

Электрогазодинамическая модель линейного атмосферного разряда

В.И. Пустовойт¹, А.А. Аникьев¹

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия.

Рассмотрен газодинамический подход к описанию процессов, приводящих к образованию лидера — локальной области значительной пространственной неоднородности концентрации заряда и, как следствие, сильного электрического поля, инициирующего пробой атмосферного газа. Найдено решение системы нелинейных уравнений гидродинамики слабоионизованного газа в одномерном случае и получены распределения концентрации частиц и электрического поля в потоке газа. Начальные условия задачи в значительной степени определяют режимы развития неустойчивости исходного распределения концентрации заряженных частиц и исследованы области изменения параметров, при которых нарастание электрического поля приводит к возникновению линий разрыва, аналогичных ударным волнам в газах, но имеющим электрическую природу компрессии. Получены численные решения системы уравнений без каких-либо приближений, использованных ранее. Показано, что в гидродинамическом потоке происходит значительное нарастание электрического поля и неоднородности распределения концентрации, однако поле остается конечным в принятых пространственно-временных масштабах грозового облака.

E-mail: aaanikyev@mail.ru

Ключевые слова: атмосферный разряд, уравнения гидродинамики, уравнение Абеля, фазовая траектория.

Несмотря на значительные усилия по изучению обычных линейных разрядов в атмосфере и их почти полуторавековую историю, механизм накопления заряда и зарождения молний в грозовых облаках остается полем для дискуссий. Наибольших успехов в экспериментальном изучении структуры грозовых облаков и физики формирования молний достигли специалисты Центра глобальной гидрологии и климата NASA, а также сотрудники Лэнгмюровской лаборатории института Нью-Мехико. Результаты последних исследований, по крайней мере до 2008 г., обобщены в работах [1—3]. В российской науке большая доля работ приходится на лабораторные исследования физики пробоя и разрядов в низкотемпературной плазме, газах и смесях газов, близких по составу к земной атмосфере [4, 5], а также построению теоретических моделей и численного моделирования физических процессов, сопровождающих электрические разряды в атмосфере [6]. Сложность в решении самой проблемы механизма формирования грозового разряда во многом связана с тем, что грозовые тучи представляют собой открытый природный резервуар с многофазной средой. Здесь представлены газообразная, жидкая и твердая составляющие, причем концентрации заряженных частиц — свободных электронов, всегда присутствующих в атмосфере, ионов и незаряженных частиц различного размера —

постоянно изменяются в результате столкновений, рекомбинации, ионизации и перезарядки под действием температуры, движения воздушных масс, космических лучей, магнитного поля и потенциала Земли. Следовательно, наряду с электродинамическими процессами последовательный подход должен учитывать и физико-химические процессы взаимодействия между фазовыми составляющими, процессы перезарядки при перемещении воздушных масс в облаках и облаков как одно целое в конвективных и восходящих потоках в атмосфере. Дополнительный импульс к изучению атмосферного электричества был получен после открытия восходящих атмосферных разрядов от вершин грозowych туч через тропосферу до ионосферы — спрайтов, эльфов и голубых джетов [7]. Эти удивительные явления наблюдаются на высоте от 12...20 км от поверхности Земли в приземной атмосфере до 40...90 км и захватывают стратосферу и ионосферу.

Однако в основе всех этих явлений лежит процесс разделения заряда, нарастание электрического поля и последующий пробой воздуха. Сами по себе эти явления носят случайный во времени и пространстве характер, но подготовка разделения заряда и последующее нарастание поля — процесс закономерный, причиной которого является совокупность различных физических факторов. В качестве основных процессов, приводящих к возникновению линейной молнии, предложено три механизма.

Наиболее простой из них — это традиционный пробой на разогретых под действием электрического поля электронах. Часть разогретых электронов, способных к ионизации вещества, генерирует новые электроны и при полях, превышающих пороговое для воздуха значение порядка 10...25 кВ/см, экспоненциальное нарастание вторичных электронов начинает превосходить их гибель за счет рекомбинации, что и приводит к пробоям — появлению разряда. Такие разряды в воздухе и сопровождающие их стримеры довольно подробно исследованы в лабораторных экспериментах по получению искрового разряда в газах [4].

Второй подход — пробой на убегающих электронах [6] — предполагает основную причину атмосферного разряда в рождении высокоэнергичных электронов с энергией порядка единиц мегаэлектронвольт при взаимодействии космических лучей с атмосферой. Для таких релятивистских электронов взаимодействие с атомами и ядрами в основном кулоновское и торможение связано с потерями энергии на ионизацию. При больших энергиях электронов сила торможения уменьшается, достигая своего минимального значения при некотором пороговом поле, и при внешних полях больше порогового, равного полю торможения в минимуме силы, электроны ускоряются. При взаимодействии с веществом они генерируют новые электроны, часть из которых в свою очередь рождает новые электроны, таким образом создавая лавину, и в конечном итоге пробой вещества. Энергия поля, необходимая для разгона электронов, до пробоя составляет около 2 кВ/см, что на порядок меньше поля традиционного пробоя. Этот

механизм имеет очевидный выигрыш по энергии, но является ли он основным экспериментально не доказано.

