УДК 681.5

# Задача идентификации моделей движения центра масс ракет космического назначения и методы ее решения

А.В. Пролетарский [1], А.В. Фомичев [1]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Рассмотрены методы идентификации моделей движения центра масс ракет космического назначения. В целях унификации программно-алгоритмического обеспечения системы управления показано сведение задачи идентификации к проблеме двухточечной краевой задачи.*

**E-mail: pav@bmstu.ru, a.v.fomichev@bmstu.ru**

***Ключевые слова:*** *идентификация, модель движения, ракета космического назначения, двухточечная краевая задача.*

Под идентификацией модели движения центра масс ракет космического назначения (РКН) понимают оценку параметров модели по информации о характере полета РКН и некоторых ее характеристиках, получаемых с помощью бортовых измерительных средств.

Представим систему уравнений движения центра масс РКН в следующем виде [1, 2]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}); \tag{1}$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{r})^{\text{т}}; \quad \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})^{\text{т}}; \tag{2}$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}), \quad \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}, 0)^{\text{т}}, \quad \boldsymbol{\eta} = (\operatorname{grad} U, \boldsymbol{V})^{\text{т}}; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор фазовых координат; $t$ — время; $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости; $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор; $\boldsymbol{c}$ — вектор параметров, характеризующих РКН и условия ее полета; $\boldsymbol{d}$ — вектор параметров потенциала $U$ поля земного тяготения; $\boldsymbol{y}$ — вектор кажущихся ускорений центра масс РКН.

Модель движения центра масс РКН будет полностью определена, если задан составной вектор $\beta$ ее параметров $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ и начальных $\boldsymbol{x}_0$, либо конечных $\boldsymbol{x}_k$ значений фазовых координат. Задача расчета вектора $\beta$ параметров модели движения центра масс РКН относится к разряду задач параметрической идентификации систем.

Задача идентификации модели движения РКН сводится к задаче оценки вектора параметров $\boldsymbol{p}$ модели и вектора $\boldsymbol{x}$ фазового состояния РКН в начальный или конечный момент времени по результатам измерений $\boldsymbol{z}$ — выхода системы (1) — (4), искаженного шумами и различного рода возмущающими факторами, которые действуют на исходную систему. Оценка $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{x}_0$ (либо $\boldsymbol{x}_k$) заключается в отыскании таких значений этих параметров, при которых выход $\boldsymbol{\upsilon}$ модели (1)—(4) наилучшим в некотором смысле образом приближался бы к выходу $\boldsymbol{z}$ реальной системы.

В качестве выхода $\boldsymbol{\upsilon}$ системы (1)—(4) может быть использован либо вектор $\boldsymbol{y}$ кажущихся ускорений, либо вектор $\boldsymbol{x}$ фазовых координат, либо оба эти вектора. В случае $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{y}$ идентификацию системы (1)—(4) осуществляют по измерениям вектора кажущихся ускорений, в случае $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{x}$ — по результатам решения навигационной задачи. При этом задачу навигации можно рассматривать как частный случай идентификации системы (1) при $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{y}$ и заданном значении параметров системы.

Для оценки массоэнергетических характеристик РКН наряду с информацией о векторе кажущихся ускорений, получаемой с соответствующих измерителей (в частности, с акселерометров), также используют информацию о количестве топлива, поступающую с датчиков системы управления расходом топлива, и информацию о давлении в камерах сгорания. В этом случае уравнение (1) дополняется соответствующими уравнениями связи:

$$\vartheta = \vartheta(t, \boldsymbol{c}); \quad \boldsymbol{p}_{\text{к.с}} = (t, \boldsymbol{c}), \tag{5}$$

где $\vartheta$ — измеренное количество топлива в баках; $\boldsymbol{p}_{\text{к.с}}$ — измеренное значение давления в камере сгорания.

С помощью датчиков системы управления расходом топлива измеряют либо расходы топлива из баков, либо объемы компонентов топлива в баках. Информация о давлении в камере сгорания может быть связана с расходом топлива с помощью дроссельной характеристики двигательной установки.

Пусть критерий ошибки приближения выхода модели к выходу реальной системы характеризуется следующим функционалом:

$$I = \int_{t_0}^{t} H(\boldsymbol{\upsilon}, \boldsymbol{z})dt, \tag{6}$$

где $H$ — скалярная положительно-определенная мера ошибки.

