УДК 535.317

Расчет параксиальных характеристик линз с различным распределением показателя преломления аналитическим и численным методами

Т.В. Исаева[1], А.Л. Сушков[1], М.К. Тарабрин[1]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия.

Проанализированы результаты расчета параксиальных характеристик линз с осевой и радиальной неоднородностями показателя преломления численным и аналитическим методами. Обоснован критерий достаточного количества коэффициентов числовых рядов, представляющих в неоднородной среде функции высоты луча и угла луча с оптической осью.

E-mail: rl-3bmstu@yandex.ru

Ключевые слова: *градиент показателя преломления, линза с неоднородным показателем преломления, методы расчета параксиальных характеристик линзы с неоднородным показателем преломления.*

Оптические элементы с различными видами распределения показателя преломления (РПП) находят все более широкое применение в современных приборах. Однако исследование влияния параметров РПП и толщин неоднородных линз на аберрации оптической системы посредством расчета хода реальных лучей затруднено вследствие большого объема вычислений. Альтернативным подходом является анализ аберраций в зейделевой области, требующий знания параметров первого и второго вспомогательных (параксиальных) лучей. Для общего вида РПП $n(x, y, z)$ коэффициенты рядов по координате z, представляющих высоту и угол луча в неоднородной среде, можно определять численным методом, разработанным Д. Муром*.

Цель работы — определить область применимости численного метода расчета для линз с осевым и радиальным РПП различной конфигурации поверхностей и толщины. Критерий применимости универсального метода основан на сравнении с результатами, полученными альтернативным методом, в котором функции высоты и угла луча определены аналитически.

Задачей исследования являлся сравнительный анализ величин параксиальных характеристик линзы (фокусного расстояния и заднего фокального отрезка) с наличием в стекле линзы осевого или радиального РПП с различной конфигурацией поверхностей линзы и определение оптимального количества коэффициентов ряда, пред-

* Сушков А.Л. Алгоритм расчета зейделевых аберраций для оптической среды с распределенным показателем преломления // Известия вузов: Приборостроение. 2012. № 5. Т. 55. С. 64—72.

ставляющего функцию угла луча с оптической осью и высоту луча в неоднородной среде.

Обозначим функции углов наклона с оптической осью и высот вспомогательных лучей $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $h(z)$, $H(z)$. В неоднородной среде $\alpha(z)=\dot{h}(z),\ \beta(z)=\dot{H}(z)$.

В общем случае функция показателя преломления оптической среды представляется в виде степенного ряда:

$$n(z,y)=n_0(z)+n_1(z)y^2+n_2(z)y^4+..., \tag{1}$$

где $n_0(z)$, $n_1(z)$, $n_2(z)$ также являются степенными рядами:

$$\begin{aligned} n_0(z)&=n_{00}+n_{01}z+n_{02}z^2;\\ n_1(z)&=n_{10}+n_{11}z+n_{12}z^2;\\ n_2(z)&=n_{20}+n_{21}z+n_{22}z^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Осевое РПП имеет вид $n(z)=n_{00}+n_{01}z+n_{02}z^2+...$, а радиальное РПП: $n(y)=n_{00}+n_{10}y^2+n_{20}y^4+...$

Коэффициенты n_{01}, n_{02}, n_{10}, n_{20} имеют размерности согласно степеням z и y: мм$^{-1}$, мм$^{-2}$, мм$^{-4}$.

Функции углов и высот лучей представляются в виде степенных рядов по координате z:

$$\begin{gathered} h(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3...;\ \ H(z)=B_0+B_1z+B_2z^2+B_3z^3...;\\ \alpha(z)=A_1+2A_2z+3A_3z^2...;\ \ \beta(z)=B_1+2B_2z+3B_3z^2..., \end{gathered} \tag{3}$$

где A_0 и A_1 — высота и угол первого вспомогательного луча на входе в неоднородную среду; B_0, B_1 — высота и угол второго вспомогательного луча с оптической осью на входе в неоднородную среду.

