УДК 519.718

Г. С. Садыхов, И. А. Бабаев, О. В. Елисеева

НИЖНЯЯ ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ГРАНИЦА СРЕДНЕЙ НАРАБОТКИ ДО КРИТИЧЕСКОГО ОТКАЗА ТЕХНОГЕННО-ОПАСНОГО ОБЪЕКТА

Рассмотрен класс техногенно-опасных объектов, критические отказы которых сосредоточены на заданном интервале времени. Для такого класса объектов установлена нижняя доверительная граница средней наработки до критического отказа при заданной доверительной вероятности.

E-mail: gsadykhov@gmail.com

Ключевые слова: *критический отказ, средняя наработка до критического отказа, точечная оценка показателя, нижняя доверительная граница показателя, техногенно-опасный объект.*

Рассмотрим техногенно-опасный объект (ТОО), критические отказы которого могут наблюдаться на некотором интервале времени $(\tau, \tau+l)$. Предполагается, что отказ на этом интервале может повлечь за собой техногенную катастрофу, аварию, чрезвычайную ситуацию и т. д. Отказы ТОО вне этого интервала времени считаются некритическими, и тогда наработка до критического отказа ТОО

$$\zeta(\tau, l) = \begin{cases} \zeta, & \text{если отказ произошел внутри интервала } (\tau, \tau+l), \\ \tau+l, & \text{если отказа там не было,} \end{cases} \tag{1}$$

где ζ — наработка до критического отказа.

Определим среднюю наработку до критического отказа как математическое ожидание случайной величины (1) по следующей формуле:

$$\rho(\tau, l) = M\left[\zeta(\tau, l)\right], \tag{2}$$

где $M\left[\cdot\right]$ — математическое ожидание величины, заключенной внутри скобок.

Точечная оценка показателя $\boldsymbol{\rho(\tau, l)}$. Согласно определению определения показателя (2), в качестве точечной оценки показателя $\rho(\tau, l)$ можно взять величину

$$\hat{\rho}_k^{(n)}(\tau, l) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-k}\left[\sum\limits_{i=1}^{m} z_i + (n-k-m)\left(\tau+l\right)\right], & \text{если } k < n, \\ 0, \text{ если } k = n, \end{cases} \tag{3}$$

где k — число отказавших ТОО в течение времени τ из всех однотипных объектов в количестве n, наблюдаемых в процессе испытаний (или подконтрольной эксплуатации); z_i наработка i-го отказавшего ТОО на интервале времени $(\tau, \tau + l)$ из числа m всех отказавших ТОО на этом интервале $\left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$.

Покажем, что точечная оценка (3) смещенная, т. е.

$$M\left[\hat{\rho}_k^{(n)}(\tau, l)\right] \neq \rho(\tau, l),$$

и найдем несмещенную точечную оценку показателя (2), используя два вспомогательных утверждения.

Определим случайную величину

$$\zeta_\tau(l) = \begin{cases} \left(\zeta - \tau\right)\middle| \zeta > \tau, \text{ если отказ ТОО произошел внутри интервала} \\ \qquad\qquad (\tau, \tau + l), \\ l, \text{ если отказа там не было.} \end{cases} \tag{4}$$

Докажем первое утверждение.

Лемма 1. Справедлива следующая формула:

$$M\left[\zeta_\tau(l)\right] = r(\tau, l), \tag{5}$$

где

$$r(\tau, l) = \frac{1}{P(\tau)} \int\limits_0^l P(\tau + t) dt,$$

$P(\cdot)$ — вероятность безотказной работы ТОО в течение времени, указанного внутри скобок.

Доказательство. Определим функцию распределения случайной величины (4). Имеем

$$F_{\zeta_\tau}\left(t\right) = Pr\left[\left(\zeta_\tau\left(l\right) < t\right)\middle|\zeta > \tau\right],$$

где $Pr(\cdot)$ — вероятность события, заключенного внутри скобок при $0 < t < l$ (от англ. probability — вероятность).