Задача идентификации модели движения центра масс РКН [3] заключается в определении векторов $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{x}_0$, либо $\boldsymbol{x}_k$, которые минимизируют функционал (6) при условиях (1)—(4), т. е. в решении системы дифференциальных и функциональных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}); \tag{7}$$

$$J = \min_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}_0} I(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}_0). \tag{8}$$

Если в уравнении (7) не учитываются аэродинамические члены, то уравнение (4) принимает вид

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{c}). \tag{9}$$

В этом случае при $\upsilon = \boldsymbol{y}$ для вычисления вектора $\boldsymbol{c}$ достаточно рассматривать уравнение (9), т. е. вектор $\boldsymbol{c}$ будет определяться уравнениями

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{c}); \;\; J = \min_{\boldsymbol{c}} I(\boldsymbol{c}). \tag{10}$$

Если вектор $\boldsymbol{c}$ характеристик РКН известен или найден в результате решения задач (7) и (8), то при $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{x}$ для определения вектора $\boldsymbol{d}$ параметров потенциала поля тяготения и вектора $\boldsymbol{x}_0$ фазового положения РКН может быть использована следующая система уравнений:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}); \quad J = \min_{\boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}_0} I(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}_0), \tag{11}$$

в которой вектор $\boldsymbol{Y}$ считается известным либо на основании измерений, либо на основании вычислений по формуле (4). В случае заданного значения вектора параметров $\boldsymbol{d}$ приходим к задаче оценки $\boldsymbol{x}_0$ фазового состояния РКН в момент времени $t_0$:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{x}); \quad J = \min_{\boldsymbol{x}_0} I(\boldsymbol{x}_0). \tag{12}$$

Если вектор $\boldsymbol{Y}$ считается известным в результате измерений, то при $\upsilon = \boldsymbol{y}$ задача определения вектора фазового положения центра масс РКН сводится к задаче интегрирования уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{x}), \tag{13}$$

которая представляет собой задачу навигации РКН. Интегрирование уравнения (13) на упрежденном отрезке времени при известном законе изменения вектора $\boldsymbol{Y}$ представляет собой задачу прогнозирования фазового положения центра масс РКН.

Таким образом, можем сформулировать следующие типы задач по определению параметров моделей движения центра масс РКН [3].

1. Идентификация динамической системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}); \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \tag{14}$$

по информации о векторе $\boldsymbol{x}$ или о векторе $\boldsymbol{y}$, или о векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. При этом информация о векторе $\boldsymbol{x}$ может быть получена в результате решения задачи навигации, а о векторе $\boldsymbol{y}$ — в результате измерения вектора кажущегося ускорения. В случае использования лишь информации о векторе $\boldsymbol{x}$ уравнение (14) эквивалентно системе уравнений

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{d}); \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{V}. \tag{15}$$

Если используется информация о векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то можно ввести в рассмотрение расширенный вектор $\xi$ и соответствующее векторное уравнение

$$\dot{\xi} = \boldsymbol{F}(t, \xi, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}), \tag{16}$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}}\left[\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{d})\right] \end{pmatrix}. \tag{17}$$

В этом случае задача формально сведена к типу задачи идентификации системы (15) по информации о векторе $\boldsymbol{x}$.

2. Идентификация динамической системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}); \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{y} = \phi(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \tag{18}$$

по информации о векторе $\boldsymbol{x}$ или о векторе $\boldsymbol{y}$, или о векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

При использовании информации лишь о векторе $\boldsymbol{x}$ уравнение (18) эквивалентно системе уравнений

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \phi(t, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}); \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{V}. \tag{19}$$

По аналогии с предыдущим случаем задача идентификации модели (18) по информации о векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ может быть сведена к типу задачи идентификации системы (19) по информации о векторе $\boldsymbol{x}$.

3. Идентификация статической модели

$$\boldsymbol{y} = \phi(t, \boldsymbol{c}) \tag{20}$$

по информации о векторе $\boldsymbol{y}$.

4. Идентификация динамической системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}); \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

по информации о векторе $\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{y}$ — заданная вектор-функция.

При этом вектор $\boldsymbol{y}$ определяется либо в результате измерений кажущихся ускорений, либо с помощью функции (20) при известном векторе параметров $\boldsymbol{c}$.

5. Определение значения вектора $\boldsymbol{x}$ в результате интегрирования уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}); \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{y}$ — заданная вектор-функция, определяемая либо в результате измерения вектора кажущихся ускорений (при решении задачи навигации РКН), либо с помощью заданных аналитических зависимостей (при решении задачи прогноза фазового состояния РКН).