Третий механизм, предложенный в работе [8], основан на рассмотрении потоков заряженных частиц в грозовом облаке, вызванном естественными процессами конвекции и увлечении заряженных частиц восходящими потоками в электрическом поле Земли, что приводит к появлению неоднородного распределения зарядов в облаке, нарастанию электрического поля и появлению локальных областей с полями, превышающими значение пробоя. Данный механизм, являющийся по своей природе случайным процессом, объясняет собирание зарядов с большей части объема облака, появление лидера, величину сопровождающего его поля, что и делает его наиболее близким к реальному процессу разделения заряда, наблюдаемому экспериментально специалистами NASA [9—12]. Настоящая работа, посвященная дальнейшему развитию подхода, предложенного в статье [8]. При этом снят ряд приближений, сделанных в этой статье, при решении основных уравнений.

Перемещение заряженной среды будем описывать в гидродинамическом приближении, считая, что имеем дело со слабоионизованным плотным газом, состоящим из электронов, ионов и незаряженных частиц. Исходя из оценок концентрации заряженных частиц порядка 10^3 см^{-3} и предполагая примерно постоянную температуру в слое приземной атмосферы ($\sim 300 \text{ К}$), можно оценить дебаевский радиус $r_D = v_T / \omega_n \approx 4 \text{ см}$, который превышает расстояние между заряженными частицами и, следовательно, на меньших расстояниях не происходит кулоновского экранирования заряженных частиц. Здесь $v_T^2 = kT / m$ — тепловая скорость электронов, $\omega_n = 10^{12} \text{ с}^{-1}$ — характерная частота колебаний заряженных частиц.

Будем исходить из уравнений, описывающих закон сохранения импульса (уравнение Навье — Стокса), уравнения непрерывности и уравнения Пуассона для модели слабоионизованного газа. Исходное распределение заряженных областей в грозовом облаке в поле Земли будем принимать отрицательным в нижней части и положительным в верхней части, хотя наблюдаемое распределение заряда несколько сложнее [13—17].

Временное и пространственное распределение электрического поля в данной модели облака может быть найдено из совместного решения уравнений Навье — Стокса в приближении невязкого газа, уравнения непрерывности и уравнения Пуассона для слабоионизованного газа. В одномерном случае имеем:

$$\begin{aligned}
 -enE - \frac{\partial p}{\partial x} - mnv(v - v_0) &= mn \frac{\partial v}{\partial t} + mnv \frac{\partial v}{\partial x}; \\
 \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nv)}{\partial x} &= 0; \\
 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} &= 4\pi e(N_0 - n); \\
 J &= env.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь введены обозначения, используемые в работе [8]: e — заряд частицы; m — масса частицы; v — скорость частицы; ν — частота соударений частицы со всеми рассеивающими центрами; n — концентрация частиц; N_0 — концентрация частиц противоположного знака; v_0 — скорость нейтральных частиц, с которыми сталкиваются электроны; J — плотность потока частиц; ε_0 — диэлектрическая проницаемость среды; p — давление газа, в адиабатическом приближении

$$p = \frac{kT}{\gamma - 1} n^\gamma, \quad (2)$$

где γ — показатель адиабаты. Вначале будем считать процесс изотермическим на масштабах внутри облака и на временах, предшествующих образованию лидера. Тогда выражение (2) запишем в виде $p = kTn$. В данной работе, в отличие от [8], мы решаем динамическую задачу, не учитывая, однако, механическую вязкость. Электродинамическая вязкость частично учтена в левой части первого уравнения системы (1) введением члена столкновений $v - v_0$. Перезарядка нейтральных частиц и ионов может быть учтена добавлением в правую часть уравнения непрерывности интеграла столкновений. В первом приближении учитывать процесс перезарядки не будем, учтем его при дальнейшем рассмотрении.

Запишем систему (1) в безразмерном виде, используя следующие обозначения:

$$\varepsilon = x/l; \quad \tau = t/\tau_0; \quad y = eEl/(kT); \quad \rho = nl^3;$$

$$\rho_0 = N_0 l^3; \quad u = v/(vl); \quad u_0 = v_0/(vl),$$

где $l = \frac{e^2}{kT}$ — характерное расстояние, на котором энергия кулоновского взаимодействия равна тепловой энергии частиц;

$\tau_0 = \frac{mv l^2}{kT} = \frac{v_D^2}{v_T^2 v} \equiv \frac{l^2}{D}$ — время, в течение которого неравновесная

концентрация частиц выравнивается за счет диффузии (v_D — скорость диффузии, v_T — тепловая скорость частиц; $D = kT/(mv)$ — коэффициент диффузии). Преобразованную систему запишем в виде

$$\begin{aligned} -\rho y - \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \tau_0 \nu \rho (u - u_0) &= \rho \frac{\partial u}{\partial \tau} + \tau_0 \nu \rho u \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \tau_0 \nu \frac{\partial (\rho u)}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_0); \\ j &= \rho u. \end{aligned} \quad (3)$$

Для безразмерной плотности потока частиц введено обозначение $j = JI^2/(ev)$.

