

Влияние коэффициента жесткости газодинамической опоры на работу двухосного поплавкового датчика угловой скорости

Н. Н. Щеглова ¹

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Проанализированы результаты расчета собственных частот трехстепенного поплавкового гироскопа с газодинамической опорой ротора с разомкнутыми и замкнутыми обратными связями при изменении коэффициента жесткости газодинамической опоры и коэффициента усиления контура обратной связи датчика угловой скорости. Установлено, что в случае наличия динамической несбалансированности ротора при определенном значении коэффициента жесткости газодинамической опоры в приборе могут возникнуть резонансные явления.

E-mail: SheglovaNN@yandex.ru

Ключевые слова: *трехстепенный поплавковый гироскоп, газодинамическая опора, динамическая несбалансированность ротора, жесткость газодинамической опоры, критическая жесткость, резонанс.*

Для анализа движения трехстепенного гироскопа с упругими опорами ротора использована известная модель [1] с разомкнутыми обратными связями между датчиками угла и датчиками момента:

$$\begin{aligned}
 I_3 \ddot{\alpha}_p + H \dot{\beta}_p + k_{ж}^y (\alpha_p - \alpha) &= 0; \\
 I_3 \ddot{\beta}_p - H \dot{\alpha}_p + k_{ж}^y (\beta_p - \beta) &= 0; \\
 I_z^{вн} \ddot{\beta} + k_{ж}^y (\beta - \beta_p) &= 0; \\
 (I_y^{вн} + I_y^{нар}) \ddot{\alpha} + k_{ж}^y (\alpha - \alpha_p) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где I_3 — экваториальный момент инерции ротора; $I_z^{вн}$, $I_y^{вн}$, $I_y^{нар}$ — моменты инерции внутренней и наружной рамок карданова подвеса (ось z — ось внутренней рамки гироскопа, ось y — ось наружной рамки гироскопа); α_p , β_p — углы поворота ротора гироскопа относительно осей y_p , z_p соответственно; α , β — углы поворота рамок карданова подвеса относительно осей наружной и внутренней рамок соответственно; $k_{ж}^y$ — коэффициент угловой жесткости газодинамической опоры.

Запишем эти уравнения, учитывая наличие демпфирующей жидкости в гироскопе, динамической несбалансированности ротора, упругих токоподводов и обратных связей по углам α и β :

$$\begin{aligned} I_3 \ddot{\alpha}_p + H \dot{\beta}_p + k_{ж}^y (\alpha_p - \alpha) &= (I_{п} - I_3) \Omega^2 \varepsilon \sin \Omega t; \\ I_3 \ddot{\beta}_p - H \dot{\alpha}_p + k_{ж}^y (\beta_p - \beta) &= -(I_{п} - I_3) \Omega^2 \varepsilon \cos \Omega t; \\ I_z^{вн} \ddot{\beta} + k_{ж}^y (\beta - \beta_p) + D \dot{\beta} + C \beta &= k_2 \alpha; \\ (I_y^{вн} + I_y^{нар}) \ddot{\alpha} + k_{ж}^y (\alpha - \alpha_p) + D \dot{\alpha} + C \alpha &= -k_1 \beta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $I_{п}$ — полярный момент инерции ротора; Ω — угловая скорость собственного вращения ротора гироскопа; ε — эксцентриситет ротора; D — коэффициент демпфирования жидкости гироскопа; C — коэффициент упругой связи токоподводов; k_1, k_2 — коэффициенты обратной связи по углу.

Наличие динамической несбалансированности ротора может привести к такому нежелательному явлению при работе гироскопа, как резонанс, который возникает при воздействии внешних возмущений, вызывающих вынужденные колебания системы, в случае совпадения собственных частот гироскопа с частотой возмущения.

Сравним результаты расчета собственных частот для идеальной абсолютно жесткой модели, модели (1) свободного гироскопа с учетом конечной жесткости газодинамической опоры (ГДО) ротора и полученной модели (2) датчика угловой скорости (ДУС) с учетом жесткости ГДО при динамической несбалансированности ротора гироскопа.

Как показал расчет [2], в случае абсолютно жесткой модели ДУС система имеет две собственные частоты:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} &= -k\beta - D\dot{\alpha} - C\alpha; \\ I_2 \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} &= k\alpha - D\dot{\beta} - C_{тп}\beta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $C_{тп}$ — угловая жесткость токоподводов.

