

Аналитические методы статики упругих подвесов микромеханических приборов

В.П. Подчезерцев¹

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Представлены некоторые результаты разработки аналитической модели упругого подвеса микромеханического прибора, позволяющей проводить его численные расчеты для любого количества исходных данных, которые определяют его конфигурацию, и практически ментально получать результаты этих расчетов.

E-mail: podch@list.ru

Ключевые слова: микромеханические приборы, упругие подвесы, статика подвесов, аналитические методы.

Развитие инерциальных чувствительных элементов на базе микромеханических приборов и их широкое внедрение в различные области техники требуют от разработчиков постоянного поиска средств расчета — удобных на практике, оперативных, с учетом всех возможных эксплуатационных воздействий. В настоящее время существуют различные системы численного моделирования (ANSYS и др.), помогающие разработчику рассчитывать предложенную им модель с высокой точностью и графическим интерфейсом. Однако использование этих программных средств, во-первых, предполагает высокие затраты вычислительного времени, что ощутимо даже при существующей высокопроизводительной вычислительной технике из-за малого шага дискретизации, необходимой для получения точных результатов. Во-вторых, для анализа возможных вариантов требуется графическое построение всех рассчитываемых объектов и их последующий расчет, что чрезвычайно трудоемко. В-третьих, любое, даже самое незначительное изменение конструкции приводит к изменению сетки разбиения на конечные элементы: из-за погрешностей машинного счета это может вызвать изменения в расчетах, не адекватные изменениям конструкции, и привести к неверным выводам о влиянии этих изменений на рассчитываемые параметры.

Практический интерес представляет аналитическое исследование статики упругих подвесов, что позволило бы направить мощности современных вычислительных машин фактически на подстановку конкретных числовых значений в готовую математическую модель упругого подвеса и мгновенно получить все интересующие разработчика результаты для любого массива исходных данных. Конечно, здесь могут возникать трудности в математическом описании упругого подвеса, но предпосылкой построения такой модели является

простота и ограниченный набор форм отдельных упругих элементов подвеса, а также принципиальная планарность упругого подвеса.

В данной работе представлены некоторые результаты разработки аналитической модели упругого подвеса микромеханического прибора. На рис. 1, 2 показаны варианты подвесов микромеханических приборов и их отдельные упругие элементы.