Преобразуем первое уравнение системы (3) и после интегрирования по переменной ξ с использованием уравнения непрерывности получим систему (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\rho y - \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\partial y}{\partial \tau} - y_0 \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\varepsilon_0}{4\pi \tau_0 v} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \tau_0 v \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + c_1(\tau); \\ -\frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \tau_0 v \rho u &= c_2(\tau); \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_0); \\ j &= \rho u, \end{aligned} \quad (4)$$

где y — константа, $y_0 = \tau_0 v u_0$; $c_1(\tau)$, $c_2(\tau)$ — постоянные интегрирования $c_1(\tau) = F_1(y(\tau, 0), \rho(\tau, 0))$ и $c_2(\tau) = F_2(y(\tau, 0), \rho(\tau, 0))$, которые определяются значениями поля на границе облака. Чтобы выяснить, какую форму должны иметь решения системы (4), рассмотрим систему, состоящую из уравнения непрерывности и уравнения Пуассона. Если предположить, что основную часть воздушного потока составляют заряженные частицы, то плотность тока заряженных частиц можно выразить через проводимость среды и электрическое поле:

$$j = \sigma' y.$$

Здесь безразмерная проводимость $\sigma' = (kTl/e^2)\sigma$ в общем случае зависит от концентрации заряженных частиц и возрастает с высотой по экспоненциальному закону [12]. Однако в масштабах грозового облака будем считать проводимость постоянной величиной в среднем по размерам облака. Тогда система из второго и третьего уравнения в (3) будет замкнута и ее можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \tau_0 v \sigma' \frac{\partial y}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_0); \\ j &= \sigma' y. \end{aligned} \quad (5)$$

Первое уравнение можно представить в виде двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho / \partial \tau}{\partial \rho / \partial \xi} &= -\tau_0 v \frac{dj}{d\rho}; \\ \frac{dy}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_0). \end{aligned} \quad (6)$$

В первом уравнении левая часть представляет собой производную $\partial \xi / \partial \tau$, взятую при постоянном значении ρ , и поскольку в данной системе значение $\rho(\xi, \tau)$ однозначно определяет $y(\xi, \tau)$, то, подставляя значение правой части во второе уравнение, получаем

$$\frac{u_0}{\tau_0 v} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = \frac{\partial j}{\partial \xi}.$$

Отсюда находим связь $j = u_0' \rho + C$. Если теперь подставить найденное соотношение в первое уравнение (5), получим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = u_0 \frac{\partial \rho}{\partial \xi},$$

которое описывает волну плотности, распространяющуюся со скоростью u_1 в положительном направлении оси x , не изменяя своей формы. Полагая, что все искомые величины зависят, например, от плотности, получим зависимости вида $\rho(\xi - u_0 \tau)$, $y(\xi - u_0 \tau)$, $j(\xi - u_0 \tau)$. Следовательно, при решении систем (3), (4) можем использовать автомодельное приближение, при котором возмущение плотности, поля или тока движется в пространстве, не меняя своей формы.

Тем не менее точное решение уравнений (5) можно найти и без автомодельного приближения. Полагая неравновесное возмущение плотности распределенным в пространстве по нормальному закону, случайным образом выбираем начальные условия для плотности в виде

$$\rho(0, x) = \rho_0 + e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}.$$

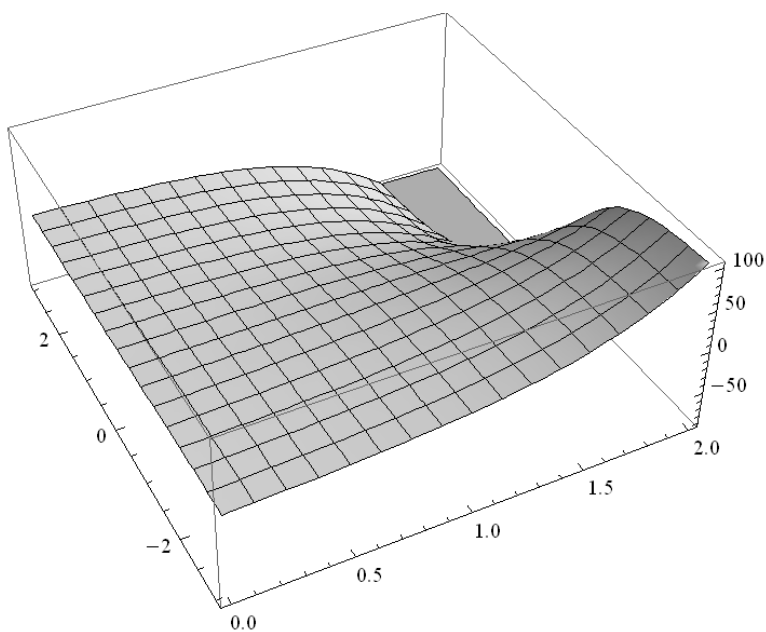
Решение системы (5) имеет вид

$$y(\xi, \tau) = ab \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ab\tau} \left(\operatorname{Erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2a}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}} \right) \right);$$

