронов, $\gamma_2 = \beta\theta$ — коэффициент поглощения нейтронов. При $\gamma > 0$ процесс объемной генерации нейтронов преобладает над их поглощением, и при определенных условиях, зависящих от величины γ , возникает цепная реакция. Согласно данной аналогии при $\gamma = \beta(1 - \theta) > 0$ возможно спонтанное возрастание напряженности электрического поля в сверхпроводнике, при котором может быть нарушена устойчивость критического состояния. Но при этом повышение температуры сверхпроводника перед возникновением магнитной неустойчивости, аналогичное увеличению коэффициента поглощения, будет приводить к увеличению диапазона устойчивых состояний с точностью до значения и знака множителя $\Lambda \partial^2 \theta / \partial X^2$, также влияющего на характер перераспределения электрического поля внутри сверхпроводника.

В общем случае анализ условий устойчивости, проводимый даже на основе упрощенной системы (7), требует применения численных методов. Для того чтобы в аналитическом виде записать критерии возникновения магнитной неустойчивости, исследуем начальную стадию эволюции электрического поля, когда температура сверхпроводника θ_m , до которой он нагрелся перед возникновением неустойчивости, и граница области намагниченности X_p не претерпевают значительного изменения. Для жестких сверхпроводников без стабилизирующей матрицы данный подход оправдан в силу того, что изменение температуры сверхпроводника изначально определяется диффузией магнитного поля, так как для жестких сверхпроводников $\Lambda \ll 1$ [3]. Кроме этого будем учитывать, что распределение температуры внутри жесткого сверхпроводника при адиабатических условиях охлаждения практически однородно. Поэтому в приближении $\Lambda \ll 1$ анализ начальной стадии перераспределения электрического поля внутри сверхпроводника, на поверхности которого внешнее магнитное поле постоянно, может быть выполнен на основе исследования собственных чисел редуцированного уравнения вида

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 e}{\partial X^2} + \gamma e, \quad \gamma = \beta(1 - \theta_m) \sim \text{const}, \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$e(X_p, \tau) = 0, \quad \partial e / \partial X(1, \tau) = 0. \quad (9)$$

Решение задачи (8), (9) с начальными и краевыми условиями будем искать в виде

$$e(X, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp[(\gamma - \nu_k) \tau] Q_k(X), \quad (10)$$

где A_k — константы интегрирования; $Q_k(X)$ — собственные функции; ν_k — собственные числа, которые следуют из решения задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2 Q_k}{dX^2} + \nu_k Q_k = 0, \quad Q_k(X_p) = 0, \quad dQ_k/dX(1, \tau) = 0.$$

Согласно данной спектральной задаче, собственные числа удовлетворяют равенству

$$\sqrt{\nu_k}(1 - X_p) = (2k - 1)\pi/2, \quad 0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Поэтому электрическое поле, индуцированное изменяющимся внешним магнитным полем, будет спонтанно возрастать (см. рис. 4) даже при фиксированном значении внешнего магнитного поля, если выполняется условие $\gamma - \nu_1 > 0$, когда в выражении (10) появится сомножитель, экспоненциально нарастающий со временем. Следовательно, в

неизотермическом приближении сверхпроводящее состояние не разрушается, если соблюдается условие адиабатической устойчивости вида

$$\beta < \frac{\pi^2}{4(1 - \theta_m)(1 - X_p)^2}, \quad (11)$$

которое относительно размерных переменных может быть записано как

$$\mu_0 a^2 J_{c0} C \left| \frac{dJ_c}{dT} \right| \left(1 - \frac{x_p}{a} \right)^2 \frac{T_{cB} - T_m}{T_{cB} - T_0} < \frac{\pi^2}{4}. \quad (12)$$

Нетрудно найти, что в предельном случае $T_m \rightarrow T_0$ и $X_p \rightarrow 0$ критерии (11) и (12) приводят к соответствующим изотермическим условиям адиабатической устойчивости [1–3]. Критерии (11) и (12) также наглядно демонстрируют влияние допустимого увеличения температуры сверхпроводника на условия стабильности критического состояния при неполном проникновении экранирующего тока внутрь сверхпроводника, и в частности, на допустимое увеличение области намагниченности. Согласно (12) критическое состояние устойчиво, если подвижная координата x_p удовлетворяет условию

$$a - x_p < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C(T_{cB} - T_0)^2}{\mu_0 J_{c0}^2 (T_{cB} - T_m)}}, \quad (13)$$

а внешнее магнитное поле не превысило значение

$$B_m = \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu_0 C (T_{cB} - T_m)}. \quad (14)$$

Следовательно, чем больше стабильное увеличение температуры сверхпроводника, тем больше величина x_p , а значит, по мере стабильного заполнения экранирующими токами поперечного сечения сверхпроводника условия возникновения магнитной неустойчивости выйдут за рамки электродинамических условий и станут более зависимыми от теплового состояния сверхпроводника. В результате наибольшее влияние температуры на условия адиабатической устойчивости будет наблюдаться при полном проникновении экранирующих токов внутрь сверхпроводника.