Коэффициенты степенных рядов вычисляются по рекурсивной формуле[*]:

$$A_m=$$
$$=\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{n=m-1}\left[2A_{n-2}n_{1,m-n}-n(n-1)A_nn_{0,m-n}-(m-n+1)(n-1)A_{n-1}n_{0,m-n+1}\right]-\\&-(m-1)A_{m-1}n_{01}+2A_{m-2}n_{10}\end{aligned}\right\}/$$
$$/\,m(m-1)n_{00}. \tag{4}$$

Для осевого РПП формула (4) имеет следующий вид:

[*] Сушков А.Л. Указ. соч.

$$A_m = \frac{\sum_{n=2}^{n=m-1}\left[-n(n-1)A_n n_{0,\,m-n} - (m-n+1)(n-1)A_{n-1}n_{0,\,m-n+1}\right] - (m-1)A_{m-1}n_{01}}{m(m-1)n_0}. \quad (5)$$

После раскрытия (5) получим

$$A_2 = -A_1\frac{n_{01}}{2n_{00}};$$
$$A_3 = \frac{-A_1 n_{02} - 2A_2 n_{01}}{3n_{00}};$$
$$A_4 = \frac{-A_1 n_{03} - 2A_2 n_{02} - 3A_3 n_{01}}{4n_{00}}; \quad (6)$$
$$A_5 = \frac{-2A_2 n_{03} - 3A_3 n_{02} - 4A_4 n_{01}}{5n_{00}};$$
$$A_6 = \frac{-3A_3 n_{03} - 4A_4 n_{02} - 5A_5 n_{01}}{6n_{00}} \ldots$$

Для радиального РПП формула (4) имеет вид

$$A_m = \frac{2A_{m-2}n_{10}}{m(m-1)n_{00}}. \quad (7)$$

Раскрытие (7) дает:

$$A_2 = 2A_0\frac{n_{10}}{2n_{00}};$$
$$A_3 = 2A_1\frac{n_{10}}{6n_{00}};$$
$$A_4 = 2A_2\frac{n_{10}}{12n_{00}};$$
$$A_5 = 2A_3\frac{n_{10}}{20n_{00}} \ldots$$

Для обоих типов РПП коэффициенты B_m вычисляются по формуле для A_m с заменой A_m на B_m.

Для проверки сходимости рядов на каждой поверхности вычисляется параксиальный инвариант $I = n_k(H_k\alpha_k - h_k\beta_k)$, где n_k — осевой показатель преломления непосредственно перед k-й поверхностью. Если значения инварианта идентичны, то ряды сходятся и расчет продолжается. В случае несовпадения значений необходимо повысить точность расчета, увеличив число членов в разложении $h(z)$, $H(z)$.

Аналитический метод заключается в расчете параметров лучей по формулам углов и высот, полученным в результате решения дифференциального уравнения хода луча для параксиальной области.

Для осевого и радиального РПП формулы преломления луча на первой и второй поверхностях имеют общий вид. Примем для удобства обозначение $n_{00} = n_0$, тогда, если h_1, α_1 — исходные значения высоты луча и угла с оптической осью, d — толщина линзы, то

$$\alpha_2 = h_1 \rho_1 \frac{(n_0 - 1)}{n_0};$$
$$\alpha_3 = h_2 \rho_2 (1 - n_z) + \alpha_{22} n_z, \tag{8}$$

где $\rho_1 = 1/r_2$; $\rho_2 = 1/r_1$; α_{22} — угол на выходе из градиентной среды; n_z — значение ПП на выходе из градиентной среды.

Заднее фокусное расстояние и задний фокальный отрезок линзы определим по формулам

$$f' = \frac{h_1}{\alpha_3}; \quad S'_{F'} = \frac{h_2}{\alpha_3}.$$

Для осевого РПП функции высоты луча и угла луча в оптической среде имеют следующий вид:

$$h_2(z) = h_1 - n_0 \alpha_2 \int_0^d \frac{1}{n(z)} dz;$$
$$\alpha_{22}(z) = \frac{\alpha_2 n_0}{n_z}. \tag{9}$$

Фокусное расстояние f' линзы с учетом формул (8) и (9) описывается выражением

$$f = \frac{1}{\rho_1 (n_0 - 1) - \rho_2 (n_z - 1) + \rho_1 \rho_2 (n_0 - 1)(n_z - 1) \int_0^d \frac{1}{n(z)} dz}. \tag{10}$$

Для радиального РПП ($n_{10} < 0$) имеем функции высоты луча и угла с осью:

$$h_2(z) = h_1 \cos(tz) - \frac{\alpha_2}{t} \sin(tz);$$
$$\alpha_{22}(z) = \alpha_2 \cos(tz) + h_1 t \sin(tz),$$

где $t = \sqrt{\frac{2|n_{10}|}{n_{00}}}$.