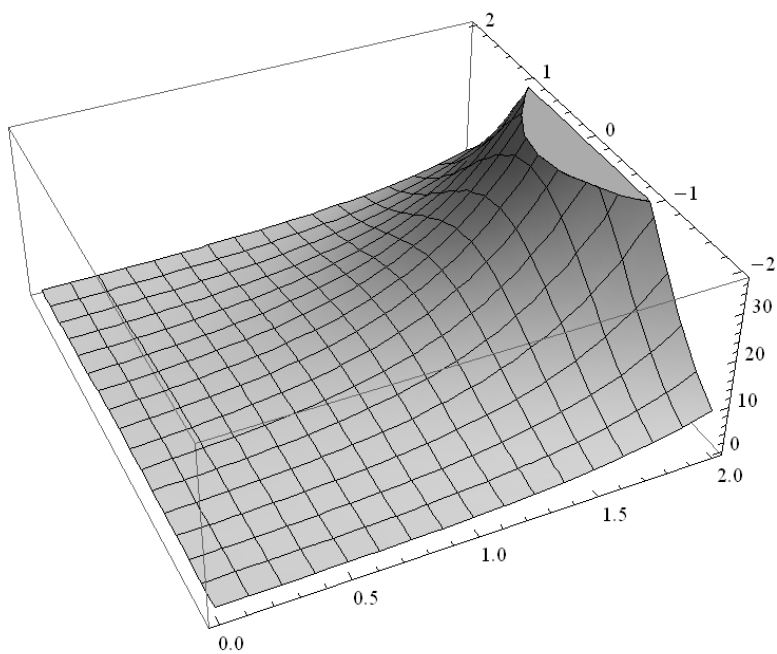
$$\rho(\xi, \tau) = \rho_0 + e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{2a^2}} e^{ab\tau}.$$

Соответствующие зависимости приведены на рис. 1, на рис. 2 показана фазовая траектория системы.

Как видно на рис. 1, a , напряженность поля возрастает в местах обеднения заряда и с течением времени резко возрастает по мере увеличения амплитуды неравновесной плотности заряда. Образующая при этом доменная стенка поля движется со скоростью u вдоль направления распространения волны. Дальнейшая эволюция потока должна описываться с учетом включения в рассмотрение первого уравнения системы (4).



a



б

Рис. 1. Распределение напряженности электрического поля (*a*) в пространстве и во времени в случае неравновесного распределения плотности заряда (*б*)

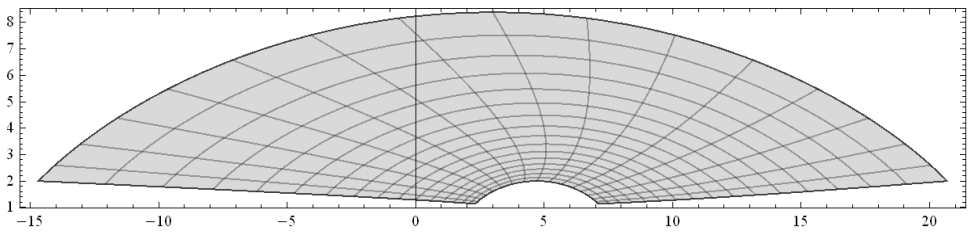


Рис. 2. Фазовая траектория системы $Y(\rho)$

Рассмотрим первое уравнение системы (4) в предположении нулевой плотности заряда противоположного знака и выясним, к чему приводит данное предположение. В дальнейшем мы откажемся от этого упрощения. Входящие в уравнение функции плотности и напряженности поля в автомодельном приближении будем считать зависящими от переменной $\zeta = \xi - V\tau$. Тогда первое уравнение системы (4) после однократного интегрирования по переменной ξ и исключения скорости может быть записано в виде

$$A \left(\frac{dy}{d\zeta} \right)^2 + B \frac{dy}{d\zeta} + C = 0, \quad (7)$$

где

$$A = \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} \right)^2;$$

$$B = \left(\frac{\varepsilon_0}{4\pi} \right)^2 \left[-y^2 / 2 + y(V - y_0) - \frac{4\pi}{\varepsilon_0} c_1(\tau)\zeta - \frac{4\tau V}{\varepsilon_0 \tau_0 V} c_1(\tau) + \left(\frac{4\pi}{\varepsilon_0} \right) c_2 \right];$$

$$C = c_1(\tau)^2 / (\tau_0 V).$$

Точное решение уравнения (7) может быть получено при условии, что начальные значения плотности, скорости потока на границе удовлетворяют условию

$$\rho_0 u_0 = \left. \frac{\partial y}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_0}.$$

Тогда

$$y(\zeta) = y_0 - V - d \cdot \text{th} [d(\zeta + c)], \quad (8)$$

где $d = [(V - y_0)^2 - c_2]^{1/2}$.

