УДК519.142.6

Разбиения семейства матриц Адамара

В.А. Дегтярь [1], Т.Э. Кренкель [2], А.П. Скотников [3], А.В. Сукк [4]

[1] ООО «Aveva», Москва, 105066, Россия

[2] МТУСИ, Москва, 111024, Россия

[3] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

[4] МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

Предложены и исследованы разбиения семейства матриц Адамара по его конструктивным особенностям и модель таких разбиений.

E-mail: awh@cs.msu.su

Ключевые слова: *матрица Адамара, разбиение.*

Проблема матриц Адамара заключается в поиске их числа и свойств — красивейшая и сложнейшая задача перечислительной комбинаторики, безуспешно решаемая более полувека [1]. Понятно, что работать с семействами таких мощностей без их разбиения невозможно: две матрицы на 1-м порядке; восемь — на 2-м; 768 — на 4-м; $5 \cdot 10^9$ — на 8-м; $2 \cdot 10^{19}$ — на 12-м; $8{,}9 \cdot 10^{31}$ — на 16-м; $1{,}5 \cdot 10^{21}$ — на 20-м; $8{,}9 \cdot 10^{30}$ — на 24-м; $1{,}1 \cdot 10^{40}$ — на 28-м; $6{,}3 \cdot 10^{96}$ — на 32-м; … .

Семейство — всевозможные матрицы, различные, без пропусков, без повторов, удовлетворяющие определенным свойствам.

Матрица H Адамара из (± 1) имеет ортогональные строки, столбцы: $H^{\mathrm{т}} H = nE$, где т — транспонирование; E — единичная матрица; порядок $n = 1, 2, 4k$ при натуральном k.

Условие эквивалентности $H_i = PH_jQ$, где P, Q — мономиальные матрицы с одним ненулевым элементом в любой строке, столбце, равном ± 1, оговаривает свойство семейства эквивалентных матриц, но не определяет их число, так как неизвестны количества матриц P и Q.

Известен подход к нахождению числа матриц, при котором индивидуально для исследуемого порядка ищут с помощью переборного алгоритма по одному представителю в каждом из классов эквивалентности, тем самым перечисляют эти классы. Затем, например, с помощью алгоритма «nauty» поиска автоморфизмов [2] по имеющемуся представителю эквивалентного класса определяют его мощность. Сумма мощностей всех неэквивалентных классов и есть мощность всего семейства. Например, для $n = 16$ (табл. 1) число матриц определено и по эквивалентности, и через разбиения этого семейства. В результатах, полученных исследователями для порядков $n = 16$, 20 в [3, 4], для $n = 24$, 28 в [5, 6], для $n = 32$ в [7], используют классы эквивалентности в качестве основы.

Таблица 1

Разбиения семейства матриц Адамара порядка n = 16 по свойству эквивалентности и по конструктивным особенностям

Представители эквивалентного класса	P		Q	Σ
H_1	2^{16}	16!	132843110400	18215393604190782326046720000
H_2	2^{16}	16!	4649508864000	637538776146677381411635200000
H_3	2^{16}	16!	27897053184000	3825232656880064288469811200000
H_4	2^{16}	16!	15941173248000	2185847232502893879125606400000
H_5	2^{16}	16!	15941173248000	2185847232502893879125606400000
Предлагаемое разбиение	2^n	$n!$	$2^{n/2-1}$ Алгоритм	8852681291636720210458705920000

В данной работе предлагается подход к подсчету числа матриц и их классификации, основанной не на использовании классов эквивалентности, а на разбиении семейства матриц Адамара по его конструктивным особенностям.

Формирование семейства матриц Адамара может быть реализовано как из строк, так и из столбцов. Эти семейства будут равны (доказательство от противного) и будут содержать симметрические и\или транспонированные пары матриц. Воспользуемся взаимно однозначным соответствием элементов матрицы ($+1 \leftrightarrow 0$, $-1 \leftrightarrow 1$) и формированием матриц из строк, т. е. отобразим строки матриц двоичными числами от 0 до $2^n - 1$.

Формируя и анализируя семейства порядков 1, 2, 4, 8, 12, ..., n-го из 2^n исходных строк, видим, что любая матрица семейства принадлежит семейству из 2^1, 2^2, …, 2^n матриц, отличающихся друг от друга инверсиями одной, двух, трех, …, n ее строк. Такие матрицы строчно инверсны друг другу. Всего их 2^n, и они образуют строчно-инверсное семейство. Инверсия означает замену значений «0» на «1», а «1» на «0» в двоичном представлении числа.

