

УДК 537.86: 517.958: 519.6

В.Ф. Апельцин, И.О. Богданов,  
И.А. Волкова**ПРИБЛИЖЕННЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ  
ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ПОЛЯ,  
РАССЕЯННОГО МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ТЕЛОМ,  
НА ОСНОВЕ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО МЕТОДА  
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ТОКОВ**

*Рассмотрена математическая модель стационарной задачи рассеяния плоской E-поляризованной электромагнитной волны на металлическом ограниченном теле в плоском двумерном случае (возбуждение бесконечного цилиндра). Рассеянное поле представлено потенциалом простого слоя с плотностью тока, распределенной на вспомогательном контуре, расположенном внутри границы исходной области и подобном ей (метод вспомогательных токов). Показано, что исходное интегральное уравнение первого рода эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода с параметром регуляризации, задающим степень близости вспомогательного контура к границе. Результат проиллюстрирован расчетом диаграммы направленности поля, рассеянного многолистником.*

**E-mail: vapeltsin@hotmail.com**

**Ключевые слова:** диаграмма направленности, интегральное уравнение, ток, регуляризация, численный метод.

Расчет диаграмм направленности электромагнитных полей, рассеянных металлическими телами, всегда являлся актуальной задачей в приложениях к теории антенн и радарной техники. В настоящее время наибольший интерес представляют обратные задачи рассеяния, когда по диаграмме рассеяния с заданными параметрами ищут форму рассеивающего тела, а иногда и его диэлектрическое покрытие, обеспечивающее эти параметры (уровень боковых лепестков, ширину главного лепестка, и т. д.). Такие задачи обычно ставят как вариационные, подразумевая нахождение минимума некоторого функционала на заданном классе функций. Это обеспечивает возможность многократного и быстрого решения серии прямых задач с меняющимися от шага к шагу параметрами искомого решения. Следовательно, простые и быстродействующие алгоритмы решения прямых задач по-прежнему вполне востребованы.

В рамках настоящей работы приведен метод решения классической плоской задачи рассеяния, требующий минимальных усилий

при создании быстродействующего численного алгоритма и доступный для реализации на любых современных ПК.

Отметим также, что плоские (двумерные) задачи рассеяния, имеющие, на первый взгляд, мало общего с реальной практикой, имеют практическое значение, особенно в высокочастотной области, благодаря принципу Фока [1]. Согласно этому принципу, если длина волны электромагнитного поля намного меньше характерных размеров препятствия, то векторная трехмерная краевая задача для выпуклого тела с точностью до погрешности, пропорциональной некоторой степени отношения длины волны к этому размеру, распадается на две плоские скалярные краевые задачи первого и второго рода. Границы плоских областей совпадают при этом с границами сечений тела в плоскостях главных кривизн.

Математическая постановка рассматриваемой краевой задачи электродинамики формулируется следующим образом. Общая система стационарных уравнений Максвелла (при гармонической зависимости всех векторных полей от времени)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{j},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu \mathbf{H} = 0$$

в случае рассеяния  $E$ -поляризованной плоской волны на бесконечном металлическом цилиндре с направляющей  $\Gamma$  при ее распространении в ортогональном оси цилиндра направлении сводится к скалярной плоской задаче для уравнения Гельмгольца в полярных координатах относительно  $z$ -компоненты  $u(M) = E_z$  электрического поля с краевым условием первого рода на границе контура поперечного сечения цилиндра, т. е. к задаче вида

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

где  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$  — волновое число, если из второго уравнения системы Максвелла выразить величину  $\mathbf{H}$ , подставить в первое уравнение и воспользоваться известным тождеством  $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{E}) - \Delta\mathbf{E}$  с учетом того, что поле  $\mathbf{E}$  имеет отличную от нуля компоненту  $E_z$  [2]. Несмотря на однородность задачи (1), она имеет нетривиальное решение, так как не удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда на бесконечности [3], причем слагаемым является плоская волна  $\exp[-ikr \cos(\phi - \phi_0)]$ , распространяющаяся из бесконечно удаленной точки к началу координат (временная зависимость полей от времени полагается имеющей вид  $\exp(-i\omega t)$ ). Выделяя в решении  $u(r, \phi)$  рассе-

янную волну  $u(r, \phi) = u_s(r, \phi) + \exp[-ikr \cos(\phi - \phi_0)]$ , удовлетворяющую условию излучения, получаем для  $u_s(r, \phi)$  задачу вида

$$\Delta u_s + k^2 u_s = 0, \quad (2)$$

$$u_s|_{\Gamma} = -\exp[ik\rho(\phi - \phi_0)],$$

где  $\Gamma$  — контур поперечного сечения цилиндра, описываемый в полярных координатах уравнением  $r = \rho(\phi)$ ;  $\phi_0$  — угол падения плоской волны.

