

А. Ю. Буш у е в, В. Н. Т и м о ф е е в

ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНОГО ТЕПЛОЗАЩИТНОГО ПОКРЫТИЯ

Построена итерационная схема для определения толщин слоев многослойного теплозащитного покрытия минимальной массы при температурных ограничениях на границах слоев. Алгоритм решения задачи основан на сведении задачи оптимизации к последовательности решения основной задачи проектирования с использованием функций чувствительности.

E-mail: v_n_1951@mail.ru

Ключевые слова: многослойное теплозащитное покрытие, основная задача проектирования, оптимизация, градиентный спуск, функции чувствительности.

Определение толщин слоев многослойного теплозащитного покрытия конструкции является одной из традиционных задач теплового проектирования [1]. Этой проблеме посвящено множество работ. Так, в одной из первых работ по данной теме [2] предложена итерационная схема для определения толщин слоев многослойной теплоизоляции минимальной массы с учетом ограничений по температуре на границах слоев. Алгоритм решения базируется на методе штрафных функций и использовании сопряженных переменных. Следует отметить, что алгоритм достаточно трудоемкий. На каждой итерации необходимо решить три задачи: определить температурное поле, сопряженные переменные и вариации температуры для нахождения шага в методе сопряженных градиентов. Кроме того, метод имеет существенный недостаток: необходимость выбора параметров штрафа.

В работе [3] рассмотрена задача нахождения толщины слоя термоизоляции в многослойном цилиндрическом пакете, при использовании которой температура внутренней граничной поверхности не превышает предельного значения. При этом допускается унос массы с поверхности теплозащитного покрытия. Ограниченность данного подхода связана с тем, что можно варьировать толщину только одного слоя термоизоляции. Кроме того, толщину найденного слоя полагают оптимальной, хотя постановка задачи не является экстремальной.

В работе [4] предложен эффективный итерационный метод решения задачи подбора толщин многослойной конструкции, подверженной радиационно-конвективному воздействию, из условия обеспечения заданных значений температуры в контролируемых точках. Высокая эффективность алгоритма обусловлена использованием

двухконтурной схемы, с помощью которой многократное решение обратной задачи выполняют во внутреннем контуре с использованием упрощенной модели, а решение уточняют при выходе во внешний контур на точной модели. При решении обратной задачи не используют трудоемкие оптимизационные процедуры. Рассмотренная постановка задачи также не является экстремальной.

Постановка задачи. Подобно основной задаче управления [5] назовем основной задачей проектирования (ОЗП) многослойного теплозащитного покрытия заданной структуры задачу выполнения условий работоспособности конструкции во всех режимах эксплуатации и массовых ограничений. К условиям работоспособности конструкции могут относиться, например, ограничения на температуру внутренней граничной поверхности конструкционного пакета и температуру на стыках между слоями, а также ограничения, связанные с допустимыми напряжениями в конструкции. В качестве других ограничений можно назвать ограничения на минимально допустимые толщины отдельных слоев или на толщину всего пакета, массу всего теплозащитного покрытия и какие-либо технологические ограничения.

Математически ОЗП определяется соотношением

$$g_i(h) \leq 0.$$

Требуется подобрать толщины слоев $h = (h_1, \dots, h_n)$ многослойного теплозащитного покрытия, удовлетворяющие заданным ограничениям. Очевидно, что в такой постановке задача не имеет единственного решения, что часто бывает удобно на практике, поскольку для конструктора обеспечивается некоторая возможность выбора, позволяющая удовлетворить дополнительные конструктивные ограничения.

В рассматриваемой работе предложен итерационный алгоритм решения ОЗП в экстремальной постановке, основанный на использовании функций чувствительности, введенных в работе [6]. Толщины слоев многослойного теплозащитного покрытия подобраны так, чтобы минимизировать массу пакета при выполнении ограничений на температуру в контролируемых точках пакета между слоями. Алгоритм решения ОЗП основан на сведении задачи оптимизации к последовательности решения основной задачи проектирования.

Математическая модель и алгоритм решения. Рассмотрим задачу прогрева многослойной конструкции заданной структуры, состоящей из n слоев различных материалов и подверженной воздействию высокотемпературной среды, в предположении, что тепловой контакт между слоями идеальный. Процесс распространения теплового потока в покрытии является одномерным по пространственной координате и нестационарное поле температур $T(y, \tau)$ в k -м слое описывается обобщенным квазилинейным уравнением теплопровод-

ности. Коэффициенты параболических уравнений c_k и λ_k , $k = \overline{1, n}$, представляют собой функции температуры. Унос массы с поверхности отсутствует.