В условиях высокой точности измерения параметров движения РКН и влияния стабильных по характеру изменения возмущений и погрешностей измерения от алгоритма идентификации требуется лишь выполнение роли алгоритма аппроксимации реального движения центра масс РКН некоторой его моделью и отсутствует необходимость одновременного выполнения роли фильтра. В связи с этим ограничимся рассмотрением лишь детерминированных моделей движения центра масс РКН.

Основными составляющими правых частей уравнений движения центра масс на участке выведения космического аппарата (КА) являются тяга двигателей и гравитационное ускорение [1]. При этом потери скорости на преодоление сопротивления воздуха и за счет донного сопротивления двигателей составляют порядка 10…15 % от скорости на выходе из плотных слоев атмосферы (примерно на высоте 100 км). В связи с этим в аппроксимирующей модели реального движения РКН можно не учитывать влияние атмосферы на движение его центра масс и для идентификации параметров модели достаточно использовать системы (20) и (21).

При идентификации моделей движения РКН будет полезна обширная априорная информация, полученная на этапах создания и отработки РКН [4]. В частности, известно, что пределы разброса массоэнергетических и аэродинамических характеристик РКН не превосходят соответственно 1…3 % и 10…15 % от их номинальных значений. Поэтому для уточнения такого рода характеристик применимы линейные аппроксимации рассмотренных выше динамических и статических систем.

В качестве меры ошибки аппроксимации вектор-функции $\boldsymbol{z}(t)$ измерений кривой $\upsilon(t)$ можно выбрать квадратичную форму

$$H(\upsilon, \boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}(\upsilon - \boldsymbol{z})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}(\upsilon - \boldsymbol{z}), \tag{23}$$

где $\boldsymbol{R}$ — матрица весовых коэффициентов.

В принципе мерой ошибки $(\upsilon - \boldsymbol{z})$ может служить также норма $\|\upsilon - \boldsymbol{z}\|$ вектора $(\upsilon - \boldsymbol{z})$, либо скалярное произведение $(\upsilon - \boldsymbol{z}, \upsilon - \boldsymbol{z})$. Если квадрат нормы и скалярное произведение определены через сумму квадратов компонент вектора, то мера ошибки эквивалентна записи (23) при $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}$.

Для решения сформулированных задач идентификации детерминированных моделей движения центра масс РКН могут быть использованы разнообразные методы поиска минимума функции (6) как аналитические, так и численные [5, 6]. Аналитические методы базируются на теории оптимального управления системами и, как правило, сводят задачу идентификации к проблеме двухточечной краевой задачи. Численные методы базируются на теории нелинейного программирования и зачастую сводятся к различного рода градиентным процедурам.

**Переход к двухточечной краевой задаче**. Если правые части динамической системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}); \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{24}$$

модели наблюдения

$$\boldsymbol{y} = \phi(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \tag{25}$$

и подынтегральная функция функционала

$$I = \int_{t_0}^{t} H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})dt \tag{26}$$

являются гладкими функциями своих переменных, а система (24) — (25) идентифицируема, то задачу минимизации функционала (26) при условии (24) с помощью коэффициентов Лагранжа можно свести к задаче на безусловный экстремум функционала

$$I = \int_{t_0}^{t} \left\{ H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + \lambda^{\mathrm{T}} \left[ \dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \right] \right\} dt, \tag{27}$$

где $\lambda$ — вектор множителей Лагранжа.

Интегрируя (27) по частям и приравнивая первую вариацию функционала нулю, с учетом явной зависимости вектора $\boldsymbol{x}$ от вектора $\boldsymbol{c}$ и вектора начальных состояний $\boldsymbol{x}_0$ получим следующие соотношения для оптимальных значений искомых параметров $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{x}_0$:

$$\int_{t_0}^{t} \left( \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{c}} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{c}} \right) dt = 0; \tag{28}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\left( \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} - \left( \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^{\mathrm{T}}; \quad \boldsymbol{\lambda}(t_0) = 0; \quad \boldsymbol{\lambda}(t_k) = 0. \tag{29}$$

Таким образом, задача идентификации системы (24) адекватна двухточечной краевой задаче для систем уравнений (24) и (29) при интегральных связях (28) и нулевых значениях переменной $\lambda$ на концах. Для определения вектора $\boldsymbol{c}$ размерности $m$, вектора $\boldsymbol{x}_0$ размерности $n$ и вектор-функции $\lambda$ размерности $n$ получено $2n + m$ соотношений (24), (28), (29) и $2n$ краевых условий ($\lambda_0 = 0$), ($\lambda_k = 0$). Интегральные связи (28) при условиях на концах $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_k = 0$ могут быть заменены эквивалентными дифференциальными связями