Рассеянное поле  $u_s$  можно представить, например, потенциалом простого слоя:

$$u_s(M) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}[kR(M, P)] j(P) d\sigma_P, \quad (3)$$

где  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода, нулевого порядка;  $P$  — точки на контуре  $\Gamma$ , а  $M$  — в пространстве, вне контура  $\Gamma$ ;  $R(M, P)$  — декартово расстояние между точками  $M$  и  $P$ ,  $R(M, P) = \{r^2 + \rho^2(\psi) - 2r\rho(\psi)\cos(\phi - \psi)\}^{1/2}$ ;  $j(P)$  — ток, наведенный на контуре  $\Gamma$ . Представление (3) при соблюдении краевого условия задачи (2) приводит к интегральному уравнению Фредгольма первого рода:

$$\frac{i}{4} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}[kR(P, P_1)] j(P_1) d\sigma_{P_1} = \exp[-ik\rho(\phi \cos(\phi - \phi_0))], \quad (4)$$

со слабополярным ядром, имеющим логарифмическую особенность при совпадении точек  $P$  и  $P_1$ , что обеспечивает устойчивость вычислительных процедур его численного приближенного решения. Решение можно также искать в виде потенциала двойного слоя:

$$u_s(M) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_P} H_0^{(1)}[kR(M, P)] \mu(P) d\sigma_P,$$

что приводит к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} \mu(P) = & \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{P_1}} H_0^{(1)}[kR(P, P_1)] \mu(P_1) d\sigma_{P_1} + \\ & + 2 \exp[-ik\rho(\phi) \cos(\phi - \phi_0)], \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (5) также имеет полярное ядро интегрального оператора, интегрируемое с квадратом модуля, и является корректно поставленной задачей. Тем не менее уравнения (4) и (5) имеют свои не-

достатки с точки зрения численной реализации их решений. Численное решение уравнения (5) может оказаться неустойчивым, если частота  $\omega$  окажется близкой к собственной частоте внутренней задачи Неймана для области, ограниченной контуром  $\Gamma$ , согласно теоремам Фредгольма. Полярность ядер обоих уравнений требует аккуратного выделения их особенностей при численной аппроксимации интегральных операторов, что усложняет алгоритм. Поэтому на практике вместо уравнения (4) часто используют уравнение

$$\frac{i}{4} \int_{\Gamma} H_0^{(1)} [kR(P, P_1)] j(P_1) d\sigma_{P_1} = -\exp[-ik\rho(\phi) \cos(\phi - \phi_0)], \quad (6)$$

где контур  $\tilde{\Gamma}$  расположен внутри контура  $\Gamma$  и подобен ему:  $r = \alpha\rho(\phi)$ , причем  $\alpha \leq 1$ , а расстояние между точками  $P$  и  $P_1$   $R(P, P_1) = \{\rho^2(\phi) + \alpha^2\rho^2(\psi) - 2\alpha\rho(\phi)\rho(\psi)\cos(\phi - \psi)\}^{1/2}$ ;  $j(P_1)$  — вспомогательный ток на контуре  $\tilde{\Gamma}$ , имеющий смысл обычного электрического тока на поверхности металла, если контуры  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  совпадают ( $\alpha = 1$ ). Ядро уравнения (6) гладкое аналитическое, так как значение  $R(P, P_1)$  нигде не обращается в нуль. Функция Ханкеля  $H_0^{(1)} = J_0 + iN_0$ , где функции Бесселя  $J_0$  и Неймана  $N_0$  вычислены с помощью стандартных процедур из библиотек наиболее распространенных языков программирования.

Интегральное уравнение первого рода (6) с гладким ядром, хотя формально и является некорректно поставленной задачей, приводит к устойчивым вычислительным процедурам при его замене на систему алгебраических уравнений, если контуры  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  достаточно близки, что обеспечивает в матрице алгебраической системы преобладание главной диагонали.