Системе (3) соответствует характеристическое уравнение

$$p^4 + \frac{D(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} p^3 + \frac{H^2 + D^2 + C(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} p^2 + \frac{2Hk + 2DC}{I_1 I_2} p + \frac{k^2 + C^2}{I_1 I_2} = 0. \quad (4)$$

Результаты расчета собственных частот при изменении коэффициента усиления тракта обратной связи представлены в табл. 1.

Первая частота $f_1 = 265,7$ Гц является нутационной частотой гироскопа, которая не зависит от коэффициента усиления контура об-

ратной связи. Очень низкая вторая частота появляется при включении гироскопа в режим ДУС.

Таблица 1

Коэффициент $k_1 \approx k_2 \approx k$	Частота, Гц	
	f_1	F_2
10 000	265,68	0,00678
12 000	265,68	0,01
15 000	265,68	0,0154

Проанализируем модель (1). Характеристическое уравнение системы (1) движения свободного гироскопа с газодинамической опорой ротора имеет вид

$$p^2 \left[p^2 \left(p^2 + \frac{k_{ж}}{I_3} + \frac{k_{ж}}{I_1'} \right) \left(p^2 + \frac{k_{ж}}{I_3} + \frac{k_{ж}}{I_2'} \right) + \frac{H^2}{I_3^2} \left(p^2 + \frac{k_{ж}}{I_1'} \right) \left(p^2 + \frac{k_{ж}}{I_2'} \right) \right] = 0. \quad (5)$$

При подстановке $p = j\omega$ получаем

$$\omega^2 \frac{H^2}{I_3^2} \left[(\omega^2 - A)(\omega^2 - B) - \omega^2 (\omega^2 - C)(\omega^2 - D) \right] = 0, \quad (6)$$

где

$$A = \frac{k_{ж}}{I_1'}; \quad B = \frac{k_{ж}}{I_2'}; \quad C = \frac{k_{ж}}{I_2'} + \frac{k_{ж}}{I_3}; \quad D = \frac{k_{ж}}{I_1'} + \frac{k_{ж}}{I_3}.$$

Расчет [2] показал, что корни уравнения (6) зависят от коэффициента жесткости газодинамической опоры (табл. 2).

Таблица 2

Коэффициент $k_{ж}$, сНсм/рад	ω_1, c^{-1}	$f_1, Гц$	ω_2, c^{-1}	$f_2, Гц$	ω_3, c^{-1}	$f_3, Гц$
300 000	931,0	148,25	1367,07	217,68	3755,9	598,2
500 000	1097,55	173,76	1802,62	287,2	4027,5	641,32
800 000	1241,86	197,75	2328,98	370,856	4410,50	702,309
$1 \cdot 10^6$	1302,75	207,59	2629,84	418,76	4650,83	740,58
$1 \cdot 10^7$	1621,08	258,24	9075,85	1445,2	10837,9	1725,78
$1,5 \cdot 10^7$	1635,59	260,6	11232,6	1788,63	13010,8	2071,78

Согласно данным табл. 2 и рис. 1, собственные частоты свободного гироскопа существенно зависят от коэффициента жесткости газодинамической опоры.

Рассмотрим вынужденные колебания гироскопа с газодинамической опорой, вызываемые динамической несбалансированностью ротора (модель (2)). Методы решения уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе изложены в [1], решение (2) для конкретной конструкции прибора приведено в [2]. При этом частное решение этих уравнений, соответствующее вынужденным колебаниям системы на частоте вращения ротора, определяем в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 \sin(\Omega t + \gamma_0); & \alpha_p &= a_2 \sin(\Omega t + \gamma_0); \\ \beta &= b_1 \cos(\Omega t + \gamma_0); & \beta_p &= b_2 \cos(\Omega t + \gamma_0). \end{aligned} \quad (7)$$