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \left( \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{c}} \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} + \left( \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{c}} \right)^{\mathrm{T}}. \tag{30}$$

Если не использовать множители Лагранжа, то оптимальные значения векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{x}_0$ определяются из условия равенства нулю вариации функционала (26), т. е. из соотношения

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{y}} \left( \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \beta} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \beta} \right) dt = 0 \tag{31}$$

при $\beta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \ldots \\ \boldsymbol{x}_0 \end{pmatrix}$ и условиях (24) и (25).

Производные $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \beta}$ могут быть вычислены с помощью уравнений чувствительности

$$\frac{d}{dt}\left( \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \beta} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \beta} \tag{32}$$

при $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{c}} \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ и условиях $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{c}}\right/_{t=t_0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}_0}\right/_{t=t_0} = \boldsymbol{E}.$

Интегральное уравнение (31) заменяем эквивалентным дифференциальным уравнением

$$\dot{\omega} = \left[ \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{y}} \left( \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \beta} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \beta} \right) \right]^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

при условиях на концах $\omega(t_0) = 0,\ \omega(t_k) = 0.$

Для определения вектора $\boldsymbol{p}$ размерностью $n + m$ имеется всего $2n + m + n(n + m)$ соотношений. При этом на каждом шаге итерации приходится интегрировать на $n(n + m)$ уравнений больше, чем в методе, использующем множители Лагранжа.

Условия стационарности (24), (29) и (30) можно также получить, если ввести в рассмотрение векторное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{p} \equiv 0 \tag{34}$$

и использовать методы теории оптимального управления систем [4].

Если начальные условия $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ заданы, то для уравнения (29) левый конец является свободным и двухточечная краевая задача для систем (24), (29) и (30) решается при условиях $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $\lambda(t_k) = 0,\ \gamma(t_0) = 0,\ \gamma(t_k) = 0.$

Рассмотрим возможности решения краевой задачи для уравнений (24), (29) и (30), которые запишем в следующем каноническом виде:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{\psi}}; \tag{35}$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \boldsymbol{\chi}}; \quad \boldsymbol{\psi}(t_0) = 0; \quad \boldsymbol{\psi}(t_k) = 0, \tag{36}$$

где Η — гамильтониан; $\chi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}; \quad \psi = \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix},$

$$\mathrm{H} = H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + \lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) + \gamma^{\mathrm{T}} \boldsymbol{p}. \tag{37}$$

Для наиболее важных для практики линейных систем

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}; \tag{38}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \tag{39}$$

и квадратичной меры ошибки приближения

$$H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \tag{40}$$

уравнения (29) и (30) принимают вид

$$\dot{\lambda} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\lambda + \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}); \quad \lambda(t_0) = 0, \quad \lambda(t_k) = 0, \tag{41}$$

$$\dot{\gamma} = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\lambda; \quad \gamma(t_0) = 0; \quad \gamma(t_k) = 0, \tag{42}$$

где $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ — матрицы.

Решение краевой задачи (24), (29) и (30) либо (38)—(42) заключается в отыскании таких параметров $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{x}_0$, которые обращают в нуль невязки $\lambda(t, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}_0)$ и $\gamma(t, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}_0)$ в момент $t = t_k$.

Анализ методов решения двухточечных краевых задач достаточно подробно проведен в ряде работ. В целом рассмотренные методы решения краевых задач являются достаточно общими, практически в них не учитывается специфика идентифицируемой системы. Линейные системы обладают характерными особенностями, вытекающими из существования фундаментальных решений, сопряженных переменных и свойств скалярных произведений фазовых и сопряженных переменных, которые можно использовать при разработке методов идентификации этих систем.