Более подробная запись интегрального уравнения (6) имеет вид

$$\frac{i}{4} \int_{\Gamma} H_0^{(1)} [kR(\phi, \psi)] \tilde{j}(\psi) d\psi = -\exp[-ik\rho(\phi) \cos(\phi - \phi_0)], \quad (7)$$

где  $\tilde{j}(\psi) d\psi = j(\psi) \alpha \sqrt{\rho^2(\psi) + \dot{\rho}^2(\psi)} d\psi$  — ток, умноженный на дифференциал дуги контура. Если ток  $\tilde{j}(\psi)$  найден из уравнения (7) (точно или приближенно), потенциал простого слоя (3) с контуром  $\tilde{\Gamma}$  вместо  $\Gamma$  явно описывает поведение рассеянного поля всюду вне контура  $\Gamma$ . Нас будет интересовать дальняя зона волнового поля, т. е. значения  $kR(M, P) = k[r^2 + \alpha^2\rho^2(\psi) - 2\alpha r\rho(\psi)\cos(\phi - \psi)]^{1/2}$  при  $kr \gg 1$ . При этом и значения  $kR(M, P) \gg 1$ , что позволяет заме-

нить функцию Ханкеля ее асимптотикой:  $H_0^{(1)}(kR) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \exp[i(kR - \pi/4)]$  [4]. Выражая радикал в выражении  $kr\{1 + \alpha^2 \rho^2(\psi) / r^2 - 2\alpha\rho(\psi)\cos(\phi - \psi) / r\}^{1/2}$  первыми двумя членами биномиального ряда, получаем  $kR(M, P) \approx kr\{1 + \alpha^2 \rho^2(\psi) / 2\rho^2 - \alpha\rho(\psi)\cos(\phi - \psi) / r\} \approx kr - k\alpha\rho(\psi)\cos(\phi - \psi) + O(1/r)$ . При этом  $\sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}$ , следовательно, в дальней зоне рассеянное поле приближенно описывается выражением

$$u_s(M) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \frac{i}{4} \exp(ikr - i\pi/4), \quad 4] \int_0^{2\pi} \exp[-ik\alpha\rho(\psi)\cos(\phi - \psi)] \tilde{j}(\psi) d\psi.$$

Множитель  $\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \frac{i}{4} \exp(ikr - i\pi/4)$  перед интегралом в выражении (3), зависящий только от радиуса  $r$  и ответственный за порядок убывания амплитуды поля равномерно по радиусу  $r$  при удалении от рассеивающего тела, можно не рассматривать. Выражение

$$F(\phi) \int_0^{2\pi} \exp[-ik\alpha\rho(\psi)\cos(\phi - \psi)] \tilde{j}(\psi) d\psi$$

обычно называют функцией ослабления [5]. Она характеризует распределение интенсивности рассеянного поля по угловой координате  $\phi$  для каждого значения полярного радиуса  $r$ . Модуль  $|F(\phi)|$  этой функции носит название диаграммы рассеяния (или диаграммы направленности).

Интегральное уравнение первого рода (7) заменим алгебраической системой линейных уравнений, вводя равномерные сетки:  $\psi_m = \frac{2\pi}{N}(m + 1/2)$ ;  $m = 0, \dots, N-1$ ;  $\phi_n = \frac{2\pi}{N}(n + 1/2)$ ;  $n = 0, \dots, N-1$ . В результате получим алгебраическую систему вида

$$\frac{2\pi}{N} \frac{i}{4} \sum_{m=0}^{N-1} H_0^{(1)}[rR(\phi_n, \psi_m)] \tilde{j}(\psi_m) = -\exp[-ik\alpha\rho(\phi_n)\cos(\phi_n - \phi_0)]. \quad (8)$$

Находя с помощью численного метода приближенное решение  $\{\tilde{j}(\psi_m)\}$  системы (8), получаем выражение для диаграммы рассеяния в виде одномерного массива вида

$$F(\phi_n) = \frac{2\pi}{N} \frac{i}{4} \sum_{m=0}^{N-1} \exp[-ik\alpha\rho(\psi_m)\cos(\phi_n - \psi_m)] \tilde{j}(\psi_m),$$

что позволяет строить графики для диаграммы рассеяния  $|F(\phi_n)|$  при различных значениях параметров  $N, \alpha, \phi_0$ .