Разбить строчно-инверсное семейство можно многими способами, выбрав в нем любую матрицу и приняв ее «неинверсной». Тогда остальные $2^n - 1$ «инверсных» будут отличаться от нее инверсиями одной, двух, трех, …, n ее строк. В качестве «неинверсной» удобно выбрать матрицу с нулевым старшим столбцом — старшими разрядами двоичных чисел-строк. Тогда любая из $2^n - 1$ «инверсных» будет содержать одну, две, три, …, n инвертированных строк. Индикатором строчной инверсии будет служить столбец старших разрядов: если в нем одни нули и нет ни одной единицы — матрица неинверсная; если в нем есть хоть одна единица — матрица инверсная: из-за инверсии в ней строки с единицей находятся в левом столбце — старшем разряде этой строки.

При таком разбиении строчно-инверсного семейства разбивается и 2^n исходных строк — двоичных чисел, из которых это семейство сформировано, на две части по 2^{n-1} строк в каждой. Одна часть с нулевыми старшими разрядами (неинверсные), другая — с единичными (инверсные).

Исключение строчно-инверсного семейства при учете его существования с помощью коэффициента 2^n легко осуществить, исключив из перебора 2^{n-1} инверсных строк, но оставив в качестве исходных 2^{n-1} неинверсные («0» в старшем разряде) и сформировав только неинверсные матрицы.

Формируя и анализируя семейства порядков 2, 4, 8, …, n-го из 2^{n-1} исходных неинверсных строк, видим, что любая такая матрица принадлежит семейству из 2!, 4!, 8!, …, n! матриц, отличающихся одна от другой перестановками двух, трех, четырех, …, n ее строк. Такие матрицы строчно-перестановочны друг другу. Всего их n!, и они образуют строчно-перестановочное семейство.

Разбить строчно-перестановочное семейство можно многими способами, выбрав в нем любую из матриц и приняв ее «неперестановочной». Тогда остальные $n! - 1$ «перестановочных» матрицы будут отличаться от нее перестановками двух, трех, четырех, …, n ее строк. В качестве «неперестановочной» удобно выбрать матрицу с естественным, или лексикографическим, порядком следования ее строк. Тогда любая из $n! - 1$ «перестановочных» матриц будет иметь нарушенный перестановками порядок следования строк, что и будет служить индикатором перестановки (или неперестановки) строк в матрице. Порядок строк в матрице естественный — матрица неперестановочная, нарушен естественный порядок — перестановочная. Такое разбиение строчно-перестановочного семейства обусловливает разбиение исходных строк на строки в естественном порядке следования или в нарушенном, неестественном. Наложив ограничение естественности порядка следования исходных 2^{n-1} неинверсных строк легко исключить все матрицы строчно-перестановочного семейства из перебора, кроме одной — с естественным порядком следования строк, а исключенные учесть коэффициентом $n!$. Формируемое с такими ограничениями семейство будет содержать и строчно-неинверсные и строчно-неперстановочные матрицы с естественным порядком следования и неинверсных строк в них, и самих матриц в семействе, т. е. будут исключены и 2^n строчно-инверсные, и $n!$ строчно-перестановочные.

Формируя и анализируя семейства порядков 4, 8, 12, …, n-го из 2^{n-1} неинверсных («0» в старшем разряде) естественно упорядоченных строк имеем на 4-м порядке две матрицы: они строчно-неинверсные и строчно-неперестановочные, но отличаются инверсиями своих последних столбцов $6 = 9$, $9 = 6$ (черта сверху) — они столбцово-инверсные. Нижняя строка (1 1 1 2) является компактной записью семейства 4-го порядка с исключенным строчно-инверсным и строчно-перестановочным семействами. При нумерации строк его матриц снизу вверх (1, 2, 3, 4) (табл. 2) единица в строках 1, 2, 3 ($n - 1$) означает число ортогональных дополнений или наборов строк, дополняющих все имеющиеся верхние до полной матрицы Адамара, двойка в строке 4 означает возможное число строк или столбцовых инверсий в принятых ограничениях.