В частности, при идентификации линейных систем методом сопряженных уравнений двухточечная краевая задача для уравнений

(38), (41) и (42) может быть сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$(\psi_x, \boldsymbol{x})_{t_0,i} + \left\{ \int_{t_0}^{t} \Big[ (\psi_\lambda, \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{b}) + (\psi_x, \boldsymbol{B}) \Big] dt \right\}_i \boldsymbol{c} - \int_{t_0}^{t} (\psi_\lambda, \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{z})_i \, dt = 0, \quad (43)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n + m,$$

где $\psi_\lambda, \psi_x, \psi_\gamma$ — переменные, определяемые соответственно уравнениями

$$\dot{\psi}_\lambda = \boldsymbol{A} \psi_\lambda + \boldsymbol{B} \psi_\gamma; \quad (44)$$

$$\dot{\psi}_x = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \psi_x - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{a} \psi_\gamma; \quad (45)$$

$$\dot{\psi}_\gamma = 0. \quad (46)$$

Уравнения (44) и (45) проинтегрируем в обратном времени при начальных условиях $\psi_x(t_k) = 0$ и

$$\begin{pmatrix} \psi_\lambda & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \psi_\gamma \end{pmatrix}_{t=t_k} = \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где $\psi$ — матрица фундаментальных решений, а интегралы в соотношении (43) определяем с помощью уравнений

$$\dot{\upsilon} = (\psi_\lambda, \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{b}) + (\psi_x, \boldsymbol{B}); \quad (48)$$

$$\dot{\beta} = (\psi_\lambda, \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{z}), \quad (49)$$

интегрируемых при нулевых начальных условиях.

Если известна матрица фундаментальных решений $\boldsymbol{X}(t, t_0)$ уравнения (38), то с учетом того, что матрица фундаментальных решений уравнения (41) $\Lambda = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{-1}$, а граничные значения переменных $\lambda$ и $\gamma$ равны нулю, уравнения для определения параметров $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{c}$ примут вид

$$\begin{gathered} \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{-1} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} a^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{a} \boldsymbol{X} d\tau \right\} \boldsymbol{x}_0 + \\ + \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{-1} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{a} \int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{X} \boldsymbol{X}^{-1} \boldsymbol{B} d\xi d\tau \right\} \boldsymbol{c} - \int_{t_0}^{t_k} (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{-1} \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{z} d\tau = 0; \end{gathered} \quad (50)$$

$$\left\{\int_{t_0}^{t_k}(t_k-\tau)(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{RaX}d\tau\right\}\boldsymbol{x}_0+$$

$$+\left\{\int_{t_0}^{t_k}(t_k-\tau)(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ra}\int_{t_0}^{\tau}\boldsymbol{XX}^{-1}\boldsymbol{B}d\xi d\tau\right\}c- \tag{51}$$

$$-\int_{t_0}^{t_k}(t_k-\tau)(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Rz}d\tau=0.$$

Следует отметить, что общее решение уравнения (38) имеет вид

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{X}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{X}(t,\tau)\boldsymbol{X}^{-1}(\tau,t_0)\boldsymbol{B}d\tau, \tag{52}$$

для которого можно записать эквивалентное уравнение типа уравнения Вольтерра для фундаментальной матрицы, ограничившись рассмотрением лишь первого приближения:

$$\boldsymbol{X}(t,t_0)=\left[\boldsymbol{E}-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{X}_0(t,\tau)\boldsymbol{X}_0^{-1}(\tau,t_0)\boldsymbol{B}d\tau\right]\boldsymbol{X}_0(t,t_0), \tag{53}$$

где $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица;

$$\boldsymbol{X}_0(t,t_0)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)d\tau\right). \tag{54}$$

При достаточно малом интервале $[t,t_0]$

$$\boldsymbol{X}_0(t,t_0)\approx\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}(t-t_0)+\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2(t-t_0)^2+\ldots \tag{55}$$

Для случая линейной стационарной системы $y=bc$ и квадратичной меры приближения (40) используем условие

$$\int_{t_0}^{t_k}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})dt=0,$$

откуда с учетом $y=bc$ получаем

$$\boldsymbol{c}=\left(\int_{t_0}^{t_k}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Rb}dt\right)^{-1}\int_{t_0}^{t_k}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Rz}dt. \tag{56}$$

Для решения уравнения (56) либо краевой задачи для уравнений (24), (29) и (30) могут быть использованы разнообразные численные методы.

Таким образом, задача идентификации сведена к двухточечной краевой задаче, что позволяет унифицировать программно-алгоритмическое обеспечение интеллектуализированной системы управления при формировании базы знаний.