Теперь рассмотрим вопрос о корректности задачи, сведенной к интегральному уравнению первого рода (7). Для этого заменим параметр  $\alpha$  на  $1-p, p \geq 0$ . При этом контуру  $\Gamma$  соответствует значение  $p = 0$ . Запишем интегральное уравнение (6) или (7) для любого отличного от нуля значения  $p$ :

$$\frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}[kR_p(\phi, \psi)] \tilde{j}_p(\psi) d\psi = -\exp[-ik\alpha\rho(\phi) \cos(\phi - \phi_0)],$$

и представим ядро  $i/4H_0^{(1)}[kR_p(\phi, \psi)]$  интегрального оператора в виде первых двух слагаемых его разложения в ряд Маклорена по переменной  $p$  в окрестности точки  $p = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{i}{4} H_0^{(1)}[kR_p(\phi, \psi)] &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}[kR_{p=0}(\phi, \psi)] + \\ &+ p \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial p} H_0^{(1)}[kR_{p=0}(\phi, \psi)] + p^2 \frac{i}{4} \frac{\partial^2}{\partial p^2} H_0^{(1)}[kR_{p^*}(\phi, \psi)], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $p^* \in [0, 1[$  — значение переменной  $p$ , отличное от нуля. Из трех слагаемых формулы (9) лишь первые два имеют особенность при совпадении значений углов  $\phi$  и  $\psi$ . Первое — логарифмическую особенность и соответствует ядру обычного потенциала простого слоя. Второе имеет более сильную особенность, аналогичную ядру потенциала двойного слоя. Третье слагаемое, поскольку  $p^* \neq 0$ , является гладким аналитическим ядром без особенностей.

Представим левую часть уравнения (7) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}[kR_{p=0}(\phi, \psi)] \tilde{j}_p(\psi) d\psi + \\ &+ p \lim_{p \rightarrow 0} \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial p} H_0^{(1)}[kR_p(\phi, \psi)] \tilde{j}_p(\psi) d\psi + \\ &+ p^2 \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial p^2} H_0^{(1)}[kR_{p^*}(\phi, \psi)] \tilde{j}_p(\psi) d\psi. \end{aligned} \quad (10)$$

Ядро второго слагаемого

$$\frac{i}{4} k \dot{H}_0^{(1)}[kR_p(\phi, \psi)] \frac{1}{R_p(\phi, \psi)} [(p-1)\rho^2(\psi) + \rho(\phi)\rho(\psi)\cos(\phi-\psi)]$$

при  $p \rightarrow 0$  преобразуется к виду

$$\frac{1}{4} k \dot{H}_0^{(1)}[kR_{p=0}(\phi, \psi)] \frac{\rho(\psi)}{R_{p=0}(\phi, \psi)} [\rho(\phi)\cos(\phi-\psi) - \rho(\psi)],$$

совпадая, с точностью до множителя  $\sqrt{\dot{\rho}^2(\psi) + \rho^2(\psi)}$ , с выражением  $\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} H_0^{(1)}[kR(\rho(\phi), \phi, r, \psi)]|_{r \rightarrow \rho(\psi)}$ , где  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$  — производная по направлению радиус-вектора, т. е.

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow 0} \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial p} H_0^{(1)}[kR_p(\phi, \psi)] \tilde{j}_p(\psi) d\psi = \\ & = - \lim_{p \rightarrow \rho(\phi)} \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} H_0^{(1)}[kR(\rho, \phi, r(\psi), \psi)] \sqrt{\dot{\rho}^2(\psi) + \rho^2(\psi)} \tilde{j}_p(\psi) d\psi. \quad (11) \end{aligned}$$

Интеграл в выражении (11) есть обобщенный потенциал двойного слоя, у которого ядро продифференцировано по направлению, отличному от направления нормали. Из результатов, приведенных в работе [6], следует общая формула для предельного значения такого потенциала, когда точка наблюдения стремится к поверхности:

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow S} \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} H_0^{(1)}[kR(M, P_1)] \mu(P_1) d\sigma_{P_1} = \\ & = \frac{1}{2} \mu(P) \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) + \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{l}} H_0^{(1)}[kR(P, P_1)] \mu(P_1) d\sigma_{P_1}. \end{aligned}$$