Функция $y(\zeta)$ описывает движение доменной стенки поля со скоростью V , причем амплитуда поля зависит от скорости V .

Константа $c_2(\tau)$ получена при интегрировании уравнения непрерывности по переменной ξ :

$$c_2(\tau) = \rho_0(\tau_0 u_0 - V),$$

где $\rho_0 = \rho(\tau, 0)$ — значение плотности на границе облака и окружающей среды, отнесенное к начальной плотности; $u_0 = v / (v_l)$ —

начальная скорость потока на границе облака; V — скорость профиля потока. Константы интегрирования c_1 и c_3 определяются из условия произвольного выбора начала отсчета по координате ζ таким образом, чтобы граничное значение напряженности поля было равным напряженности поля среды γ , окружающей грозное облако.

Зависимость $y(\zeta)$ представлена на рис. 3. Как видно на рисунке, напряженность поля возрастает с координатой и при некотором значении координаты потока происходит срыв линии поля (разрыв). Затем поле начинает снова возрастать. Положение линии разрыва зависит от скорости потока. При изменении параметра скорости линия разрыва смещается в сторону более высоких значений поля и меньших значений координаты разрыва (рис. 4).

Такое поведение с большой долей вероятности описывает процесс нарастания электрического поля в потоке при случайном зарождении неоднородности и по достижении полем критического значения происходит пробой, что обуславливает появление лидера, как было отмечено в работе [8].

Вернемся к системе (4) и учтем плотность частиц противоположного знака $N_0 \neq 0$. Первое уравнение (4) проще привести к уравнению относительно плотности частиц, тогда распределение напряженности поля находится путем решения системы относительно плотности и напряженности поля. После исключения из системы скорости и перехода к плотности частиц получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\rho(\zeta)}{d\zeta} \left[\rho(\zeta)^2 + \frac{V^2}{\tau_0 V} + V^2 (\rho(\zeta)^2 - \rho_0^2) - 2V\rho_0 c_2 - c_2^2 \right] + \\ \quad + \rho(\zeta)^2 [V(\rho(\zeta) - \rho_0) + y(\zeta)\rho_0 - c_1] = 0; \\ \frac{dy(\zeta)}{d\zeta} = -\frac{4\pi}{\varepsilon_0} (\rho(\zeta) - \rho_0). \end{cases} \quad (9)$$

Первое уравнение системы является функциональным дифференциальным уравнением типа уравнения Абея первого рода с полиномиальными коэффициентами разных степеней и решается путем замены переменных. Предполагая $y(\zeta)$ параметром, можем найти точное решение и распределение плотности. Однако получается довольно громоздкое трансцендентное уравнение относительно плотности, из которого нельзя выразить $y(\zeta)$ явно и подставить во второе уравнение для определения распределения поля. Поэтому мы решали систему уравнений (9) численно, предполагая в качестве начальных условий неравновесное распределение плотности потока и напряженности поля вида (7). Результаты расчетов представлены на рис. 5. Как видно, распределение напряженности поля растет со временем по мере движения потока, оставаясь конечным в заданном распределении координат и времени.