При сделанных предположениях температурное поле в конструкционном пакете (КП) определяется решением краевой задачи вида

$$\begin{aligned} \rho_k c_k(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} &= \frac{\partial T}{\partial y} \left(\lambda_k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ y_{k-1} < y < y_k, \quad 0 < \tau \leq \hat{\tau}, \quad k = \overline{1, n}, \\ T(y, 0) &= T_0, \quad y_0 \leq y \leq y_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_k — плотность материала k -го слоя; τ — время; T_0 — начальная температура.

Граничные условия на поверхностях w и v КП в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned} -\lambda_1(T) \frac{\partial T(y_w, \tau)}{\partial y} &= q_w, \\ \lambda_n(T) \frac{\partial T(y_v, \tau)}{\partial y} &= q_v. \end{aligned} \quad (2)$$

Тепловые потоки q_w и q_v на граничных поверхностях рассчитаем по следующим формулам:

$$q_w = \left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_w (I_{e,w} - I_w) - \varepsilon_w \sigma T_w^4, \quad (3)$$

$$q_v = 15 \cdot (323 - T_v) + \varepsilon_v (333^4 - T_v^4), \quad (4)$$

где коэффициент теплообмена $\left(\frac{\alpha}{c_p} \right)_w$ и энтальпия восстановления газового потока $I_{e,w}$ на поверхности w — заданные функции времени; T_w, T_v — температура на поверхностях w и v ; ε_w и ε_v — степени черноты граничных поверхностей КП.

Энтальпию газового потока I_w при температуре стенки моделируем зависимостью

$$I_w = 954T_w + 0,0862T_w^2. \quad (5)$$

В качестве минимизируемого функционала используем

$$f_0 = \sum_{j=1}^n \rho_j h_j. \quad (6)$$

Здесь ρ_j — плотность материала j -го варьируемого слоя; h_j — толщина варьируемого слоя j .

Для решения задачи проектирования в экстремальной постановке рассмотрим сначала ОЗП, состоящую в обеспечении следующего условия: температура на границах слоев не должна превышать предельно допустимые значения при ограничении массы КП не больше заданного значения \hat{M} :

$$f_0 = \sum_{j=1}^n \rho_j h_j \leq \hat{M}, \quad (7)$$

$$f_i = T_i \leq \hat{T}_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где \hat{T}_i — предельно допустимые значения температуры i -го контролируемого стыка; n — число варьируемых слоев (число контролируемых стыков).

Решение ОЗП сводится к решению задачи безусловной минимизации вида

$$F(\mathbf{h}) = \sum_{i=0}^n [\max(g_i(\mathbf{h}), 0)]^2 \rightarrow \min_{\mathbf{h}}, \quad (8)$$

где

$$g_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i h_i - \hat{M}}{\hat{M}}, \quad g_i = \frac{T_i - \hat{T}_i}{\hat{T}_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

С применением градиентного спуска

$$\mathbf{h}^{(k+1)} = \mathbf{h}^{(k)} - S_k \text{grad } F, \quad (9)$$

где S_k — параметр, регулирующий длину вдоль направления $\text{grad } F$. Здесь градиент функционала

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial h_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial h_n} \right)^T, \quad (10)$$

$$\text{где } \frac{\partial F}{\partial h_j} = 2 \max \left(\frac{\sum_{i=1}^n \rho_i h_i - \hat{M}}{\hat{M}}, 0 \right) \rho_i + 2 \sum_{i=1}^n \max \left(\frac{T_i - \hat{T}_i}{\hat{T}_i}, 0 \right) \frac{\partial T_i}{\partial h_j}, \quad j = \overline{1, n},$$

и значения производных $\frac{\partial T_i}{\partial h_j}$ совпадают со значениями функций

чувствительности $\psi_{h,j} = \frac{\partial T}{\partial h_j}$, вычисленными в точках с координата-

ми y_i , в которых контролируется температура. Способ вычисления

функций чувствительности предложен в работе [6].

Для решения задачи проектирования многослойного теплозащитного покрытия в экстремальной постановке построим итерационный процесс, на каждом шаге которого ОЗП решается при уменьшенном значении \hat{M} . Пусть на k -м шаге известно какое-то решение ОЗП, так что выполняется равенство

$$F(\mathbf{h}^{(k)}) = \sum_{i=0}^n [\max(g_i(\mathbf{h}), 0)]^2 \equiv 0. \quad (11)$$

Зададим новое значение ограничения:

$$\hat{M}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n \rho_i h_i^{(k)} \quad (12)$$

и найдем $(k + 1)$ -е решение ОЗП при следующем начальном приближении для искомого вектора:

$$\mathbf{h}^{(k+1)} = \mathbf{h}^{(k)} - \alpha \text{grad } M, \quad (13)$$

где α — параметр, регулирующий длину шага вдоль направления $\text{grad } M$.