Аналитическое выражение для фокусного расстояния линзы при наличии в стекле радиального РПП имеет вид

$$f' = \frac{1}{\left(n_{00}-1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)\cos\left(td\right)+\frac{\rho_1\rho_2\left(n_{00}-1\right)^2}{n_{00}t}\sin\left(td\right)+n_{00}t\sin\left(td\right)}. \tag{11}$$

Критерием правильности расчета высоты луча и угла луча с оптической осью в линзе является совпадение обобщенного параксиального инварианта на каждой поверхности линзы с точностью до 4—5-го знака. При выполнении этого условия результат с точностью до 3-го знака совпадает с результатом аналитического расчета.

В качестве объектов исследования из патентной базы США были выбраны линзы с осевым и радиальным распределением показателя преломления: для осевого РПП — US Patent № 5, 239, 413 «Objective lens system for microscopes», 1993; для радиального РПП — US Patent № 6, 519, 098 «Objective lens system», US Patent № 4, 859, 040 «Optical system having gradient-index lens and method for correction aberrations» и US Patent № 5, 912, 770 «Achromatic lens system». Размеры радиусов кривизны поверхностей и толщин линз в миллиметрах.

Линзы с осевым РПП

Линза 1. Положительная двояковыпуклая линза (рис. 1):

$\rho_1 = 9{,}421\cdot10^{-4}$; $d = 4{,}1731$; $n_{02} = 0{,}66018\cdot10^{-3}$;
$\rho_2 = -0{,}101$;
$n_0 = 1{,}51742$;
$n_{01} = 0{,}44269\cdot10^{-1}$; $n_z = 1{,}71365$.

Рис. 1. Геометрические параметры линзы 1

Аналитический результат: f' = 13,798; $S'_{f'} = 13{,}780$.

Численный результат (m = 3):

$\alpha_1 = 0; \quad h_1 = 13,798;$

$h_2 = A_0 + A_1 d + A_2 d^2 + A_3 d^3 = 13,78042;$

$\alpha_{22} = -(A_1 + 2A_2 d + 3A_3 d^2) = 3,92495 \cdot 10^{-3};$

$\alpha_3 = 1,00000;$

$f = 13,798; \quad S'_{f'} = 13,780.$

Обобщенные параксиальные инварианты на 1-й и 2-й поверхностях линзы:

$I_1 = (H_1\alpha_1 - h_1\beta_1) = -13,79784;$

$I_2 = n_z(H_2\alpha_{22} - h_2\beta_{22}) = -13,79799;$

$\Delta I = I_1 - I_2 = 0,00015.$

Линза 2. Вогнуто-выпуклый мениск (рис. 2):

$\rho_1 = -0,229; \quad n_{01} = 0,64233 \cdot 10^{-2};$

$\rho_2 = -0,162; \quad d = 3,4472;$

$n_0 = 1,59799; \quad n_z = 1,62013.$

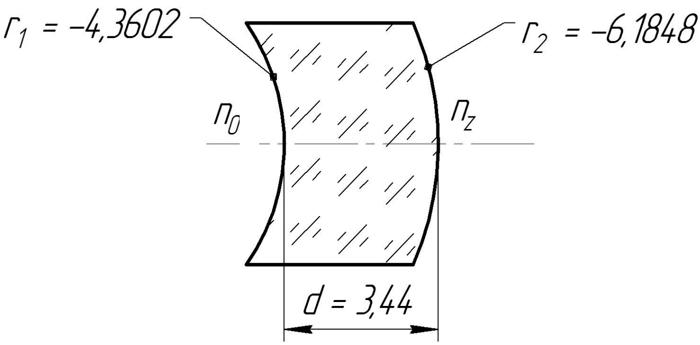

Рис. 2. Геометрические параметры линзы 2

Аналитический результат: $f' = -134,785; \; S'_{f'} = -174,388.$

Численный результат ($m = 3$):

$f = -134,785; \quad S'_{f'} = -174,388;$

$I_1 = (H_1\alpha_1 - h_1\beta_1) = 134,78474;$

$I_2 = n_z(H_2\alpha_{22} - h_2\beta_{22}) = 134,78474;$

$\Delta I = I_1 - I_2 = 0,000005.$

Линза 3. Линза отрицательная двояковогнутая с увеличенной толщиной и полиномом РПП 3-й степени (рис. 3):

$\rho_1 = -0,298; \quad d = 11,1;$

$\rho_2 = 0,038;$

$n_0 = 1,64322;$

$n_{01} = -0,38745 \cdot 10^{-2}$;

$n_{02} = -0,18639 \cdot 10^{-3}$;

$n_{03} = 0,16994 \cdot 10^{-4}$;

$n_z = 1,60049$.