Отметим также, что на порядках 4, 8, 12, ..., n столбцово-инверсное семейство будет содержать соответственно 2^1, 2^3, 2^5, ..., $2^{n/2-1}$ столбцово-инверсных матриц, в которых все $n/2-1$ младших разрядов принимают значения 0, 1, 2, …, $2^{n/2} - 1$. Перестановки столбцов в таких матрицах от действия $2^{n/2-1}$ различных возможных столбцовых инверсий в $n/2 - 1$ младших разрядах не происходят. В семействах матриц на порядках 4, 8, 12, …, n первые три столбца в таких матрицах слева (на 4-м порядке это столбцы 0, 3, 5) будут всегда сохранять свой вид и не изменяться с точностью до порядка. Первый — из n нулей, второй — из $n/2$ нулей сверху и $n/2$ единиц снизу; третий — из $n/4$ нулей сверху, $n/4$ единиц снизу, затем $n/4$

нулей, и, наконец, $n/4$ единиц внизу. В этих трех столбцах n строк будут равны: 0, 1, 2, 3, продублированных по $n/4$ раз, что, в свою очередь, разбивает соответствующие матрицы этими строками на четыре части по $n/4$ строк в каждой части со значениями соответственно 0, 1, 2, 3 (трех старших разрядов в каждой из этих четырех частей) для каждой из соответствующих четвертей ее строк. Всего семейство 4-го порядка имеет $768 = 2^4 \cdot 4! \cdot 2$ матриц, где 2^4 — строчно-инверсное семейство; 4! — строчно-перестановочное; 2 — столбцово-инверсное семейство.

Таблица 2

Компактная запись семейства n = 4

Двоичные представления	Десятичные представления	1-я	2-я	Матрицы
□□□□	0	•		□□□□ 0 0
□□□■	1		•	□□■■ 3 3
□□■□	2		•	□■□■ 5 5
□□■■	3	•		□■■□ 6 6
□■□□	4		•	□□□■ 1 0
□■□■	5	•		□□■□ 2 3
□■■□	6	•		□■□□ 4 5
□■■■	7		•	□■■■ 7 9

№	Строки матрицы				Значения 4-й строки
	1	2	3	4	
0	1	1	1	2	$0 \div 1$

Примечания: □ – "0", ■ – "1".

Разбить столбцово-инверсное семейство можно многими способами, выбрав в нем любую матрицу и приняв ее «неинверсной». В этом случае остальные $2^{n/2-1} - 1$ «столбцово-инверсные» будут отличаться от нее инверсиями одного, двух, трех, …, $n/2 - 1$ ее столбцов. В качестве столбцово-неинверсной удобно выбрать матрицу с нулевыми старшими разрядами двоичных чисел-столбцов. Тогда любая из $2^{n/2-1} - 1$ столбцово-инверсных матриц будет содержать один, два, три, …, $n/2 - 1$ инвертированных столбцов. Индикатором столбцовой инверсии будет служить часть, а именно $n/2 - 1$ младших разрядах в верхней строке (табл. 3) или, что то же самое, значения старших разрядов $n/2 - 1$ двоичных чисел-столбцов в правой части матрицы. Если в них имеются одни нули и нет ни одной единицы — матрица столбцово-неинверсная, если в них есть хоть одна единица — матрица столбцово-инверсная из-за инверсии в ней столбца с единицей в старшем разряде, или в $n/2 - 1$ младших разрядах верхней строки. Такое разбиение столбцово-инверсного семейства разбивает и все 2^{n-1} исходных неинверсных, в естественном порядке строк, во-первых, на четыре части 2^2 (по первым трем столбцам), из строк которых только и могут формироваться строки соответствующих четвертей матриц, и, во-вторых, первая четверть исходных строк 2^{n-3}, из которой только и могут формироваться первые $n/4$ строки матрицы, в свою очередь, разбивается на $2^{n/2-1}$ по столбцовым инверсиям. В остатке имеем $2^{n-3-(n/2-1)} = 2^{n/2-2}$ разрядов. Исключение столбцово-инверсного семейства легко осуществить, задав нулевые значения $n/2-1$ младшим разрядам, а учесть наличие столбцово-инверсного семейства можно коэффициентом $2^{n/2-1}$. При этих ограничениях не формируется 2^n строчно-инверсных, $n!$ строчно-перестановочных и $2^{n/2-1}$столбцово-инверсных матриц.