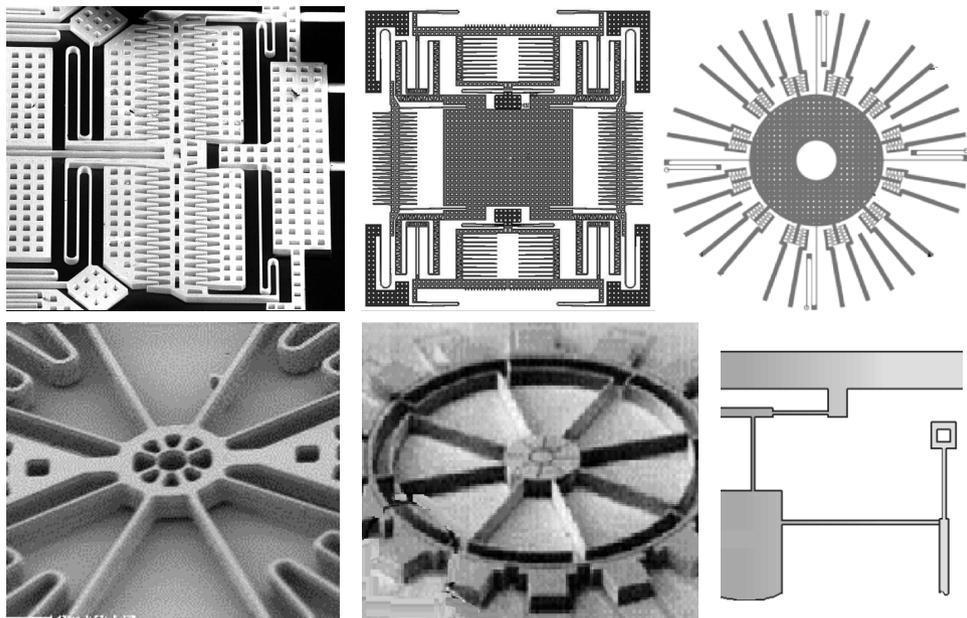


Рис. 1. Варианты упругих подвесов микромеханических чувствительных элементов

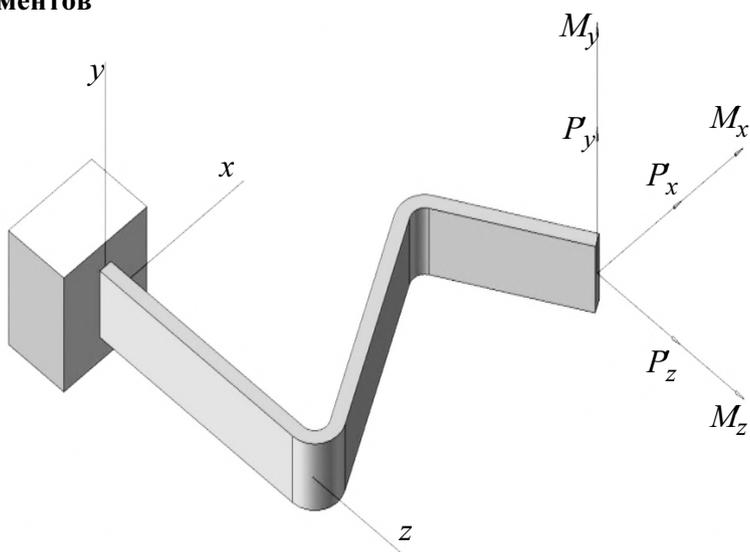


Рис. 2. Упругий элемент подвеса

Пусть упругий элемент подвеса имеет форму, представленную на рис. 2. В конечном сечении подвеса приложим силу \bar{P}' и момент \bar{M}' в системе координат, соответствующей заделке этого элемента. Определим вектор перемещения $\bar{\Delta}'$ и угла поворота $\bar{\theta}'$ конечного сечения упругого элемента под действием указанных силовых факторов [1]. По результатам расчета этого упругого элемента получим взаимосвязь сил и деформаций упругого элемента [2] в локальной (связанной с конкретным упругим элементом) системе координат в виде

$$\begin{cases} \bar{\Delta}' = A\bar{P}' + B\bar{M}'; \\ \bar{\theta}' = C\bar{P}' + D\bar{M}'. \end{cases} \quad (1)$$

Решая систему (1) относительно вектора силы \bar{P} и момента \bar{M} и полагая известными векторы деформаций элемента, получим

$$\begin{cases} \bar{P}' = k_{\Delta}\bar{\Delta}' - k_{\theta}\bar{\theta}'; \\ \bar{M}' = c_{\theta}\bar{\theta}' - c_{\Delta}\bar{\Delta}', \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} k_{\Delta} &= (A - BD^{-1}C)^{-1}; \quad k_{\theta} = k_{\Delta}BD^{-1}; \\ c_{\theta} &= (D - CA^{-1}B)^{-1}; \quad c_{\Delta} = c_{\theta}CA^{-1}. \end{aligned}$$

Зададим, как показано на рис. 3, вектор смещения $\bar{\Delta}$ и поворота $\bar{\theta}$ маятника, закрепленного на подвесе, который состоит из произвольно расположенных упругих элементов (см. рис. 2).

Векторы перемещений $\bar{\Delta}_i$ и углов поворота $\bar{\theta}_i$ конечных сечений всех упругих элементов в системе координат хуз, связанной с маятником, определяются из следующих кинематических соотношений:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_i = \bar{\theta}; \\ \bar{\Delta}_i = \bar{\Delta} + \bar{\theta} \times (\bar{r}_i + \bar{L}_i), \end{cases} \quad (3)$$

где \bar{r}_i — радиус-вектор заделки i -го упругого элемента в системе координат маятника; \bar{L}_i — радиус-вектор конечного сечения i -го упругого элемента в системе координат, связанной с заделкой i -го элемента.

Если обозначить ψ_i угловое положение вектора \bar{r}_i , его модуль через r , угловое положение вектора \bar{L}_i в системе координат i -го элемента через φ , а его модуль через L , то соотношения (3) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_i = \bar{\theta}; \\ \bar{\Delta}_i = \bar{\Delta} + (r + L)\eta(\psi_i + \varphi)\bar{\theta}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{где } \eta(\psi_i + \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\psi_i + \varphi) & 0 \\ -\cos(\psi_i + \varphi) & 0 & \sin(\psi_i + \varphi) \\ 0 & -\sin(\psi_i + \varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

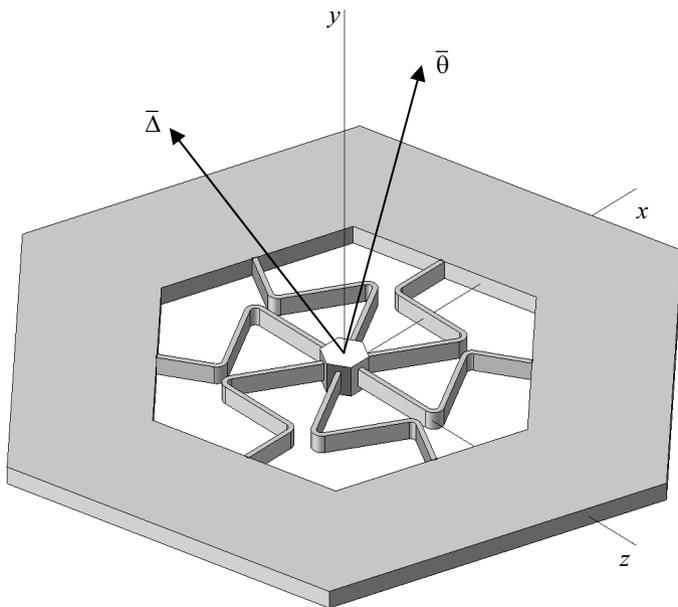


Рис. 3. Маятник в упругом подвесе

Преобразуем деформации (4) из системы координат xuz в систему координат $x_i y_i z_i$ соответствующих элементов:

$$\begin{cases} \bar{\theta}'_i = \vartheta(\psi_i) \bar{\theta}; \\ \bar{\Delta}'_i = \vartheta(\psi_i) \bar{\Delta} + (r + L) \vartheta(\psi_i) \eta(\psi_i + \varphi) \bar{\theta}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{где } \vartheta(\psi_i) = \begin{pmatrix} \cos \psi_i & 0 & -\sin \psi_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_i & 0 & \cos \psi_i \end{pmatrix} \text{ — матрица поворота.}$$

Подставляя в соотношения (2) значения деформаций упругих элементов (5), получаем силовые факторы, воздействующие на все упругие элементы в системах координат соответствующих упругих элементов:

$$\begin{cases} \bar{P}'_i = k_{\Delta} \vartheta(\psi_i) \bar{\Delta} - (k_{\theta} \vartheta(\psi_i) - (r + L) k_{\Delta} \vartheta(\psi_i) \eta(\psi_i + \varphi)) \bar{\theta}; \\ \bar{M}'_i = (c_{\theta} \vartheta(\psi_i) - (r + L) c_{\Delta} \vartheta(\psi_i) \eta(\psi_i + \varphi)) \bar{\theta} - c_{\Delta} \vartheta(\psi_i) \bar{\Delta}. \end{cases} \quad (6)$$

Спроектируем эти силовые факторы в систему xuz , связанную с маятником, тогда

$$\begin{cases} \bar{P}_i = K_{\Delta i} \bar{\Delta} - K_{\theta i} \bar{\theta}; \\ \bar{M}_i = C_{\theta i} \bar{\theta} - C_{\Delta i} \bar{\Delta}, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} K_{\Delta i} &= \mathfrak{G}^T(\psi_i) k_{\Delta} \mathfrak{G}(\psi_i); \quad C_{\theta i} = \mathfrak{G}^T(\psi_i) c_{\Delta} \mathfrak{G}(\psi_i); \\ K_{\theta i} &= \mathfrak{G}^T(\psi_i) (k_{\theta} \mathfrak{G}(\psi_i) - (r + L) k_{\Delta} \mathfrak{G}(\psi_i) \eta(\psi_i + \varphi)); \\ C_{\theta i} &= \mathfrak{G}^T(\psi_i) (c_{\theta} \mathfrak{G}(\psi_i) - (r + L) c_{\Delta} \mathfrak{G}(\psi_i) \eta(\psi_i + \varphi)). \end{aligned}$$

Суммируем силовые факторы по всем упругим элементам и приравняем эту сумму внешним силовым факторам:

$$\begin{cases} \bar{P} = \sum_i \bar{P}_i; \\ \bar{M} = \sum_i \bar{M}_i + \sum_i (\bar{r}_i + \bar{L}_i) \times \bar{P}_i. \end{cases} \quad (8)$$

Окончательно получаем

$$\begin{cases} \bar{P} = K_{\Delta} \bar{\Delta} - K_{\theta} \bar{\theta}; \\ \bar{M} = C_{\theta} \bar{\theta} - C_{\Delta} \bar{\Delta}, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} K_{\Delta} &= \sum_i K_{\Delta i}; \quad K_{\theta} = \sum_i K_{\theta i}; \quad C_{\theta} = \sum_i (C_{\theta i} + (r + L) \eta(\psi_i + \varphi) K_{\theta i}); \\ C_{\Delta} &= \sum_i (C_{\Delta i} + (r + L) \eta(\psi_i + \varphi) K_{\Delta i}). \end{aligned}$$

Выводы.

1. Разработан аналитический аппарат (9) исследования упругих подвесов различных микромеханических чувствительных элементов.

2. Предложенный метод аналитического исследования упругих подвесов и его сравнение с результатами численного моделирования конкретной конструкции с использованием соответствующей программной среды, например ANSYS, позволит выработать более обоснованные инженерные рекомендации при проектировании микромеханических чувствительных элементов.

Данные исследования могут представлять интерес как для инженеров, работающих в этой области, так и для преподавателей и студентов соответствующих специальностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ГИ физ.-мат. лит, 1961. 824 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1984. 823 с.

Статья поступила в редакцию 25.10.2012