Окончательно интегральные операторы в выражении (10) принимают вид

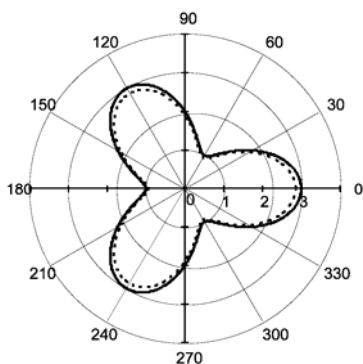
$$\begin{aligned} & \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}[kR_{p=0}(\phi, \psi)] \tilde{j}_p(\psi) d\psi - \frac{1}{2} p \tilde{j}_p(\phi) \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) - \\ & - p \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} H_0^{(1)}[kR(\rho(\phi), \phi, r(\psi), \psi)] \sqrt{\dot{\rho}^2(\psi) + \rho^2(\psi)} \tilde{j}_p(\psi) d\psi + \\ & + p^2 \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial p^2} H_0^{(1)}[kR_p^*(\phi, \psi)] \tilde{j}_p(\psi) d\psi. \end{aligned}$$

Первый и второй операторы имеют слабо полярные ядра и, следовательно, являются вполне непрерывными, а последний является интегральным оператором с гладким ядром без особенностей. Таким образом, интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно  $\tilde{j}_p(\phi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p \tilde{j}_p(\phi) \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) &= \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}[kR_{p=0}(\phi, \psi)] \tilde{j}_p(\psi) d\psi - \\ &- p \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} H_0^{(1)}[kR(\rho(\phi), \phi, r(\psi), \psi)] \sqrt{\dot{\rho}^2(\psi) + \rho^2(\psi)} \tilde{j}_p(\psi) d\psi + \\ &+ p^2 \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial p^2} H_0^{(1)}[kR_{p^*}(\phi, \psi)] \tilde{j}_p(\psi) d\psi + \exp[-ik\rho(\phi) \cos(\phi - \phi_0)] \end{aligned}$$

при  $p > 0$  представляет собой корректно поставленную задачу.

Проиллюстрируем рассмотренный метод результатами численных расчетов диаграмм направленности при рассеянии плоской волны, облучающей цилиндр с уравнением контура  $\Gamma$  в виде  $r = \rho(\phi) = 2 + \cos 3\phi$ . На рис. 1 показана геометрия заданного  $\Gamma$  и вспомогательного контуров  $\tilde{\Gamma}$ . На рис. 2—5 внутренняя кривая  $r(\theta)$  обозначает заданный рассеивающий контур, а остальные — диаграммы рассеяния  $F(\phi)$ , где  $\theta$  и  $\phi$  — полярные углы. Число узлов  $N$  равномерной сетки разбиения интервала  $[0, 2\pi]$  при аппроксимации интегрального оператора равно 300, волновое число  $k = 2$ , параметр подобия  $\alpha = 0,95$  (см. рис. 2, 3). Для сравнения на рис. 4 приведены диаграммы рассеяния, рассчитанные при  $\alpha = 0,98$ , из которого следует нарастание неустойчивости численного метода при уменьшении  $\alpha$  в области боковых лепестков диаграммы. На рис. 5 представлены две диаграммы рассеяния ( $\alpha = 0,95, k = 2, \phi_0 = \pi$ ) при двух различных числах узлов сетки:  $N = 300$  и 50, что дает возможность выбрать оптимальное число узлов сетки.