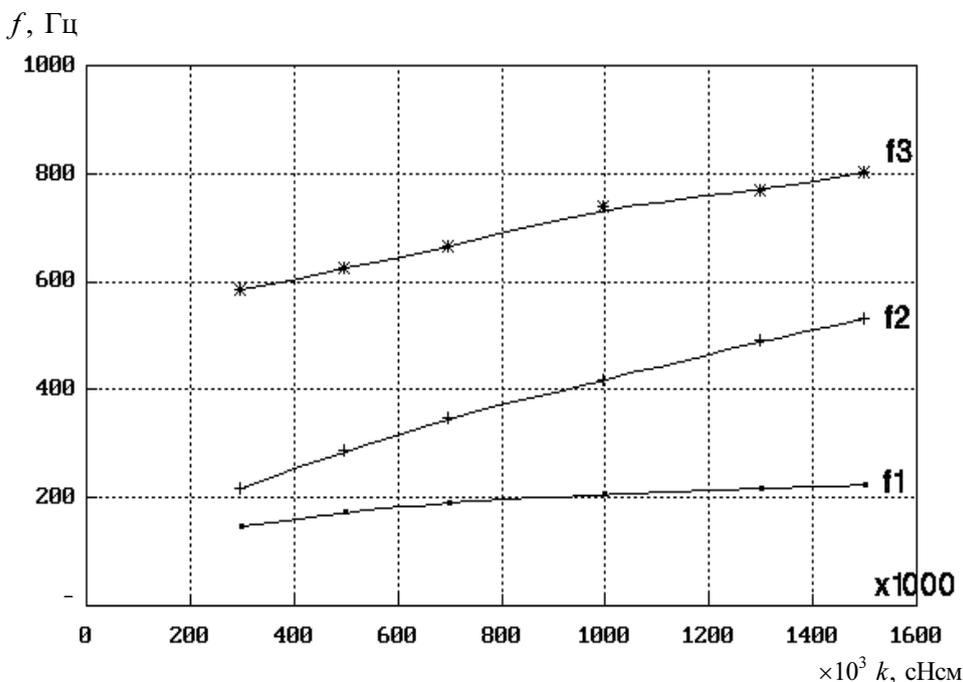


Рис. 1. Зависимость собственных частот свободного гироскопа от коэффициента жесткости ГДО

Подставляя решение (7) в исходную систему уравнений, получаем систему уравнений относительно амплитуд:

$$\begin{aligned} (I_1' \Omega^2 - k_{ж}^y) a_1 + k_{ж}^y a_2 &= 0; \\ (I_2' \Omega^2 - k_{ж}^y) b_1 + k_{ж}^y b_2 &= 0; \\ k_{ж}^y a_1 + (I_3 \Omega^2 - k_{ж}^y) a_2 + H \Omega b_2 &= -(I_{II} - I_3) \Omega^2 \varepsilon; \\ k_{ж}^y b_1 + H \Omega a_2 + (I_3 \Omega^2 - k_{ж}^y) b_2 &= (I_{II} - I_3) \Omega^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Для вычисления амплитуд колебаний записываем соответствующие определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (I_1'\Omega^2 - k_{ж}^y) & 0 & k_{ж}^y & 0 \\ 0 & (I_2'\Omega^2 - k_{ж}^y) & 0 & 0_{ж}^y \\ k_{ж}^y & 0 & (I_3\Omega^2 - k_{ж}^y) & H\Omega \\ 0 & k_{ж}^y & H\Omega & (I_3\Omega^2 - k_{ж}^y) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & k_{ж}^y & 0 \\ 0 & (I_2'\Omega^2 - k_{ж}^y) & 0 & k_{ж}^y \\ (I_{\Pi} - I_3)\Omega^2\varepsilon & 0 & (I_3\Omega^2 - k_{ж}^y) & H\Omega \\ -(I_{\Pi} - I_3)\Omega^2\varepsilon & k_{ж}^y & H\Omega & (I_3\Omega^2 - k_{ж}^y) \end{vmatrix};$$

$$\Delta = I_1'I_2'I_3^2\Omega^2 \times \left[\frac{H^2}{I_3^2} \left(\Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{I_1'} \right) \left(\Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{I_2'} \right) - \Omega^2 \left(\Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{I_1'} - \frac{k_{ж}^y}{I_3} \right) \left(\Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{I_2'} - \frac{k_{ж}^y}{I_3} \right) \right];$$

$$\Delta_1 = -(I_{\Pi} - I_3)\Omega^4\varepsilon I_2'k_{ж}^y \left[(I_{\Pi} + I_3)\Omega^2 - (I_{\Pi} + I_3 + I_2')\frac{k_{ж}^y}{I_2'} \right].$$