Итерационный процесс заканчивается на той итерации, когда будет выполняться условие

$$\frac{|\hat{M}^{(k+1)} - \hat{M}^{(k)}|}{\hat{M}^{(k+1)}} \leq \varepsilon, \quad (14)$$

где ε — заданная точность решения задачи, либо в случае нарушения условия (11).

Результаты численных расчетов. В качестве методического примера с помощью разработанного алгоритма решена задача проектирования двухслойного ТЗП конструкции. Предельно-допустимые значения температуры на границах слоев $\hat{T}_1 = 1073 \text{ К}$, $\hat{T}_2 = 343 \text{ К}$. Начальная температура КП $T_0 = 300 \text{ К}$.

Исходные данные в безразмерном виде параметров теплообмена в зависимости от времени, определяющие граничный тепловой поток q_w (все параметры отнесены к максимальным значениям за рассматриваемый промежуток времени), приведены ниже:

$\bar{\tau}$	$\bar{I}_{e,w}$	$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_w$	$\bar{\tau}$	$\bar{I}_{e,w}$	$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_w$
0,012	0,012	0,388	0,735	1,000	0,045
0,024	0,023	0,513	0,783	0,946	0,058
0,036	0,062	0,150	0,819	0,924	0,0063
0,048	0,127	0,029	0,843	0,903	0,0163
0,066	0,228	0,001	0,880	0,808	0,0725
0,096	0,977	0,002	0,940	0,403	0,1375
0,675	0,977	0,002	1,000	0,034	1,000

Характеристики теплофизических свойств материалов КП и начальное приближение для толщин варьируемых слоев и толщина неварьируемого слоя элемента конструкции приведены в таблице.

Значения характеристик

Номер слоя	$\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$	$c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$h, \text{мм}$
1	—	1088,6	1400	20
2	—	—	215	60
3	0,339	799,6	1800	3

Ниже приведены теплофизические свойства материалов при разных значениях температуры:

$T, \text{К}$	273	673	1073	1473	1873	2273
$\lambda_1, \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$	0,25539	0,26796	0,43960	0,83740	1,2770	1,74170
$\lambda_2, \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$	0,06280	0,07669	0,12058	0,20766	—	—
$c_2, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	703,38	954,59	1038,33	1080,19	1214,17	1256,04

Применением данного способа решения задачи получены оптимальные толщины слоев двухслойного теплозащитного покрытия конструкции 28,4 мм, 25,3 мм.

Работоспособность и эффективность алгоритма подтверждены сравнением решения данной задачи с решением, выполненным методом штрафных функций с использованием метода Ψ -преобразования [7].

Таким образом, предложена итерационная схема решения задачи оптимизации многослойного теплозащитного покрытия конструкции, подверженной воздействию высокотемпературной среды по критерию минимума массы с учетом ограничений на температуры на границах слоев. Преимущество разработанного алгоритма состоит в том, что он не требует выбора параметров штрафа при решении последовательности задач безусловной минимизации. Метод поиска оптимальных толщин может быть применен для тел произвольной формы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А л и ф а н о в О. М. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем. М.: Логос, 2001.
2. М и х а й л о в В. В. Оптимизация многослойной теплоизоляции // Инженерно-физический журнал. 1980. Т. 39. № 2. С. 286–291.
3. Ч и г и р е в а О. Ю. Расчет оптимальной толщины слоя теплоизоляции в многослойном цилиндрическом пакете // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2005. № 1. С. 94–101.
4. Б у ш у е в А. Ю., Г о р с к и й В. В. Применение аппарата функций чувствительности и двухконтурного алгоритма в задачах синтеза многослойных конструкций // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 73. № 1. С. 155–159.
5. С и р а з е т д и н о в Т. К. Методы решения многокритериальных задач синтеза технических систем. М.: Машиностроение, 1988.
6. Б у ш у е в А. Ю., Г о р с к и й В. В. Об использовании функций чувствительности в задаче проектирования многослойной теплозащитной конструкции // Инженерно-физический журнал. 1991. Т. 61. № 6. С. 1014–1018.
7. Ч и ч и н а д з е В. К. Решение невыпуклых задач оптимизации. М.: Наука, 1983.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.