**Рис 1.** Сопоставление заданного (—) и вспомогательного (---) контуров при  $\alpha = 0,95$



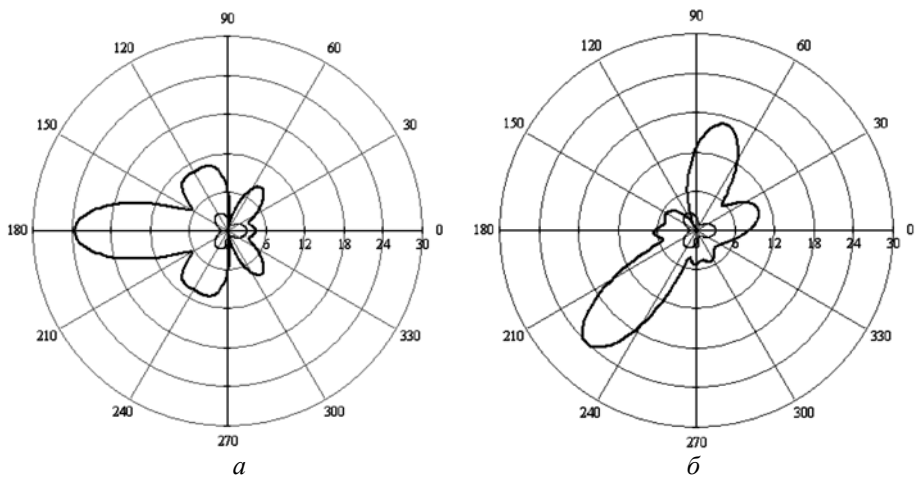


Рис. 2. Диаграммы рассеяния при  $\phi = 0$  (а) и  $\pi/4$  (б). Замкнутые кривые  $r(\theta)$  определяют заданный контур

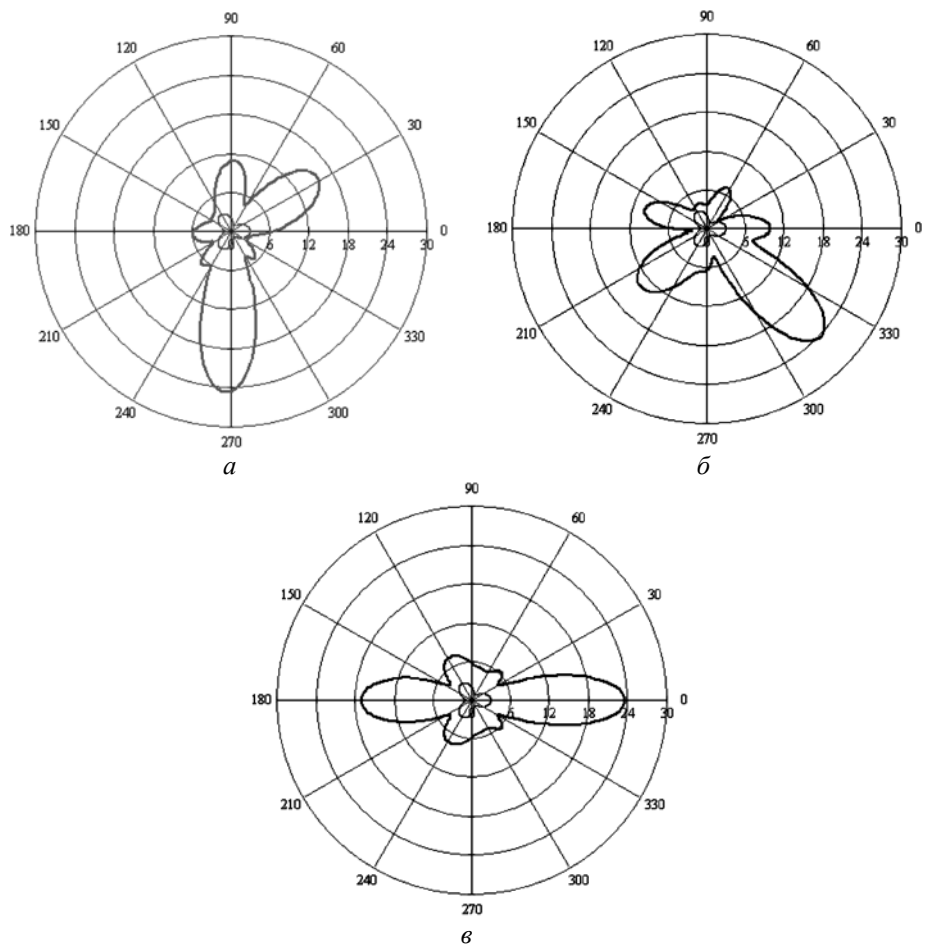


Рис. 3. Диаграммы рассеяния при  $\phi_0 = 0$  (а),  $3\pi/4$  (б),  $\pi$  (в). (Обозначения см. на рис. 2)