Аналогично можно получить

$$\Delta_2 = (I_{\Pi} - I_3)\Omega^4\varepsilon I_1'k_{ж}^y \left[(I_{\Pi} + I_3)\Omega^2 - (I_{\Pi} + I_3 + I_1')\frac{k_{ж}^y}{I_1'} \right];$$

$$\Delta_3 = (I_{\Pi} - I_3) \left(\Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{I_1'} \right) \Omega^4\varepsilon I_1'I_2' \left[(I_{\Pi} + I_3)\Omega^2 - (I_{\Pi} + I_3 + I_2')\frac{k_{ж}^y}{I_2'} \right];$$

$$\Delta_4 = -(I_{\Pi} - I_3) \left(\Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{I_2'} \right) \Omega^4\varepsilon I_1'I_2' \left[(I_{\Pi} + I_3)\Omega^2 - (I_{\Pi} + I_3 + I_1')\frac{k_{ж}^y}{I_1'} \right].$$

Амплитуды вынужденных колебаний системы на частоте вращения ротора при этом можно представить в виде

$$a_1 = -\frac{(I_{\Pi} - I_3)\varepsilon k_{ж}^y}{I_1'} \frac{\Delta_1'}{\Delta'}; \quad a_2 = (I_{\Pi} - I_3) \left(\Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{I_1'} \right) \varepsilon \frac{\Delta_3'}{\Delta'};$$

$$b_1 = \frac{(I_{\Pi} - I_3)\varepsilon k_{ж}^y}{I_2'} \frac{\Delta_2'}{\Delta'}; \quad b_2 = -(I_{\Pi} - I_3) \left(\Omega^2 - \frac{k_{ж}^y}{I_2'} \right) \varepsilon \frac{\Delta_4'}{\Delta'},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta'_1 &= \Delta'_3 = (I_3 + I_{\text{II}})\Omega^2 - (I_3 + I_{\text{II}} + I'_2)B; \\ \Delta'_2 &= \Delta'_4 = (I_3 + I_{\text{II}})\Omega^2 - (I_3 + I_{\text{II}} + I'_1)A; \\ \Delta' &= I_{\text{II}}^2(\Omega^2 - A)(\Omega^2 - B) - I_3^2(\Omega^2 - C)(\Omega^2 - D).\end{aligned}$$

Таким образом, при $\Delta = 0$ амплитуды вынужденных колебаний неограниченно возрастают, т. е. уравнение

$$I_{\text{II}}^2(\Omega^2 - A)(\Omega^2 - B) - I_3^2(\Omega^2 - C)(\Omega^2 - D) = 0 \quad (9)$$

определяет критическую скорость собственного вращения ротора (критическое значение кинетического момента) [1]. При этом

$$\lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{\text{дин}}} a_1 = \lim_{\Omega \rightarrow \Omega_{\text{кр}}} \frac{\Delta'_1}{\Delta'} = \infty.$$

Точное решение уравнения (9) дает значение одного вещественного положительного корня. Например, для коэффициента жесткости газодинамической опоры $k_{\text{ж}}^y = 10^6$ сНсм/рад $\Omega_{\text{кр}1} = 2618,85$ рад/с, что соответствует $H_{\text{кр}1} = 733,3$ сНсмс.

Системе уравнений (2) движения ДУС соответствует характеристическое уравнение

$$a_8 p^8 + a_7 p^7 + a_6 p^6 + a_5 p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0,$$

где

$$a_8 = I'_1 I'_2 I_3^2; \quad a_7 = I_3^2 (I'_2 + I'_1) D;$$

$$a_6 = I'_1 I'_2 H^2 + 2I'_1 I'_2 I_3 k_{\text{ж}}^y + I_3^2 (I'_2 C + I'_1 C + I'_2 k_{\text{ж}}^y + I'_2 k_{\text{ж}}^y + D^2);$$

$$a_5 = H^2 D (I'_2 + I'_1) + 2I_3 D k_{\text{ж}}^y (I'_2 + I'_1) + 2I_3^2 D (C + k_{\text{ж}}^y);$$

$$\begin{aligned}a_4 &= H^2 C (I'_1 + I'_2) + H^2 D^2 + I_3^2 (C^2 + k_1 k_2) + k_{\text{ж}}^y H^2 (I'_1 + I'_2) + \\ &+ 2I_3 C (I'_1 + I'_2) k_{\text{ж}}^y + 2I_3 D^2 k_{\text{ж}}^y + 2I_3^2 k_{\text{ж}}^y C + I'_1 I'_2 (k_{\text{ж}}^y)^2 - \\ &- I_3 I'_2 (k_{\text{ж}}^y)^2 + 2I_3 (I'_1 + I'_2) (k_{\text{ж}}^y)^2 + I_3^2 (k_{\text{ж}}^y)^2;\end{aligned}$$