**Численные методы решения задач идентификации.** Численные методы решения задач идентификации базируются на численных методах поиска минимума критерия (26), из которых наиболее известны методы дифференциальной аппроксимации, градиентные методы, процедура Гаусса — Ньютона, методы Ньютона, использующие кривизну критерия ошибки и др. Анализ указанных методов показывает, что по быстроте сходимости они могут быть проранжированы в следующем порядке: метод наискорейшего спуска; метод сопряженных градиентов; процедура Гаусса — Ньютона; методы Ньютона, использующие кривизну критерия ошибки идентификации. Объем вычислений, связанный с применением этих методов, в значительной мере зависит от методов вычисления элементов градиента и матрицы кривизны критерия ошибки. Использование сопряженных переменных, по-видимому, позволит значительно уменьшить объем вычислений при определении градиента критерия ошибки и матрицы ее кривизны.

Проведем сравнение численных процедур двух принципиально различных подходов к решению задачи идентификации параметров динамической системы:

– с использованием необходимых условий существования минимума критерия ошибки $I$ и итеративной процедуры Ньютона — Рафсона решения краевой задачи;

– с использованием метода наискорейшего спуска для определения минимума критерия ошибки $I$.

Процедура Ньютона — Рафсона имеет вид

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \rho_k \boldsymbol{A}_k^{-1} \psi_k, \tag{57}$$

где $\beta = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}_0)^{\text{т}}$, $\psi = (\lambda, \gamma)^{\text{т}}$ — векторы идентифицируемых и вспомогательных параметров соответственно; $\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial \psi}{\partial \beta}$ — якобиан, элементы которого определяются с помощью уравнений чувствительности; $\rho$ — параметр, обеспечивающий наиболее быструю сходимость итерационного процесса (57).

Процедуру метода наискорейшего спуска представим в следующем виде:

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \rho_k \boldsymbol{g}_k, \tag{58}$$

где $\boldsymbol{g} = \dfrac{\partial I}{\partial \beta}$ — градиент ошибки $I$.

В первом случае на каждой итерации уточнения вектора параметров $\beta$ необходимо интегрировать $2n + m$ уравнений для вычисления векторов $\boldsymbol{x}$, $\lambda$, $\gamma$ и $(n + m)(2n + m)$ уравнений чувствительности для определения якобиана $\boldsymbol{A}$, т. е. всего $(2n + m)(n + m + 1)$ уравнений. Кроме того, требуется обращать матрицу размерностью $(n+m)\times(n+m)$. Во втором случае на каждой итерации для определения градиента функции с помощью сопряженных переменных достаточно интегрировать всего $n(n + 1)$ уравнений, т. е. на $n[(2n + 3m) + 1] + (m + 1)m$ уравнений меньше, чем в первом случае. Однако объем вычислений в первом случае может быть значительно уменьшен, если уравнения (24) интегрировать в «прямом» времени от $t_0$ до $t_k$, а уравнения (29) и (30) — в «обратном» времени от $t_k$ до $t_0$. В этом случае $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ и $\psi_k = \psi_k(t_0)$, т. е. процедура (57) принимает вид

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \rho_k \psi_k(t_0). \tag{59}$$

При использовании процедуры (59) требуется интегрировать всего $2n + m$ уравнений. Отпадает необходимость в интегрировании уравнений чувствительности и обращении матрицы.

Неудобством интегрирования уравнений (24) в «прямом» времени и уравнений (29) и (30) в «обратном» времени является потребность в запоминании траектории уравнений (24). Однако эта необходимость отпадает, если в «обратном» времени интегрировать также и уравнения (24) при начальных условиях, полученных при интегрировании в «прямом» времени. В этом случае придется интегрировать $3n + m$ уравнений.

Таким образом, численные методы решения задачи идентификации, основанные на использовании процедуры (57) для решения краевой задачи и метода наискорейшего спуска для минимизации заданного функционала, являются примерно равноценными. Целесообразность применения того или иного метода может быть установлена лишь при решении задачи идентификации конкретной модели движения центра масс ЛА. Для линейных систем рекомендуется использовать метод идентификации на основе сопряженных уравнений либо фундаментальной матрицы решений, если она известна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987. 440 с.
2. Пролетарский А.В. Управление полетом ракет космического назначения. М.: Изд-во МГОУ, 2006. 140 с.

3. Пролетарский А.В., Неусыпин К.А., Цибизова Т.Ю. Системы управления летательными аппаратами и алгоритмы обработки информации. М.: Изд-во МГОУ, 2006. 220 с.
4. Пролетарский А.В. Интеллектуализированная система управления перспективными ракетами космического назначения // Автоматизация и современные технологии. 2011. № 6. С. 30–33.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.

Статья поступила в редакцию 25.10.2012