Таблица 3

Матрица Адамара построчного формирования

	n столбцов матрицы				
	3			$n/2-2$	$n/2-1$
	0	0	0	Перестановка столбцов, новые наборы столбцов (алгоритм)	Инверсия столбцов $2^{n/2-1}$
	⋮	⋮	⋮		
Инверсия строк $2^n \longrightarrow$	0	0	0		
	0	0	1		
	⋮	⋮	⋮		
Перестановка строк $n! \longrightarrow$	0	0	1		
	0	1	0		
	⋮	⋮	⋮		
	0	1	0		
	0	1	1		
	⋮	⋮	⋮		
	0	1	1		

Формируя и анализируя семейства 8, 12, 16, …, n-го порядков из 2^{n-1} исходных неинверсных в естественном порядке строк с нулевыми тремя старшими и $n/2-1$ младшими разрядами в первой строке, имеем 60 матриц для 8-го порядка. В этих матрицах три столбца слева описанного выше типа. Эти 60 матриц могут быть разбиты на три столбцово-перестановочных семейства, согласно значениям старших разрядов $n/2-2$ средних столбцов: 0, ..., 29(00) 30, ..., 53(01) и 54, ..., 59(10) (в скобках даны значения двух средних разрядов) значение (10) соответствует последней матрице, которая может быть сформирована полностью. Значение (11) не формирует ни одной матрицы. Иными словами, $n/2-2$ средних разрядов не используются полностью, а ограничиваются условием формируемости последней матрицы, а не конечным значением $2^{n/2-2}$, которое могли бы принять эти средние разряды 4 и 5. Общее количество таких матриц в компактной форме приведено в табл. 4. Ортогональное дополнение — набор строк, дополняющий все имеющиеся верхние строки до полной матрицы Адамара. Ортогональные дополнения являются индикаторами изменения свойств матрицы, например перестановки ее столбцов, или изменения столбцового набора в ней.

Конечно, инверсии в 4-м и 5-м разрядах (в общем случае это $n/2-2$ разряда) можно назвать инверсиями. Однако эти инверсии отличны от инверсий $n/2-1$. Инверсии в $n/2-2$ влекут перестановки столбцов в матрице, в общем случае, на всех разрядах, кроме трех старших. Инверсии в $n/2-2$ не влекут изменение столбцового набора $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (5+4+1) \cdot 8 = 480$ матриц 8-го порядка (без строчно-инверсных, без строчно-перестановочных). Этот набор столбцов 0, 15, 51, $\overline{60}$, 85, $\overline{90}$, $\overline{102}$, $\overline{105}$, т. е. всего 8 + 4 инвертируемых (черта сверху), составляет 12 столбцов. Кроме того, ортогональные дополнения 2 и 3, соответственно влекущие за собой перестановку последних двух и трех столбцов, одинаково разбивают все 480 матриц семейства, как и 8 столбцовых инверсий, т. е. можно исключить из 480 матриц $8 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ одинаковых разбиений и анализировать только разбиения (5 + 4 + 1), каждое из которых одинаково для своего количества матриц. Это при том, что все вместе $(5+4+1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8$ матриц разбивают все семейство $2^8 \cdot 8! \cdot 480 = 495\,452\,600$. Далее величины 5, 4, 1 убывают по мере роста двоичного числа (00), (01), (10) — это следствие, с одной стороны, постоянства разбиения семейства строками, из которых оно формируется, с другой стороны, возрастание указанной величины уменьшает количество используемых строк для формирования семейства. Кроме того, максимальное значение $2^{n/2-2}$ исключит возможность формирования $n/4-1$ строк первой четверти строк матрицы порядка $n = 8$.

Таблица 4

Компактная запись семейства $n = 8$

№	Строки матрицы 8-го порядка								Разряды $n/2-2$	Значения 8-й строки
	1	2	3	4	5	6	7	8		
0	1	1	1	2	1	3	5	8	00	$0 \div 7$
1	1	1	1	2	1	3	4	8	01	$8 \div 15$
2	1	1	1	2	1	3	1	8	10	$16 \div 23$

Примечание. Столбцовые инверсии $8 = (2^3)$; 5(00), 4(01), 1(10) — изменение числа столбцовых перестановок от значения в 4-м и 5-м разрядах и, одновременно, количество ортогональных дополнений в матрице на этой строке.

На сегодня возможно построение столбцово-перестановочного семейства как всего, так и для каждого конкретного его значения среди $2^{n/2-2}$ алгоритмическим путем.