Проведенный упрощенный анализ влияния температуры на условия адиабатической стабильности критического состояния был выполнен при изучении только лишь начальной стадии перераспределения электрического поля, индуцированного изменяющимся внешним магнитным полем. Рассмотрим теперь другую сторону данной проблемы, а именно исследуем динамику температуры сверхпроводника, предположив, что распределение электрического поля внутри области намагниченности удовлетворяет так называемому биновскому приближению [1–3] и в терминах введенных безразмерных переменных может

быть записано как

$$e(X, \tau) = \frac{a\dot{B}}{J_{c0}\rho_f} (X - X_p). \quad (15)$$

Перейдем в системе уравнений (7) от уравнения теплопроводности к уравнению теплового баланса, проинтегрировав его по X в пределах от 0 до 1, учитывая адиабатические тепловые граничные условия $\partial\theta/\partial X(0, \tau) = 0$, $\partial\theta/\partial X(1, \tau) = 0$ и однородное распределение температуры.

После несложных преобразований получаем уравнение

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \beta(1 - \theta) \int_{X_p}^1 e(X, \tau) dX.$$

Подставив в него формулу (15) и выполнив интегрирование, найдем связь между скоростью нарастания температуры и глубиной проникновения магнитного потока:

$$(1 - X_p)^2 = \frac{2J_{c0}\rho_f}{\beta(1 - \theta)} \frac{d\theta}{\dot{B}a d\tau}.$$

Тогда из критерия (11) следует, что критическое состояние устойчиво, если скорость нарастания температуры сверхпроводника не превышает некоторого характерного значения, т.е. удовлетворяет условию

$$\frac{d\theta}{d\tau} < \frac{\pi^2}{8} \frac{\dot{B}a}{J_{c0}\rho_f}.$$

В размерном виде оно записывается как

$$\frac{dT}{dt} < \frac{\pi^2}{8} \frac{\dot{B}(T_{cB} - T_0)}{\mu_0 J_{c0} a}.$$

Данный критерий определяет тепловое условие возникновения магнитной неустойчивости при адиабатических условиях охлаждения. Согласно данной оценке и уравнению теплового баланса, записанному в виде

$$C \frac{dT}{dt} = \frac{1}{a} \int_{x_p}^a EJ dx,$$

легко найти соответствующее ограничение на величину выделяемых потерь, а именно при

$$\int_{x_p}^a EJ dx < \frac{\pi^2}{8} \frac{C(T_{cB} - T_0) \dot{B}}{\mu_0 J_{c0}},$$

а значит, и при

$$\int_0^t \int_{x_p}^a E J dx dt < \frac{\pi^2 C (T_{cB} - T_0) B_a(t)}{8 \mu_0 J_{c0}}$$

критическое состояние устойчиво. Физический смысл последнего неравенства очевиден: при адиабатических условиях формирования критического состояния существует верхняя граница допустимого значения объемной плотности тепловых потерь, при превышении которой возникнет магнитная неустойчивость. В то же время, как уже отмечалось в рамках теории, разработанной в [9, 10, 24], данная связь при $h \rightarrow 0$ в принципе не может быть сформулирована в силу некорректной оценки роли температуры при формировании электродинамических состояний.

Таким образом, результаты выполненного анализа строго доказывают, что существует нетривиальная связь между допустимыми потерями и соответствующими перегревами жесткого сверхпроводника, при нарушении которой возникает магнитная неустойчивость. Поэтому помимо электродинамического условия стабильности сверхпроводящего состояния должны соблюдаться и соответствующие эквивалентные тепловые условия стабильности, однозначно описывающие возникновение магнитной неустойчивости в жестких сверхпроводниках. С физической точки зрения данный вывод принципиально важен, так как он обосновывает применение единой методики нахождения условий возникновения неустойчивостей различной природы, основанной на определении верхней границы энергии допустимого тепловыделения. Последняя зависит от характера внешнего воздействия (электромагнитного, теплового или какой-либо их комбинации), условий охлаждения, свойств сверхпроводника и позволяет соблюсти предельные переходы к известным условиям устойчивости сверхпроводящего состояния, полученным в рамках различных моделей ВАХ в отличие от ряда сформулированных ранее критериев устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альтов В. А., Зенкевич В. Б., Кремлев М. Г., Сычев В. В. Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 312 с.
2. Уилсон М. Сверхпроводящие магниты. – М.: Мир, 1985. – 408 с.
3. Гуревич А. В. л., Минц Р. Г., Рахманов А. Л. Физика композитных сверхпроводников. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
4. Morton N., Darby M. I. Prediction of flux jumps in type II superconductors // *Cryogenics*. – 1973. – Vol. 13. No. 4. – P. 232–235.
5. Darby M. I., Morton N. Numerical solutions for the nonlinear penetration of magnetic flux into type II superconductors // *J. of Computational Phys.* – 1973. – Vol. 13. No. 1. – P. 35–44.