Используя формулу условных вероятностей, найдем

$$F_{\zeta_\tau}\left(t\right) = \frac{Pr\left(\tau < \zeta < \tau + t\right)}{Pr\left(\zeta > \tau\right)},$$

откуда

$$F_{\zeta_\tau}(t) = 1 - \frac{P(\tau+t)}{P(\tau)}.$$

Следовательно, плотность распределения случайной величины (4) имеет вид

$$f_{\zeta_\tau}(t) = \frac{f(\tau+t)}{P(\tau)}. \qquad (6)$$

Случайная величина (4) смешанная, поэтому она имеет непрерывную часть (первая строка) и дискретную часть (вторая строка). Формула (6) соответствует ее непрерывной части.

Дискретная часть случайной величины (4)

$$Pr\left[\zeta_\tau(l) = l\right] = \frac{P(\tau+l)}{P(\tau)}. \qquad (7)$$

Отметим, что

$$\int_0^l f_{\zeta_\tau}(t)dt + \frac{P(\tau+l)}{P(\tau)} = 1,$$

т. е. плотность распределения, определяемая формулами (6) и (7), обладает нормировочным свойством.

Согласно формуле математического ожидания для смешанной случайной величины, имеем [1]

$$M\left[\zeta_\tau(l)\right] = \int_0^l t f_{\zeta_\tau}(t)dt + l\frac{P(\tau+l)}{P(\tau)}. \qquad (8)$$

Используя формулу (6), в которой $f(\tau+t) = -P'(\tau+t)$, получаем

$$\int_0^l t f_{\zeta_\tau}(t)dt = -l\frac{P(\tau+l)}{P(\tau)} + \frac{1}{P(\tau)}\int_0^l P(\tau+t)dt.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (8), имеем

$$M\left[\zeta_\tau(l)\right] = \frac{1}{P(\tau)}\int_0^l P(\tau+t)dt,$$

что является доказательством формулы (5) и тем самым леммы 1.

Для дальнейшего исследования необходимо найти (в обозначениях формулы (3)) следующую случайную величину:

$$\hat{r}_k^{(n)}(\tau,l)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-k}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}\left(z_i-\tau\right)+(n-k-m)l\right], \text{ если } k<n\,; \\ 0, \text{ если } k=n.\end{cases} \tag{9}$$

Докажем второе утверждение.

Лемма 2. Справедлива следующая формула:

$$M\left[\hat{r}_k^{(n)}(\tau,l)\right]=K_n\left(\tau\right)r\left(\tau,l\right), \tag{10}$$

где

$$K_n\left(\tau\right)=1-\left[1-P\left(\tau\right)\right]^n. \tag{11}$$

Составим таблицу распределения вероятностей для случайной величины (9):

$\hat{r}_0^{(n)}(\tau,l)$	$\hat{r}_1^{(n)}(\tau,l)$	$\hat{r}_2^{(n)}(\tau,l)$	$\cdots$	$\hat{r}_k^{(n)}(\tau,l)$	$\cdots$	$\hat{r}_{n-1}^{(n)}(\tau,l)$	0
$P_n\left(0\right)$	$P_n\left(1\right)$	$P_n\left(2\right)$	$\cdots$	$P_n\left(k\right)$	$\cdots$	$P_n\left(n-1\right)$	$P_n\left(n\right)$

В этой таблице

$$P_n\left(k\right)=C_n^kF^k\left(\tau\right)P^{n-k}\left(\tau\right),\quad k=0,1,2,\ldots,n, \tag{12}$$

есть вероятность того, что из n объектов откажут k в течение времени τ; C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.

Согласно правилу вычисления математического ожидания для условных случайных величин [2], имеем

$$M\left[\hat{r}_k^{(n)}(\tau,l)\right]=\sum_{k=0}^{n-1}M\left[\hat{r}_k^{(n)}(\tau,l)\middle|k\right]P_n\left(k\right), \tag{13}$$

где условная случайная величина

$$\hat{r}_k^{(n)}(\tau,l)\Big|k=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n-k}\zeta_\tau^{(j)}(l)}{n-k}. \tag{14}$$

Здесь

$$\zeta_\tau^{(j)}(l)=\begin{cases}\left(\zeta_j-\tau\right)\Big|\zeta_j>\tau, \text{ если } j\text{-й объект отказал внутри интервала} \\ \qquad\qquad (\tau,\tau+l); \\ l, \text{ если отказа там нет у } j\text{-го объекта}\,;\end{cases}$$

ζ_j — наработка j-го объекта до отказа.