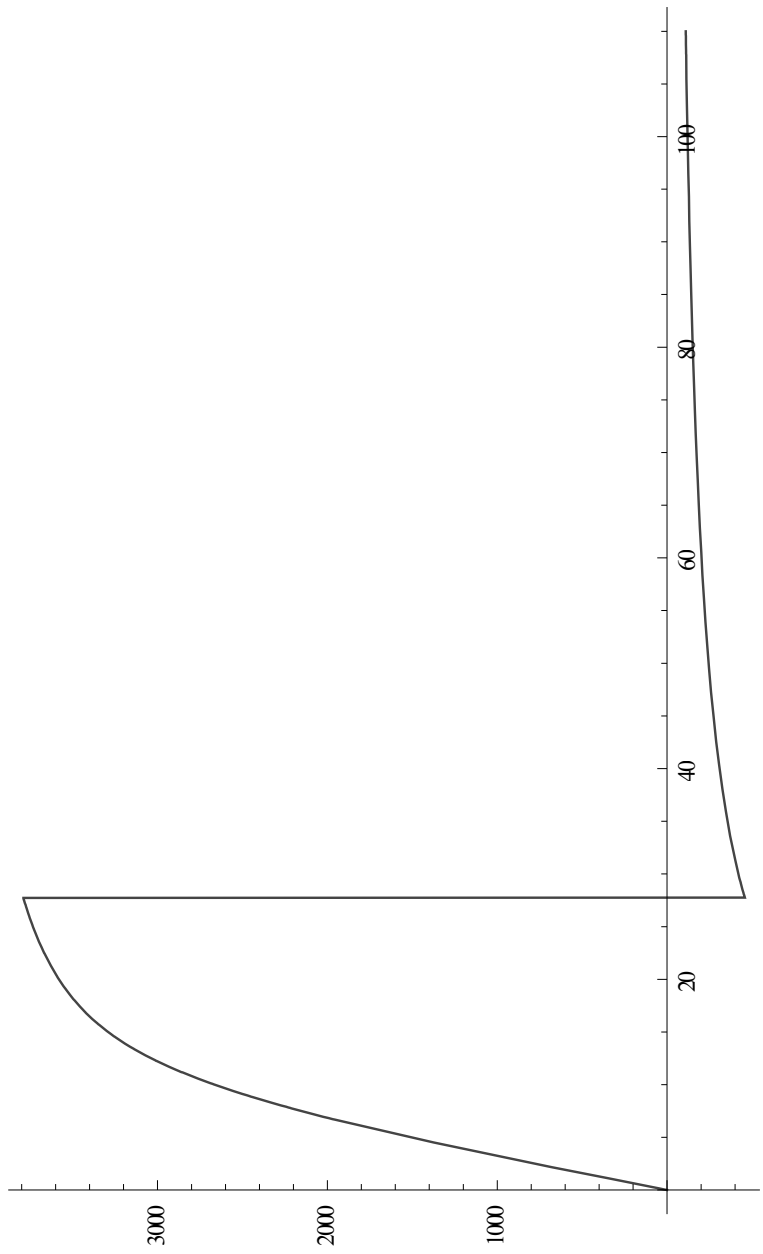


Рис. 3. Разрыв линии напряженности поля при скорости потока 2 ед

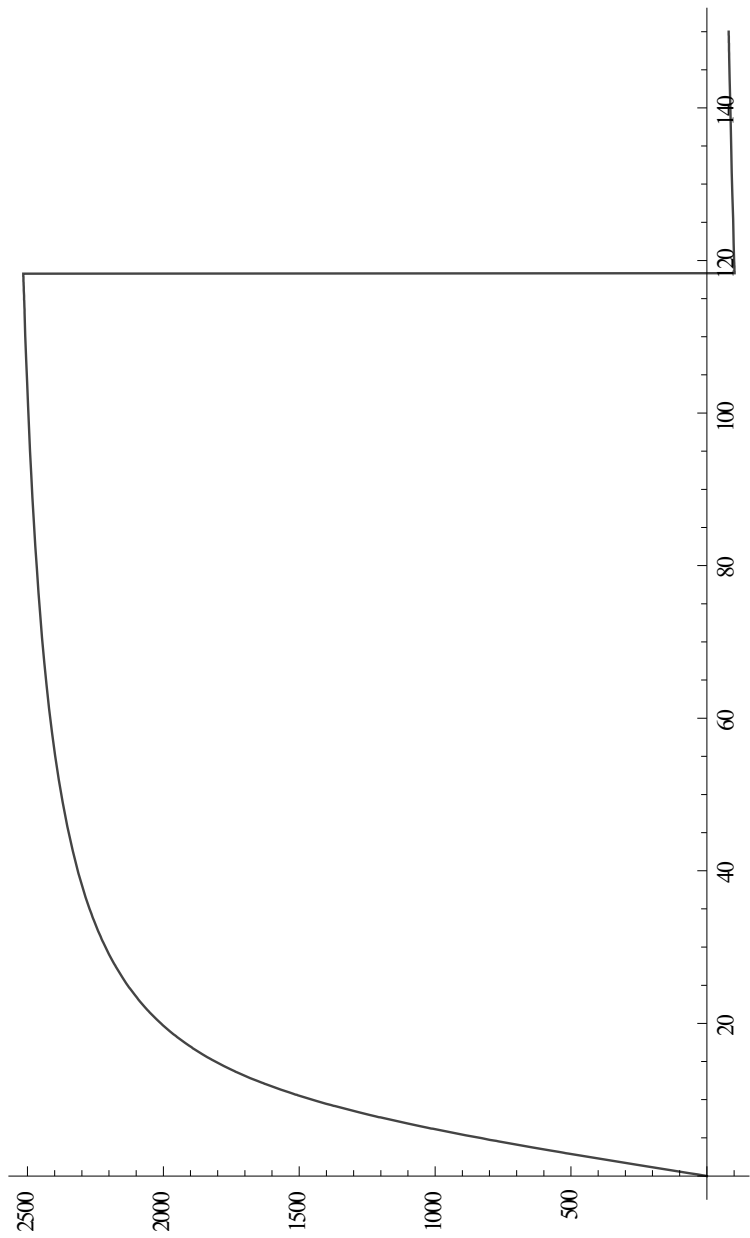


Рис. 4. Разрывы линии напряженности поля при увеличении скорости потока до 25 ед

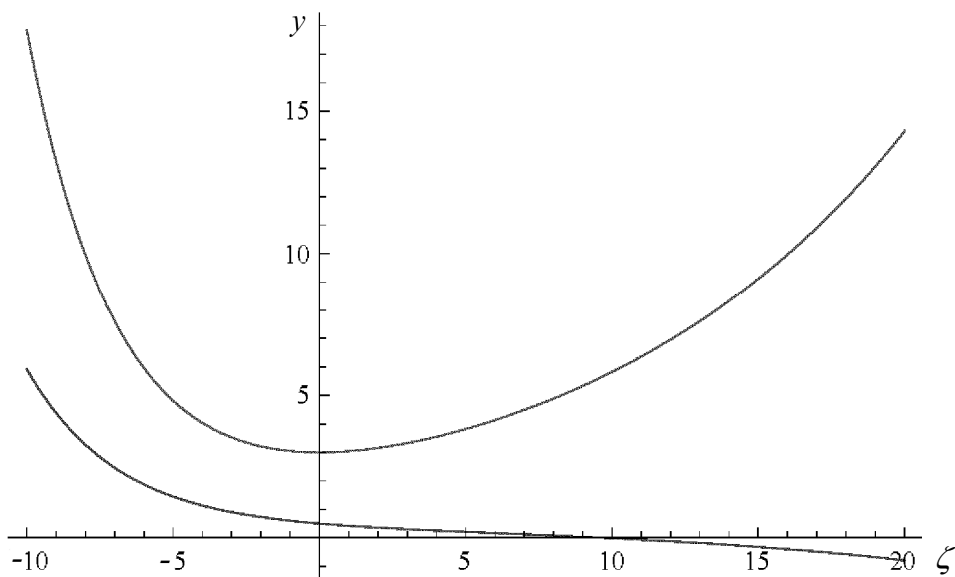


Рис. 5. Эволюция напряженности поля и плотности заряда в зависимости от координаты при движении потока

Фазовая траектория системы $y(\rho)$ представлена на рис. 6. Как и ожидается от нелинейной системы, траектория существенно зависит от начальных условий. В частности, при незначительном изменении начальных значений распределения плотности фазовая картина кардинально меняется, причем траектория не занимает определенной области фазового пространства, а существенно растянута по большому объему, что говорит о неустойчивом решении для поля при заданных неравновесных распределениях плотности частиц в потоке. Такое поведение хорошо описывает предлагаемую в работе [8] причину происхождения пробоя воздуха в грозовых облаках, вызванную переносом заряда гидродинамическим потоком и развитие неустойчивости по отношению к нарастанию электрического поля за счет кинетической энергии потока ионизованного газа.

С увеличением скорости напряженность поля нарастает быстрее, однако неравновесное распределение плотности быстрее становится однородным и рост напряженности поля замедляется.

В заключение необходимо отметить, что рассмотрение газодинамического потока в слабоионизованном газе требует учета некоторых граничных значений скорости — «электронной» и «ионной» скоростей звука. При достижении потоком скорости, сравнимой с «ионной» звуковой скоростью $v_i = \partial p_i / (m_i \partial n_i)$ (где p_i — давление в газе ионов, m_i , n_i — масса ионов и их концентрация на линии напряженности поля),