$$a_3 = 2H^2 DC + 2H^2 D k_{\text{ж}}^y + 4I_3 DC k_{\text{ж}}^y + (I'_1 + I'_2) D (k_{\text{ж}}^y)^2 + 3I_3 D (k_{\text{ж}}^y)^2;$$

$$\begin{aligned}a_2 &= H^2 C^2 + H^2 k_1 k_2 + [2H^2 C + 2I_3 C^2 + 2I_3^2 k_1 k_2] k_{\text{ж}}^y + \\ &+ [H^2 - I_3 C + C(I'_1 + I'_2) + D^2 + 4I_3 C] (k_{\text{ж}}^y)^2 + [(I'_1 + I'_2) - I'_2 + I_3] (k_{\text{ж}}^y)^3;\end{aligned}$$

$$a_1 = H(k_1 + k_2) (k_{\text{ж}}^y)^2 + D (k_{\text{ж}}^y)^3 + 2DC (k_{\text{ж}}^y)^2;$$

$$a_0 = C^2 (k_{\text{ж}}^y)^2 + k_1 k_2 (k_{\text{ж}}^y)^2 + C (k_{\text{ж}}^y)^3 + (k_{\text{ж}}^y)^4.$$

Результаты расчета собственных частот в зависимости от коэффициента усиления контура обратной связи гироскопа приведены в табл. 3 и на рис. 2, 3.

Таблица 3

Коэффициент k , сНсм	f_1 , Гц	f_2 , Гц	f_3 , Гц	f_4 , Гц
8 000	207,55	422,94	718,48	0,027
10 000	207,55	422,94	718,48	0,042
12 000	207,55	422,94	718,48	0,064
14 000	207,55	422,94	718,48	0,0828
16 000	207,55	422,94	718,48	0,1066

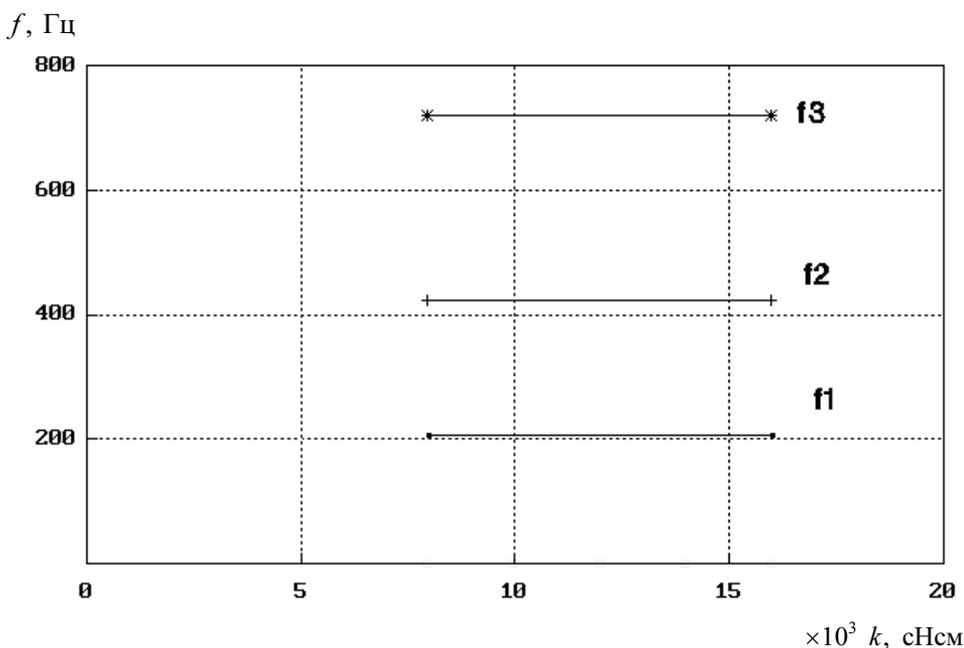


Рис. 2. Зависимость собственных частот ДУС от коэффициента усиления обратной связи

По данным таблицы видно, что от коэффициента усиления зависит только низшая частота, которая растет с увеличением коэффициента усиления.