При фиксированном значении k из выражения (14) найдем

$$M\left[\hat{r}_k^{(n)}(\tau, l)\middle| k\right] = r(\tau, l), \tag{15}$$

поскольку

$$M\left(\zeta_\tau^{(j)}(l)\right) = r(\tau, l).$$

Следовательно, из выражения (13) с учетом формулы (15) получим

$$M\left[\hat{r}_k^{(n)}(\tau, l)\right] = r(\tau, l)\sum_{k=0}^{n-1} P_n\left(k\right). \tag{16}$$

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{n} P_n\left(k\right) = 1,$$

найдем

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_n\left(k\right) = 1 - P_n\left(n\right).$$

Учитывая формулу (12), имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_n\left(k\right) = 1 - \left(1 - P\left(\tau\right)\right)^n.$$

Записав найденное выражение в соотношение (16), получим искомую формулу (10), что и доказывает лемму 2.

Из леммы 2 следует, что точечная оценка (9) смещенная. При этом из функции смещения следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} K_n\left(\tau\right) = 1$. Другими словами, при больших выборках n смещение ликвидируется, а при малых — нет.

Согласно формулам (3) и (9), имеем

$$\hat{\rho}_k^{(n)}(\tau, l) = \tau + \hat{r}_k^{(n)}(\tau, l),$$

откуда следует, что оценка (3) в силу леммы 2 также смещенная.

Для ликвидации смещения запишем новую точечную оценку:

$$\tilde{\rho}_k^{(n)}(\tau, l) = \tau + \tilde{r}_k^{(n)}(\tau, l), \tag{17}$$

где

$$\tilde{r}_k^{(n)}(\tau, l) = \frac{\hat{r}_k^{(n)}(\tau, l)}{K_n\left(\tau\right)}. \tag{18}$$

Поскольку, согласно лемме 2,

$$M\left[\tilde{r}_k^{(n)}(\tau, l)\right] = r(\tau, l),$$

для точечной оценки (17) получим

$$M\left[\tilde{\rho}_k^{(n)}(\tau, l)\right] = \tau + r(\tau, l). \tag{19}$$

Из формул (1) и (4) имеем

$$\zeta(\tau, l) = \tau + \zeta_\tau(l),$$

откуда, применив операцию математического ожидания к обеим частям с учетом формул (2) и (5), найдем

$$\rho(\tau, l) = \tau + r(\tau, l). \tag{20}$$

Поскольку правые части (19) и (20) равны, будут равны и левые части:

$$M\left[\tilde{\rho}_k^{(n)}(\tau, l)\right] = \rho(\tau, l).$$

Откуда следует, что точечная оценка (17) несмещенная.

Таким образом, доказана теорема 1.

Теорема 1. Несмещенной точечной оценкой средней наработки до критического отказа техногенно-опасного объекта служит следующая величина:

$$\tilde{\rho}_k^{(n)}(\tau, l) = \tau + \frac{\hat{r}_k^{(n)}(\tau, l)}{K_n\left(\tau\right)},$$

где $\hat{r}_k^{(n)}(\tau, l)$ — оценка, определяемая формулой (9), значение $K_n\left(\tau\right)$ — формулой (11).

В частности, при $\tau = 0$ из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Для техногенно-опасного объекта, у которого критические отказы могут наблюдаться на интервале времени* $\left(0, l\right)$, *несмещенной точечной оценкой средней наработки до критического отказа служит величина*

$$\tilde{\rho}^{(n)}(0,l)=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{m} z_i+(n-m)l\right\}, \tag{21}$$

где m — число отказавших объектов на этом интервале времени из числа всех однотипных в количестве n, наблюдаемых в процессе испытаний; z_i — наработка i-го отказавшего объекта на интервале времени $(0,l)$ при $i=1,2,\ldots,m$.