6. B u s s i e r e J. F., L e B l a n c M. A. R. A dynamic model for flux jumps in type-II superconductors // *J. Appl. Phys.* – 1975. – Vol. 46. No. 1. – P. 406–415.
7. G i j s b e r t s e E. A., v a n d e r K l u n d e r t L. J. M., v a n R i j M. L. D., e t a l. Non-isothermal flux penetration in type II superconductors // *Cryogenics.* – 1981. – Vol. 21. No. 6. – P. 419–425.
8. V a n d e r K l u n d e r t L. J. M. Electrodynamics sources of non-uniform heat production in composite superconductors causing instabilities // *Cryogenics.* – 1992. – Vol. 32. No. 5. – P. 508–512.
9. K l i m e n k o E. Y u., M a r t o v e t s k y N. N., N o v i k o v S. I. Stability of the real superconductors // *Proc. of MT-9 Conf.* – Zurich, Switzerland, 1985. – P. 581–583.
10. К л и м е н к о Е. Ю., М а р т о в е ц к и й Н. Н., Н о в и к о в С. И. Стабильность сверхпроводящих проводов с реальной переходной характеристикой: В кн. *Техническая сверхпроводимость в электроэнергетике и электротехнике.* – М. СЭВ, – 1986. – С. 161–187.
11. К л и м е н к о Е. Ю., М а р т о в е ц к и й Н. Н., Н о в и к о в С. И. Стабильность сверхпроводящих проводов в быстропеременных полях // *Сверхпроводимость: физика, химия, техника.* – 1989. – Т. 28. № 11. – С. 152–165.
12. K l i m e n k o E. Y u., M a r t o v e t s k y N. N. Stability of the superconducting wires. Modern state of the theory // *IEEE Trans. on Mag.* – 1992. – Vol. 28. No. 1. – P. 842–845.
13. K l i m e n k o E. Y u., M a r t o v e t s k y N. N., N o v i k o v S. I. Effect of heat capacity and matrix resistivity on stability of superconductor in fast changing fields // *Proc. of MT-11 Conf.* – Tsukuba, Japan, 1989. – Vol. 2. – P. 1066–1071.
14. К л и м е н к о Е. Ю., К о з и ц ы н В. Е., М а р т о в е ц к и й Н. Н., Н о в и к о в С. И. Экспериментальная проверка РПХ-теории стабильности // *ДАН.* – 1987. – Т. 292. № 5. – С. 1119–1122.
15. К л и м е н к о Е. Ю., М а р т о в е ц к и й Н. Н., Н о в и к о в С. И. О стабильности сверхпроводящих проводов с размытым переходом в нормальное состояние // *ДАН.* – 1981. – Т. 261. № 6. – С. 1350–1354.
16. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики – М.: Наука, 1972. – 735 с.
17. С а м а р с к и й А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
18. С а м а р с к и й А. А., Н и к о л а е в Е. С. Методы решения сеточных уравнений – М.: Наука, 1978. – 592 с.
19. E l r o d S. A., M i l l e r J. R., D r e s n e r L. // *Adv. Cryog. Eng.* – 1982. – Vol. 28. – P. 601–610.
20. Ш м и д т К. // *Приборы для научных исследований.* – 1979. – № 3. – С. 62–66.
21. K e i l i n V. E., R o m a n o v s k y V. R. The dimensionless analysis of the stability of composite superconductors with respect to thermal disturbances // *Cryogenics.* – 1982. – Vol. 22. No. 6. – P. 313–317.
22. Р о м а н о в с к и й В. Р. Правомерность использования теории минимально распространяющейся нормальной зоны для анализа тепловой стабильности комбинированных сверхпроводников // *ДАН СССР.* – 1984. – Т. 279. № 4. – С. 884–887.
23. R o m a n o v s k y V. R. Regularity of thermal stability conditions of composite superconductors postulated by the theory of minimum propagating zone // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 1985. – Vol. 18. – P. 121–127.
24. К л и м е н к о Е. Ю., М а р т о в е ц к и й Н. Н., Н о в и к о в С. И. О максимальном токе в сверхпроводящем проводе // *ДАН.* – 1985. – Т. 282. № 5. – С. 1123–1127.
25. М а р т и н с о н Л. К., М а л о в Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. – 368 с.

Статья поступила в редакцию 27.06.2012