Для исключения столбцово-перестановочного семейства из-за инверсий на $n/2-2$ столбцах требуется выполнить две операции: во-первых, исключить столбцовые инверсии и на $n/2-1$, и на $n/2-2$ разрядах аналогично исключению строчных инверсий, т. е. обнулить значения всей первой строки матрицы. Во-вторых, даже обнуление первой строки не исключает перестановок столбцов в матрице, и поэтому необходимо, по аналогии с исключением строчных перестановок, наложить еще условие неперестановочности столбцов в матрице.

Реализация описанных ограничений и условий формирует матрицу 8-го порядка (0, 15, 51, 60, 85, 90, 102, 105 — строки). Всего на 8-м порядке имеем $2^8 \cdot 8! \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (5 + 4 + 1) = 2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 4\,954\,521\,600$ матриц, где 2^8 — строчно-инверсное, 8! — строчно-перестановочное; 2^3 — столбцово-инверсное, $(2^2 - 1)$ — столбцово-перестановочное семейство алгоритмическтого формирования, а именно: $2 \cdot 3 \cdot (5 + 4 + 1) = 30 + 24 + 6 = 60$, каждое из которых включает $2 \cdot 3$ соответствующих ортогональных дополнений.

Формируя и анализируя в принятых условиях и ограничениях семейства 12, 16, 20, …, n-го, легко заметить, что на компактных записях их семейств (табл. 5) появляются в них, помимо описанных выше семейств, семейства новых столбцовых наборов.

Действительно, если порядки 4-й и 8-й имели соответственно единственные наборы столбцов $(0, 3, 5, \overline{6})$ и $(0, 15, 51, \overline{60}, 85, \overline{90}, \overline{102}, \overline{105})$, часть которых (черта сверху) могла участвовать еще и в инверсном виде, то на порядке 12-м получаем 16 столбцовых наборов (табл. 6).

Эти 16 столбцовых наборов порождены условием формирования семейства из 2^{n-1} неинверсных, в естественном порядке строк. Перестановка столбцов в наборах может привести к нарушению естественного порядка следования строк. Алгоритм, восстанавливая естественный порядок строк, исказит тем самым набор столбцов. Понимая это, легко «возвратить» эти 16 столбцовых наборов к двум начальным (см. табл. 6, столбцовые наборы 1 и 2).

Этот же результат может быть получен при переходе к алгоритму построения левой половины матрицы из $C_5^2 = 10$ полустрок, а правой — из $C_6^3 = 20$.

Итак, на 12-м порядке в принятых нами условиях и ограничениях формируются 10 321 920 матриц, что в компактной записи выглядит как $2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4480 \cdot 32 = 10\,321\,920$, а для нулевой первой строки $2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 840 = 60\,480$ матриц (см. табл. 5).

Объемы столбцово-перестановочных семейств 840, 820, 720, 700, 420, 400, 300, 280 соответствуют значениям $n/2 - 2$ разрядов 0000, 0001, 0100, 0101, 0111. Для определения всех объемов достаточно знать максимальный объем на значении 0000 и его уменьшение по каждому значащему разряду: 0001 сокращает на 20 $(840 - 20)$, 0010 — на 120 $(840-120)$, 0100 — на 420 $(840-420)$. Последняя старшая максимально возможная матрица соответствует значению 0111, хотя в $n/2-2$ для $n = 12$ имеется еще и четвертый разряд, но на значении 1000 матрица не формируется $2^4 - 8 = 2^3$.

Таблица 5

Компактная запись семейства *n* = 12

№	Строки матрицы 12-го порядка, начиная снизу											Разряды $n/2-2$	Значения 12-й строки
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 11 10 11 10 11 10 11	12		
0	1	1	1	1	1	2	1	4	9	$20\cdot 28+10\cdot 21+4\cdot 15+1\cdot 10=840$	32	0000	$0\div 31$
1	1	1	1	1	1	2	1	4	9	$20\cdot 27+10\cdot 21+4\cdot 15+1\cdot 10=820$	32	0001	$32\div 63$
2	1	1	1	1	1	2	1	4	9	$20\cdot 22+10\cdot 21+4\cdot 10+3\cdot 10=720$	32	0010	$64\div 95$
3	1	1	1	1	1	2	1	4	9	$20\cdot 21+10\cdot 21+4\cdot 10+3\cdot 10=700$	32	0011	$96\div 127$
4	1	1	1	1	1	2	1	4	9	$20\cdot 7+10\cdot 15+7\cdot 10+6\cdot 10=420$	32	0100	$128\div 159$
5	1	1	1	1	1	2	1	4	9	$20\cdot 6+10\cdot 15+7\cdot 10+6\cdot 10=400$	32	0101	$160\div 191$
6	1	1	1	1	1	2	1	4	9	$20\cdot 1+10\cdot 10+9\cdot 10+3\cdot 15=300$	32	0110	$192\div 223$
7	1	1	1	1	1	2	1	4	9	$10\cdot 10+9\cdot 10+3\cdot 15=280$	32	0111	$224\div 255$