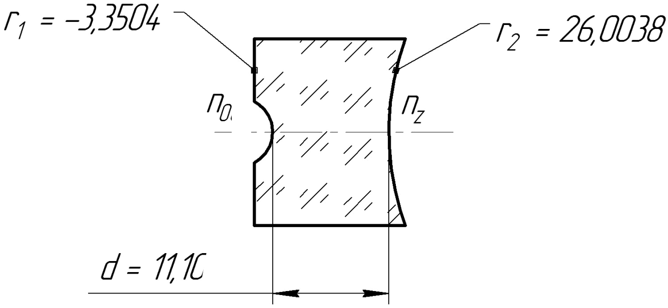

Рис. 3. Геометрические параметры линзы 3

Аналитический результат: $f' = -4,074$; $S'_{f'} = -9,435$.
Численный результат (m = 7):

$$f = \frac{h_1}{\alpha_3} = -4,074; \quad S'_{f'} = \frac{h_2}{\alpha_3} = -9,435;$$

$$I_1 = (H_1\alpha_1 - h_1\beta_1) = 4,07395;$$

$$I_2 = n_z(H_2\alpha_{22} - h_2\beta_{22}) = 4,07390;$$

$$\Delta I = I_1 - I_2 = 0,000048.$$

При m = 6 $\Delta I = 0,0007298$; m = 5, $\Delta I = -0,000891$.

Линза 4. Положительная двояковыпуклая линза (рис. 4):

$\rho_1 = 0,038$; $n_{02} = -0,75 \cdot 10^{-2}$;
$\rho_2 = -0,092$; $n_{03} = 0,52063 \cdot 10^{-3}$;
$n_0 = 1,67$; $d = 3,5$;
$n_{01} = 0,76794 \cdot 10^{-1}$; $n_z = 1,86923$.

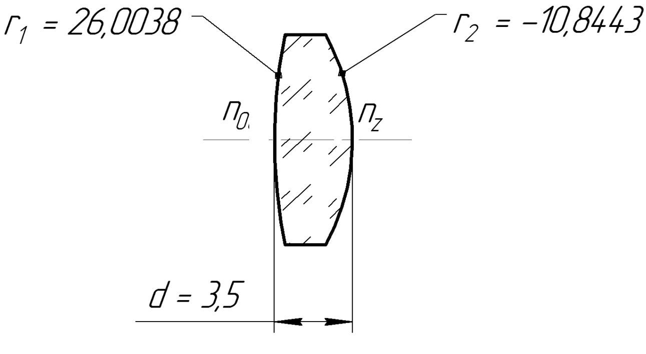

Рис. 4. Геометрические параметры линзы 4

Аналитический результат: $f' = 9{,}818$; $S'_{f'} = 9{,}320$.
Численный результат ($m = 10$):

$f = 9{,}818$; $S'_{f'} = 9{,}320$;

$I_1 = (H_1\alpha_1 - h_1\beta_1) = -9{,}81797$;

$I_2 = n_z(H_2\alpha_{22} - h_2\beta_{22}) = -9{,}81762$;

$\Delta I = I_1 - I_2 = -0{,}000354$.

При $m = 9$ $\Delta I = 0{,}0009097$; при $m = 8$ $\Delta I = -0{,}002335$; при $m = 7$ $\Delta I = 0{,}005938$.

Линзы с радиальным РПП

Линза 5. Отрицательная двояковогнутая линза (рис. 5):

$\rho_1 = -0{,}08883$;

$\rho_2 = 0{,}59959$;

$d = 1{,}88$;

$n_{00} = 1{,}72$;

$n_{10} = -0{,}08746$.

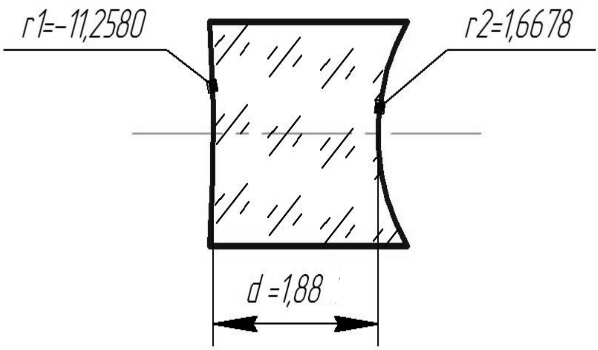

Рис. 5. Геометрические параметры линзы 5

Аналитический результат: $f' = -7{,}821$; $S'_{f'} = -6{,}970$.
Численный результат ($m = 7$):

$f = -7{,}821$; $S'_{f'} = -6{,}970$;

$I_1 = (H_1\alpha_1 - h_1\beta_1) = -1{,}00000$;

$I_2 = n_z(H_2\alpha_{22} - h_2\beta_{22}) = -1{,}000002417$;

$\Delta I = I_1 - I_2 = -0{,}000002417$.