Нижняя доверительная граница показателя $\boldsymbol{\rho(\tau,l)}$. При малых значениях n степень доверия к точечной оценке показателя $\rho(\tau,l)$ крайне низка. Для повышения степени доверия установим нижнюю доверительную границу $\underline{\rho_k^{(n)}}(\tau,l)$ для показателя $\rho(\tau,l)$ при заданной доверительной вероятности P. Другими словами, найдем такую нижнюю оценку $\underline{\rho_k^{(n)}}(\tau,l)$ для показателя $\rho(\tau,l)$, которая будет удовлетворять соотношению

$$Pr\left[\rho(\tau,l)>\underline{\rho_k^{(n)}}(\tau,l)\right]>P$$

при заданной доверительной вероятности $0<P<1$.

Докажем теорему 2.

Теорема 2. Нижней доверительной границей показателя $\rho(\tau,l)$ при заданной доверительной вероятности P служит следующая величина:

$$\underline{\rho_k^{(n)}}(\tau,l)=\tilde{\rho}_k^{(n)}(\tau,l)-\frac{l}{K_n(\tau)}\sqrt{\frac{-\ln(1-P)}{2(n-k)}}, \tag{22}$$

где $\rho_k^{(n)}(\tau,l)$ — несмещенная точечная оценка показателя $\rho(\tau,l)$, определенная формулой (17); k — число объектов, отказавших в течение времени τ от начала наблюдения из всей совокупности n однотипных объектов; $K_n(\tau)$ — величина, определяемая формулой (11).

Доказательство. Получим оценку по следующей формуле:

$$\hat{J}_k^{(n)}(\tau,l)=\frac{1}{l}\hat{r}_k^{(n)}(\tau,l), \tag{23}$$

где значение $\hat{r}_k^{(n)}(\tau,l)$ определяется соотношением (9).

Согласно соотношению (10) леммы 2, имеем

$$M\left[\hat{J}_k^{(n)}(\tau,l)\right]=K_n(\tau)J(\tau,l), \tag{24}$$

где

$$J(\tau, l) = \frac{1}{l} r(\tau, l). \tag{25}$$

Здесь, согласно лемме 1,

$$r(\tau, l) = \frac{1}{P(\tau)} \int_0^l P(\tau + t) dt.$$

Определим следующие случайные величины:

$$X_i = \begin{cases} \dfrac{z_i - \tau}{l}, & \text{если } i\text{-й объект отказал внутри интервала } (\tau, \tau + l); \\ 1, & \text{если там отказа не было.} \end{cases} \tag{26}$$

Воспользуемся неравенством для случайных величин $X_i \in (a_i, b_i)$ и произвольного значения $\varepsilon > 0$ [3]:

$$Pr\left(\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} X_i - \mu < \varepsilon \right) > 1 - \exp\left[-\frac{2\nu^2 \varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)} \right], \tag{27}$$

где

$$\mu = M\left(\frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} X_i \right).$$

Неравенство (27) представляет собой односторонний аналог неравенства Чебышева [4].

Для случайных величин (26) имеем $a_i = 0,\ b_i = 1\ (i = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Положив в неравенстве (27) $\nu = n - k,$ в соответствии с формулами (23) и (24) получим

$$Pr\left[\hat{J}_k^{(n)}(\tau, l) - K_n(\tau) J(\tau, l) < \varepsilon \right] > 1 - \exp\left[-2(n-k)\varepsilon^2 \right],$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n-k} (b_i - a_i) = n - k.$$

Откуда

$$Pr\left[J(\tau,l) > \frac{\hat{J}_k^{(n)}(\tau,l)-\varepsilon}{K_n(\tau)} \right] > 1-\exp\left[-2(n-k)\varepsilon^2\right].$$

Поскольку значение $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, выберем его исходя из условия

$$1-\exp\left[-2(n-k)\varepsilon^2\right] = P,$$

где P — заданная доверительная вероятность, $0 < P < 1$. Тогда

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{-\ln(1-P)}{2(n-k)}}. \qquad (28)$$

Следовательно, имеем

$$Pr\left[J(\tau,l) > \frac{\hat{J}_k^{(n)}(\tau,l)-\varepsilon}{K_n(\tau)} \right] > P,$$

где значение ε определяется формулой (28).