$$\sum 2240+1340+520+380=4480$$

Таблица 6

Столбцовые наборы n = 12 в десятичном представлении

№	Столбцовые наборы в десятичном представлении
1	0 63 455 729 874 948 1260 1393 1434 1622 1699 1805
2	0 63 455 729 874 948 1266 1372 1449 1637 1678 1811
3	0 63 455 729 876 946 1258 1393 1436 1622 1701 1803
4	0 63 455 729 876 946 1268 1370 1449 1635 1678 1813
5	0 63 455 729 882 940 1258 1372 1457 1637 1686 1803
6	0 63 455 729 882 940 1268 1385 1434 1614 1699 1813
7	0 63 455 729 884 938 1260 1370 1457 1635 1686 1805
8	0 63 455 729 884 938 1266 1385 1436 1614 1701 1811
9	0 63 455 732 881 938 1266 1388 1433 1611 1701 1814
10	0 63 455 732 882 937 1265 1388 1434 1611 1702 1813
11	0 63 455 748 881 922 1266 1372 1449 1611 1685 1830
12	0 63 455 748 882 921 1265 1372 1450 1611 1686 1829
13	0 63 455 753 860 938 1260 1394 1433 1611 1686 1829
14	0 63 455 753 876 922 1244 1394 1449 1611 1702 1813
15	0 63 455 754 860 937 1260 1393 1434 1611 1685 1830
16	0 63 455 754 876 921 1244 1393 1450 1611 1701 1814

Примечание. Инверсные столбцы опущены.

Определение местоположения 16 различных столбцовых наборов показано в табл. 7.

Разбиения семейства 12-го порядка отчетливо видны на компактной записи семейства (см. табл. 5 и 6).

Формируя и анализируя семейства 16, 20, 24, …, n-го порядков, получаем на 16-м порядке 31 524 292 800 матриц для «нулевой» верхней строки.

Отметим, что формирование и анализ семейств матриц Адамара 1, 2, 4, 8, 12, 16, … порядков выявили 2^n строчно-инверсных матриц на всех порядках, начиная с 1-го; выявили $n!$ строчно-перестановочных матриц на всех порядках, начиная со 2-го; выявили $2^{n/2-1}$ столбцово-инверсных матриц на всех порядках, начиная с 4-го; выявили столбцово-перестановочные матрицы на всех порядках, начиная с 8-го с появлением новых столбцовых наборов, начиная с 12-го порядка. Эти столбцово-перестановочные матрицы, а также новые наборы столбцов в них формируются алгоритмически на $n/2-2$ разрядах с появлением в них 0, 1, 2, … последнего возможного значения, формирующего матрицу, меньшего, чем $2^{n/2-2}-1$ (см. объяснение выше). Естественно, само столбцово-перестановочное семейство может быть разбито разными способами.

Модель семейства матриц Адамара. Полученные выше результаты по моделям 1, 2, 4, 8, 12, 16-го порядков, соответствующие принятым ограничениям и условиям, позволяют их обобщить в виде модели семейства матриц Адамара (см. табл. 3).

Таблица 7

Количество матриц в семействе n = 12 от первой строки матрицы

№	Первые сверху (или n-е снизу) строки матрицы $n = 12$								Σ
	$0 \div 31$	$32 \div 63$	$64 \div 95$	$96 \div 127$	$128 \div 159$	$160 \div 191$	$192 \div 223$	$224 \div 255$	
	000000000000	000000100000	000001000000	000001100000	000010000000	000010100000	000011000000	000011100000	
	...	...	...	...	...	...	...	...	
	000000011111	000000111111	000001011111	000001111111	000010011111	000010111111	000011011111	000011111111	
1	5040	4320	720	—	5040	4320	720	—	20160
2	5040	4320	720	—	5040	4320	720	—	20160
3	5040	5040	5040	5040	—	—	—	—	20160
4	5040	5040	5040	5040	—	—	—	—	20160
5	5040	5040	5040	5040	—	—	—	—	20160
6	5040	5040	5040	5040	—	—	—	—	20160
7	5040	5040	5040	5040	—	—	—	—	20160
8	5040	5040	5040	5040	—	—	—	—	20160
9	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	20160
10	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	20160
11	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	20160
12	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	20160
13	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	20160
14	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	20160
15	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	20160
16	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	2520	20160
Σ	60480	59040	51840	50400	30240	28800	21600	20160	322560