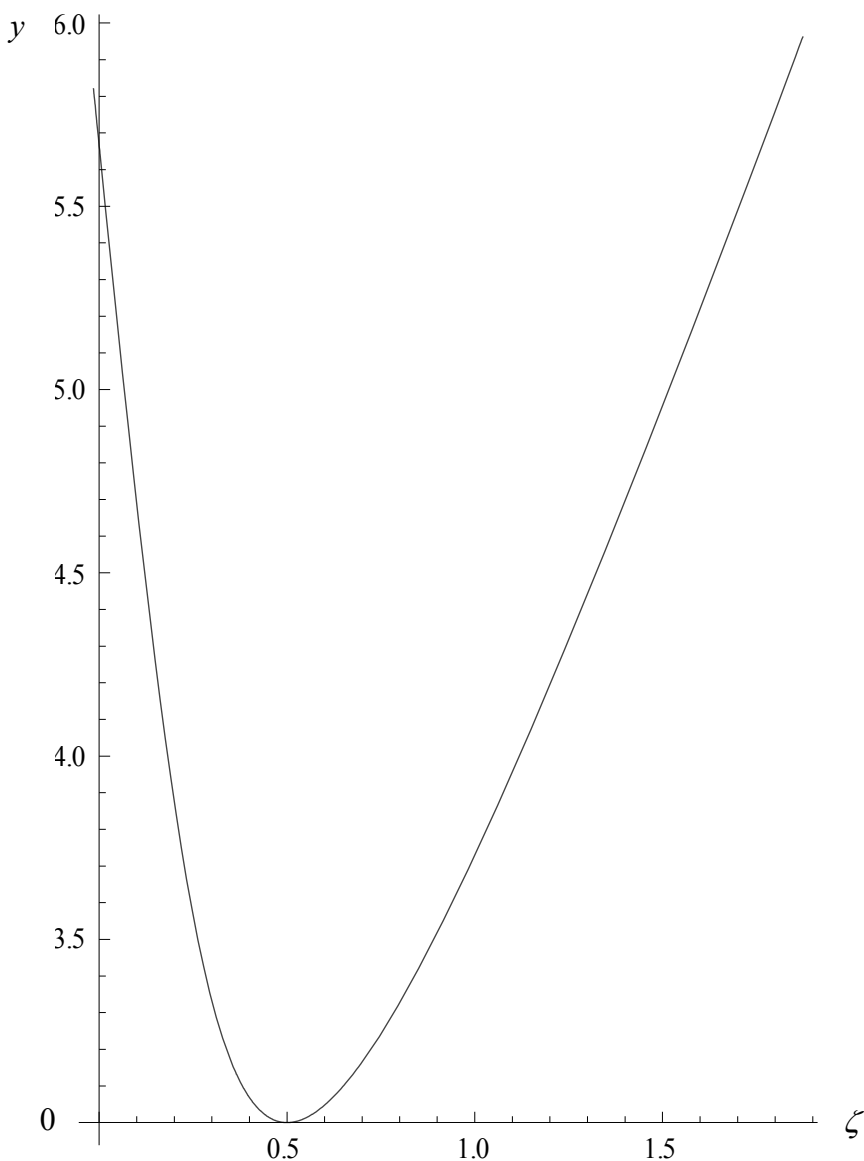


Рис. 6. Фазовая траектория $y(\rho)$ в зависимости от координаты потока

должны появиться разрывы, связанные с появлением ударных волн в ионном звуке. Давление в потоке обусловлено ростом поля и при учете сжимаемости газа получим соответственно линии разрыва напряженности поля как при достижении скорости ионного, так и электронного звука. Учет сжимаемости будет проведен в следующей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rakov V.A., Uman M.A. Lightning physics and effects. Cambridge University Press, 2003. 465 p.

2. MacGorman D. R., Rust W. D. *The Electrical Nature of Storms*, New York: Oxford Univ. Press, 1998. 432 p.
3. Mende S.B., Chang Y.S., Chen A.B. et al., in *Sprites, Elves and Intense Lightning Discharges*, ed. By M. Fullekrug, E.A. Mareev, M.J. Rycroft (Springer, Berlin, 2006).
4. Базелян Э.П., Райзер Ю.П. *Физика молнии и молниезащиты*. М., Физматлит, 2001. 320 с.
5. Raizer Y.P., *Gas Discharge Physics*, Springer, New York, 1991. 432 p.
6. Гуревич А.В., Зыбин К.П. Пробой на убегающих электронах и электрические разряды во время грозы // УФН. 2001. Т. 171. № 11. С. 1177—1199.
7. Гуревич А.В. Нелинейные явления в ионосфере // УФН. 2007. Т. 177. № 11. С. 1145—1177.
8. Пустовойт В.И. Об автомодельных решениях уравнений гидродинамики заряженной среды и проблема возникновения молний // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. Сер. Приборостроение. Спец. вып. Современные проблемы оплотехники. С. 16—31.
9. Brown K.A., Krehbiel P.R., Moore C.B., Sargent G.N. Electrical screening layers around charged clouds // *J. Geophys. Res.* 1971. Vol. 76. P. 2825—2835.
10. Global distributions and occurrence rates of transient luminous events / A.B. Chen, et al. // *J. Geophys. Res.* 2008. 113 p.
11. Meteorological aspects of elves and jets / A.B. Chen et al. // *Eos Trans. AGU*, 2008. Vol. 89(53), AE13A-0303.
12. A comparative study of the initial sequence of lightning in a small Florida thunderstorm / P.R. Krehbiel, R.Tenni, M. Brook et al. // *In Proceedings of the Seventh International Conference on Atmospheric Electricity*, 1984. P. 279—285.
13. Upward electrical discharges from thunderstorms / P. R. Krehbiel, J. A. Rioussset, V. P. Pasko et al. *Nat. Geosci.* 2008. 1(4). P. 233—237.
14. Three-dimensional fractal modeling of intracloud lightning discharge in a New Mexico thunderstorm and comparison with lightning mapping observations / J.A. Rioussset, V.P. Pasko, P.R. Krehbiel, R.J. Thomas et al. // *J. Geophys. Res.* 2007. Vol. 112. P. 15203.
15. Uman M.A. *The Lightning Discharge*, unabridged ed. Dover, Mineola, N. Y.: 2001. 377 p.
16. Marshall T.C., McCarthy M. P., Rust W.D. Electric field magnitudes and lightning initiation in thunderstorms // *J. Geophys. Res.* 1995. Vol. 100 (7), P. 97—104.
17. Mazur V., Ruhnke L. H. Model of electric charges in thunderstorms and associated lightning // *J. Geophys. Res.* 1998. Vol. 103(23). P. 299—308.

Статья поступила в редакцию 16.10.2012