Линза 6. Вогнуто-выпуклый мениск (рис. 6):

$\rho_1 = -0{,}00526$; $n_{00} = 1{,}80$;

$\rho_2 = -0{,}00845$; $n_{10} = -3{,}9767410 \cdot 10^{-4}$;

$d = 12{,}63$.

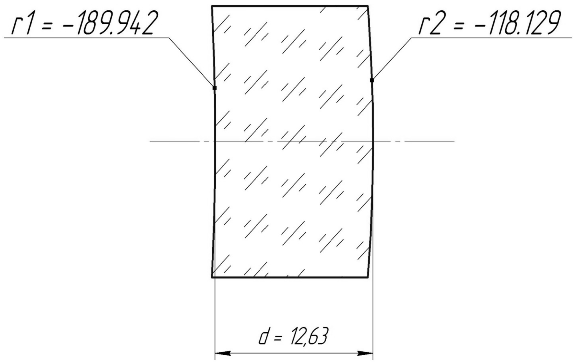

Рис. 6. Геометрические параметры линзы 6

Аналитический результат: $f' = 79{,}389$; $S'_{f'} = 78{,}926$.
Численный результат ($m = 5$):
$f' = 79{,}392$; $S'_{f'} = 78{,}929$;

$$I_1 = (H_1\alpha_1 - h_1\beta_1) = -1{,}00000;$$

$$I_2 = n_{00}(H_2\alpha_{22} - h_2\beta_{22}) = -0{,}99999806;$$

$$\Delta I = I_1 - I_2 = -0{,}00000194.$$

Линза 7. Линза Вуда (рис. 7):
$\rho_1 = -0{,}00000$; $n_{00} = 1{,}6640$;
$\rho_2 = 0{,}00000$; $n_{10} = -7{,}5 \cdot 10^{-3}$;
$d = 6{,}95$.
Аналитический результат: $f' = 10{,}327$; $S'_{f'} = 8{,}160$.
Численный результат ($m = 7$):
$f' = 10{,}327$; $S'_{f'} = 8{,}160$;

$$I_1 = (H_1\alpha_1 - h_1\beta_1) = -1{,}00000;$$

$$I_2 = n_{00}(H_2\alpha_{22} - h_2\beta_{22}) = -1{,}00000514;$$

$$\Delta I = I_1 - I_2 = 0{,}00000514.$$

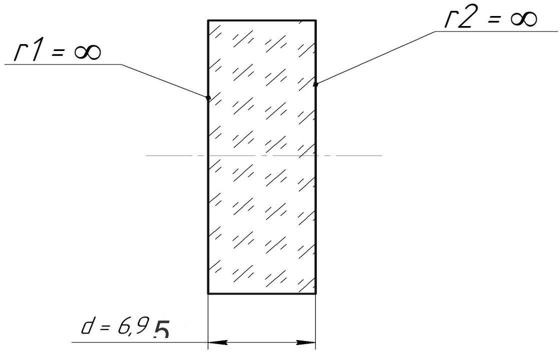

Рис. 7. Геометрические параметры линзы 7

Таким образом, установлено, что в случае осевого РПП в линзе на количество коэффициентов ряда, представляющего высоту луча и угол луча с оптической осью, влияет толщина линзы и характер РПП. С увеличением толщины линзы при значительной нелинейности РПП для сохранения точности расчета необходимо увеличить количество коэффициентов ряда. Так, для линз 1 и 2 достаточно представить функции высоты и угла луча рядом по координате z до 3—4-й степени, при увеличенной толщине потребовалось увеличить степень ряда до 7-й, а при РПП с выраженной нелинейностью РПП — до 10-й степени.

Для радиального РПП на количество коэффициентов разложения ($m = 5\ldots7$) влияет значение градиента показателя преломления (модуль коэффициента n_{10}).

Статья поступила в редакцию 16.10.2012