Эта модель включает в явном виде четыре семейства: строчно-инверсные, строчно-перестановочные, столбцово-инверсные, столбцово-перестановочные для включения в нее новых столбцовых наборов, последние могут быть либо просто перечислены, либо заданы одним из них вместе с алгоритмом формирования других столбцовых наборов.

Использование данной модели на конкретном порядке будет проще и эффективнее вместе с компактной записью соответствующего семейства, поскольку в компактной записи отражены еще и ортогональные дополнения и их влияние на формируемую матрицу, помимо отраженных в модели «внешних» инверсий и перестановок строк и столбцов.

Предложенная модель не единственно возможная.

Свойства разбиений семейства матриц Адамара. Разбиения семейства матриц Адамара возможны по строчным и столбцовым инверсиям и по строчным перестановкам как равномощным.

Разбиение семейства матриц Адамара по всем столбцовым перестановкам равномощно и обеспечивает возможность равномощного разбиения по отдельным перестановочным семействам, хотя сами перестановочные семейства относительно друг друга неравномощны.

Полное семейство матриц Адамара разбивается на семейства матриц, содержащих любую заданную строку. Это же разбиение справедливо и для 2^{n-1} неинверсных строк (в общем случае, а не только с нулями в старшем разряде). Это легко показать и доказать для любого порядка, если использовать свойство сохранения ортогональности матрицей Адамара при перестановке и/или инверсии одноименных разрядов всех образующих ее строк, т. е. столбцов.

Из компактных записей семейств видно, что равномощные разбиения семейств матриц Адамара справедливы как для отдельных строк, так и для их наборов. Равномощные ортогональные дополнения на наборах строк по всему семейству (1 1 1 2 1 3 — 8, 1 1 1 1 1 2 1 4 9 — 32, и т. д.).

Равномощными будут являться и разбиения 2^{n-1} исходных строк на четыре части, в которых только и могут формироваться соответствующие части строк матрицы Адамара, так как в принятых условиях и ограничениях первые три столбца постоянны для любого порядка. Образуемые ими строки соответствующих матриц должны соответственно состоять из трех старших разрядов 000 для первой четверти строк, 001 — для второй, 010 — для третей, 011 — для четвертой.

Выбор и использование конкретного разбиения определяются решаемой задачей. Выбор разнообразен и эффективен, существенно сокращается объем вычислений, становится достижимым само решение задачи.

Алгоритм поиска числа «перестановок столбцов», кроме прочего, может быть определен по его значению для нулевой строки и в $n/2-2$

значащих (единичных) разрядах или по его значениям для всех возможных строк: 0, 1, 2, … — последняя возможная строка, формирующая матрицу.

В заключение отметим, что исследованные разбиения семейства матриц Адамара дают возможность построить как модель семейства, так и предложить методологию его исследования, что имеет большое значение в теории и на практике.

Три исследованных семейства имеют аналитические выражения для произвольных порядков. Остаток и следующее исследуемое семейство на сегодня строится алгоритмически.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холл М. Комбинаторика, М.: Мир, 1970. С. 283–307.
2. McKay B.D. Hadamard equivalence via graph isomorphism // Discrete Math. 1979. No. 27. P. 213, 214.
3. Hall M., Jr. Hadamard matrices of order 16 // Research Summary. Jet Propulsion Laboratory, Pasadena. 1961. No 36–10, Vol. I. P. 21–26.
4. Hall M., Jr. Hadamard matrices of order 20 // Tech. Report. Jet Propulsion Laboratory, Pasadena. 1965. No 32. P. 761.
5. Kimura H. New Hadamard matrix of order 24 // Graphs Combin. 1989. Vol. 5. P. 235–242.
6. Kimura H. Classification of Hadamard matrices of order 28 // Discrete Math. 1994. Vol. 133. P. 171–180.
7. Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. Hadamard matrices of order 32 // J. Combin. Design. 2012. DOI 10.1002/jcd.21323.

Статья поступила в редакцию 25.10.2012