Для нижней доверительной границы показателя $J(\tau,l)$ найдем

$$\underline{J_k^{(n)}(\tau,l)} = \frac{\hat{J}_k^{(n)}(\tau,l)-\varepsilon}{K_n(\tau)}.$$

Умножая обе части полученного равенства на величину l с учетом формул (23) и (25), получим следующую формулу для нижней доверительной границы показателя $r(\tau,l)$:

$$\underline{r_k^{(n)}(\tau,l)} = \frac{\hat{r}_k^{(n)}(\tau,l)-l\varepsilon}{K_n(\tau)}.$$

С учетом формул (18) и (20)

$$\underline{\rho_k^{(n)}(\tau,l)} - \tau = \tilde{r}_k^{(n)}(\tau,l) - \frac{l\varepsilon}{K_n(\tau)}.$$

Откуда, согласно (17), имеем

$$\underline{\rho_k^{(n)}(\tau,l)} = \tilde{\rho}_k^{(n)}(\tau,l) - \frac{l\varepsilon}{K_n(\tau)},$$

где значение ε определяется соотношением (28), что является доказательством формулы (22) и тем самым теоремы 2.

В частности, при $\tau = 0$ из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Для техногенно-опасного объекта, у которого критические отказы могут наблюдаться на интервале времени* $(0, l)$, *нижней доверительной границей средней наработки до критического отказа служит величина*

$$\underline{\rho^{(n)}(0, l)} = \tilde{\rho}^{(n)}(0, l) - l\sqrt{\frac{-\ln(1-P)}{2n}}, \qquad (29)$$

где $\tilde{\rho}^{(n)}(0, l)$ — несмещенная точечная оценка показателя $\rho(0, l)$, определяемая формулой (21); P — заданная доверительная вероятность, $0 < P < 1$.

Например, при отсутствии отказов у девяти однотипных объектов в течение времени испытаний длительностью 300 ч нижняя доверительная граница средней наработки до критического отказа при доверительной вероятности, равной 0,865, согласно формуле (29), равна 200 ч.

Из формул (22) и (29) следует, что нижние доверительные границы средних наработок до критического отказа объекта совпадают с точечными оценками при доверительной вероятности $P = 0$. Другими словами, уровень доверия к точечным оценкам средней наработки до критического отказа крайне низкий. Однако при больших значениях $n \to \infty$ степень доверия к этим оценкам, как это следует из формул (22) и (29), возрастает.

Таким образом, установлена нижняя доверительная граница средней наработки до критического отказа ТОО при заданной доверительной вероятности. Эта граница позволяет по результатам испытаний или подконтрольной эксплуатации определять безопасную длительность эксплуатации ТОО в зависимости от заданной доверительной вероятности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (*проект № 10-08-00607-а*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садыхов Г. С., Некрасова О. В. Непараметрические и предельные оценки длительности безопасного срока эксплуатации техногенно-опасных объектов // Тр. института системного анализа РАН. 2010. Т. 53. Вып. 14. С. 191–198.

2. С а д ы х о в Г. С., А л ш е х а б и С. Оценка длительности безопасной эксплуатации и допустимого числа безопасных срабатываний свыше назначенных уровней для стареющих техногенно-опасных объектов //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 120–126.

3. S a d y k h o v G. S., S a v c h e n k o V. P., G y l y a e v J u . V. Estimation of the Residual Life for Items of Equipment, Based on a Physical Model of Additive Accumulation of Damages // The Smithsonian/NASA Astrophysics Data System, Physics-Doklady, 1995. Vol. 40. P. 397–400.

4. С а д ы х о в Г. С., К у з н е ц о в В. И. Методы и модели оценок безопасности сверхназначенных сроков эксплуатации технических объектов. – М.: Издательство ЛКИ/URSS. 2007.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.