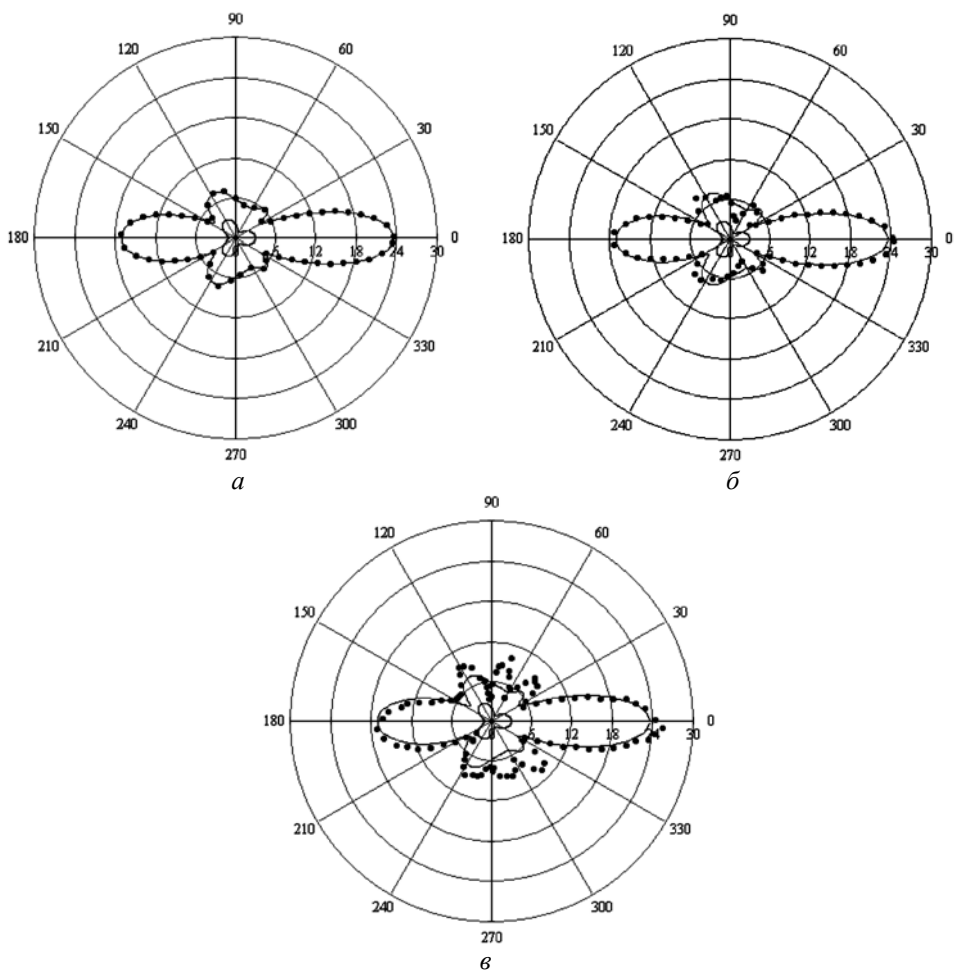


Рис. 4. Диаграммы рассеяния при  $\phi_0 = \pi$  (.....),  $\alpha = 0,5$  (*a*),  $0,4$  (*б*),  $0,3$  (*в*) и  $\alpha = 0,98$  (—)

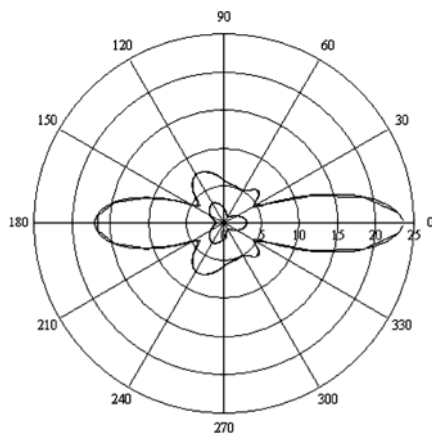


Рис. 5. Диаграммы рассеяния при  $N = 300$  (гладкая кривая),  $50$  (ломаная) и  $\alpha = 0,95$ ,  $\phi_0 = \pi$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
2. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
3. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: Ин. лит., 1950.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
5. Марков Г. Т., Петров Б. М., Грудинская Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Сов. радио, 1979.
6. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: И.Л., 1957.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.