Зависимость собственных частот гироскопа от коэффициента жесткости газодинамической опоры представлена в табл. 4 и на рис. 4, 5.

Анализ результатов показывает, что свободный гироскоп имеет по три собственные частоты и формы упругих колебаний. Значения соб-

ственных частот существенным образом зависят от коэффициента жесткости газодинамической опоры ротора, причем с увеличением коэффициента жесткости опоры собственные частоты гироскопа растут.

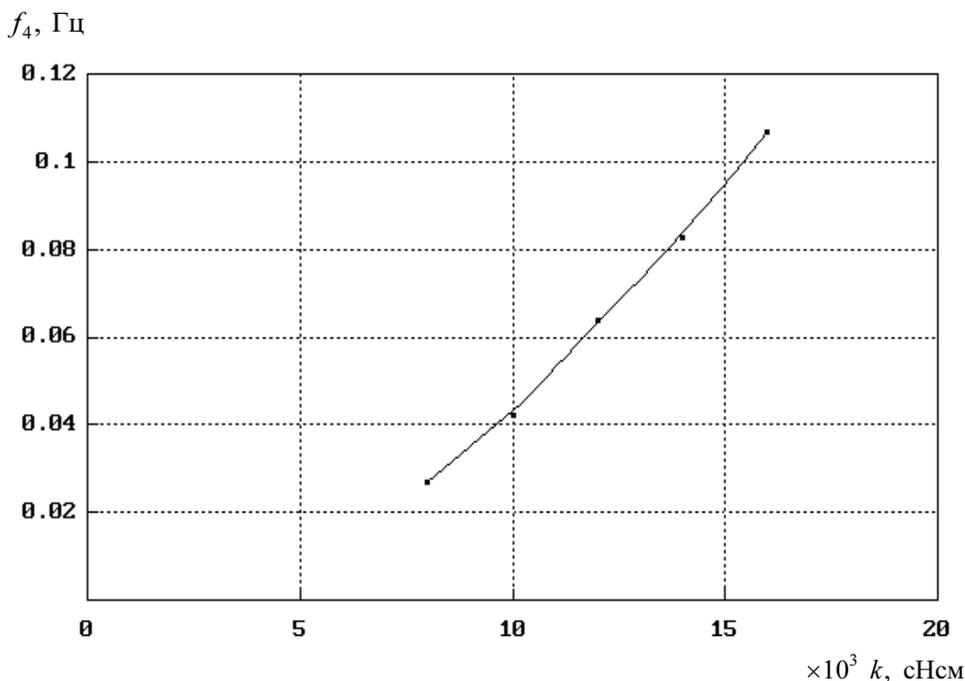


Рис. 3. Зависимость низшей частоты ДУС от коэффициента усиления обратной связи

Таблица 4

Коэффициент $k_{ж}^y$, сНсм	f_1 , Гц	f_2 , Гц	f_3 , Гц	f_4 , Гц
300 000	148,34	218,95	583,68	0,213
500 000	173,77	289,40	625,28	0,146
700 000	191,46	348,18	662,98	0,117
1 000 000	207,687	418,78	740,586	0,0948
$1,3 \cdot 10^6$	218,017	490,178	768,95	0,0828
$1,5 \cdot 10^6$	222,14	530,64	800,875	0,081

Сопоставление критических значений угловых скоростей вращения ротора и соответствующих значений кинетического момента в зависимости от коэффициента жесткости опоры показало, что с увеличением коэффициента жесткости опоры критическое значение угловой скорости вращения ротора растет.

f , Гц

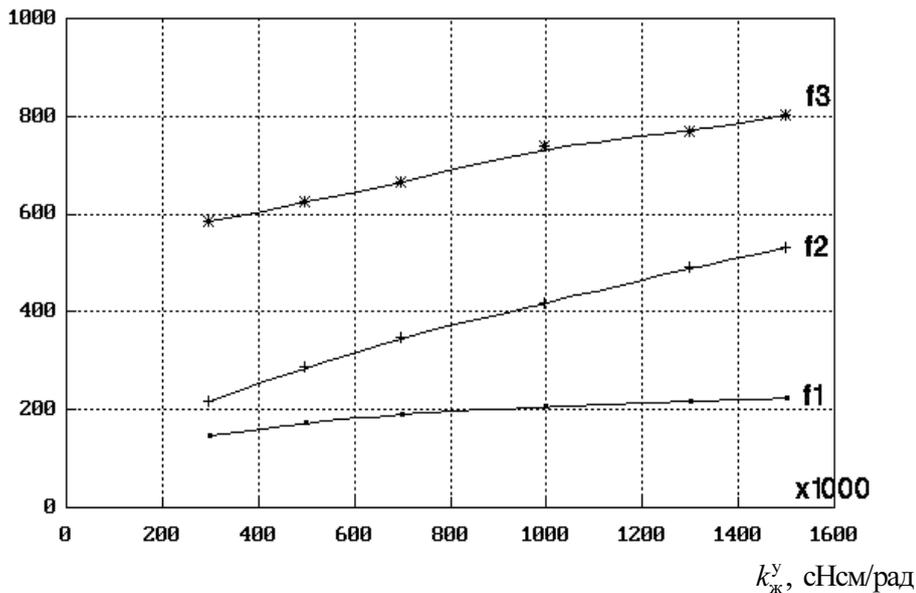


Рис. 4. Зависимость собственных частот ДУС от коэффициента жесткости ГДО

f , Гц

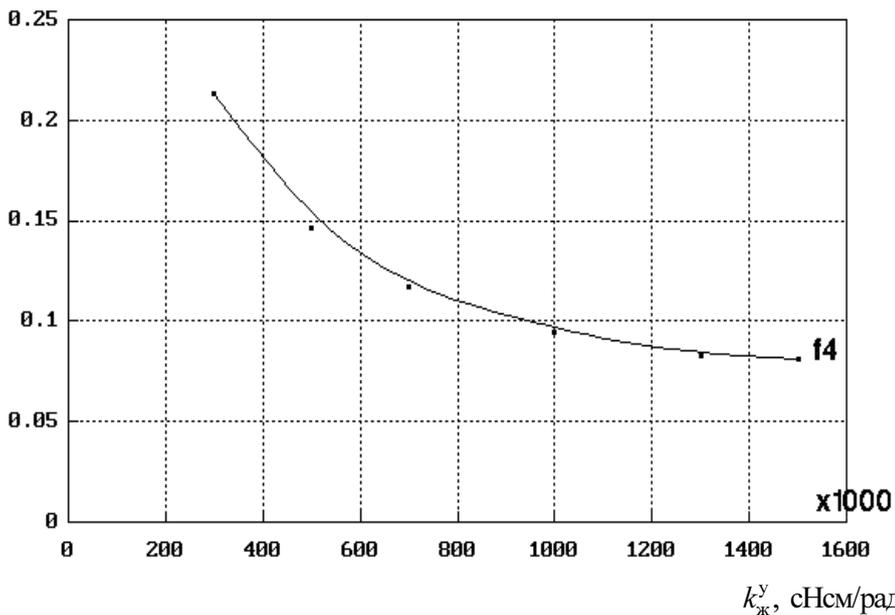


Рис. 5. Зависимость дополнительной низкой частоты ДУС от коэффициента жесткости ГДО

При включении гироскопа в режим ДУС три собственные частоты практически не изменяются, но при этом появляется дополнительная четвертая частота, которая существенно зависит как от коэффициента усиления обратной связи, так и от коэффициента жесткости ГДО. Наличие динамической несбалансированности ротора и упругости его опор может вызвать опасные резонансные явления в приборах, построенных на основе этого гироскопа.

По достижении коэффициентом жесткости ГДО значения $k_{ж}^y \approx 10^6$ сНсм/рад номинальный кинетический момент гироскопа ($H = 700$ сНсм) находится в непосредственной близости от своего критического значения.

Обычно для обеспечения запасов устойчивости и получения требуемого качества переходного процесса при синтезе ДУС используют определенные корректирующие звенья. Газодинамическая опора ротора гироскопа приводит к необходимости проведения анализа устойчивости системы с учетом коэффициента жесткости ГДО. При этом по сравнению с абсолютно жесткой моделью существенным образом может измениться коррекция системы, так как обычно упругие связи приводят к появлению дополнительных пиков на ЛАЧХ системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов Д.М., Харламов С.А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. Щеглова Н.Н. Теоретические и экспериментальные исследования параметров трехстепенного поплавкового гироскопа в спутниковых БИС: дис. ... канд. техн. наук. М., 2004. 155 с.

Статья поступила в редакцию 25.10.2012