УДК 535, 514

М. Д. К о в а л е в

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОСТОЯННОЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Получены формулы для числа электромагнитных ТЕ- и ТМ-мод в плоском диэлектрическом волноводе с произвольным числом слоев, имеющих произвольные вещественные показатели преломления. Подсчет числа мод выполнен на основе геометрической трактовки дисперсионного уравнения, полученного методом характеристических матриц.

E-mail: kovalev.math@mtu-net.ru

Ключевые слова*: *ТЕ- и ТМ-моды, плоский многослойный диэлектрический волновод.

Проанализируем классическую модель [1, 2] распространения электромагнитной волны заданной частоты ω в плоском диэлектрическом волноводе из $m+1\geq 3$ слоев. Пусть крайние слои бесконечной толщины имеют показатели преломления n_1 и $n_{m+1} \leq n_1$. Если среди внутренних слоев имеется слой с показателем преломления большим n_1, в таком волноводе возможны собственные поляризованные электромагнитные волны данной частоты. Допустим, что наибольший показатель преломления $n_k > n_1$ имеется в k-м слое. Плоскости слоев перпендикулярны оси Ox и плоскость $x = x_j$ разделяет j-й и $(j + 1)$-й слои. В случае ТЕ-моды задача сводится к нахождению поперечной напряженности E_y электрического поля плоской гармонической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси Oz в слое с постоянным показателем преломления. Уравнение для определения напряженности E_y [1, 2] имеет вид

$$\frac{c^2}{\omega^2}\frac{d^2E_y}{dx^2}+n_j^2E_y=\beta^2E_y,$$

где c — скорость света в вакууме; β — эффективный показатель преломления (постоянная распространения) многослойного волновода.

Хорошо известные в каждом слое решения этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами сшиваются на граничных плоскостях слоев с помощью условий непрерывности величин E_y и $\dfrac{dE_y}{dx}$. Если при некотором значении β получается решение, у которого в крайних бесконечных слоях поле экспоненциально убывает на бесконечности (краевые условия), значение эффективного показателя преломления β называют собственным, а соответствующее решение — собственной ТЕ-модой волновода. Число ТЕ-мод в волноводе, состоящем из конечного числа слоев, конечно [3]. Определение этого числа — одна из основных задач теории волноводов.

Отметим, что поставленная задача решается весьма успешно численными методами, однако не обходится без затруднений. Дело в том, что весьма часто возникают очень близкие собственные значения постоянной распространения. И они могут быть не распознаны при недостаточной точности вычислений. Полученный автором этой статьи результат, основанный на довольно кропотливом аналитическом рассмотрении, позволяет точно подсчитать число собственных значений и определяет ход решения данной задачи.

В работе [4] решена математически сходная задача вычисления числа энергетических уровней квантовой частицы в кусочно-постоянном потенциальном поле. Используемый автором настоящей работы метод значительно упрощен и усовершенствован. Основным результатом являются эффективные формулы, позволяющие подсчитать число ТЕ- и ТМ-мод в произвольном плоском диэлектрическом волноводе. Подробно рассмотрен случай ТЕ-волн.

Нам удобно перейти к безразмерной приведенной единице длины $\xi = \dfrac{2\pi n_1}{\lambda_1}x$, где λ_1 — длина волны света в слое с показателем преломления n_1. При этом уравнение для ТЕ-волн в слое принимает вид

$$\frac{d^2E_y}{d\xi^2} + \eta_j^2 E_y = \sigma^2 E_y,$$

где $\eta_j = \dfrac{\eta_j}{n_1}$ — приведенный показатель преломления, который может быть меньше единицы (например, $\eta_{m+1} \le 1$); $\sigma = \dfrac{\beta}{n_1}$ — приведенный эффективный показатель преломления.

Геометрическая трактовка дисперсионного уравнения. Запишем в удобной для нас форме известное уравнение (называемое дисперсионным) для собственных значений постоянной распространения, получаемое методом характеристических матриц. Пусть $t_j, 2 \le j \le m$, — приведенная толщина j-го ограниченного слоя. Назовем величину $q_j = \sqrt{\sigma^2 - \eta_j^2}$ характеристикой j-го слоя волновода. Она зависит от величины σ и может быть либо вещественной, либо мнимой. Пусть $\alpha = \max \eta_j = \eta_k$, а $\gamma_j = q_j t_j$. Построим последовательно для каждого слоя, начиная со второго, пару величин $a_j, b_j, 2 \le j \le m+1$. А именно, пусть $a_2 = \sqrt{\sigma^2 - 1}$, $b_2 = \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}$. Далее эти величины определяются формулами

$$a_{j+1} = a_j \operatorname{ch} \gamma_j + b_j \frac{q_j}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}} \operatorname{sh} \gamma_j$$

$$b_{j+1} = a_j \frac{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}{q_j} \operatorname{sh} \gamma_j + b_j \operatorname{ch} \gamma_j.$$

Запишем эти выражения в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix} = V_j(\sigma) \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix},$$

где матрица $V_j(\sigma)$ унимодулярна. Причем, если $q_j \to 0$ при $\sigma \to \sigma_0$, то, согласно условию непрерывности, также можно считать, что

$$V_j(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_j \sqrt{\alpha^2 - \sigma_0^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица $V_j(\sigma)$ при $1 < \sigma < \alpha$ всегда вещественна. Действительно, если $q_j(\sigma) = iq$ и, соответственно, $\gamma_j(\sigma) = i\gamma$, где величина q и γ вещественны, имеем

$$V_j(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\dfrac{q}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}} \sin\gamma \\ \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}{q} \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Таким образом, и величины a_j, b_j также всегда вещественны при $1 < \sigma < \alpha$.

Аналогично построим для каждого слоя, начиная с m-го, пару величин A_j, B_j. В этом случае одни величины можно выразить через другие по формуле

$$\begin{pmatrix} A_{j-1} \\ B_{j-1} \end{pmatrix} = V_j \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix},$$

и поскольку $A_m = \sqrt{\sigma^2 - \eta_{m+1}^2}$ и $B_m = \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}$ вещественны, величины $A_j, B_j, 1 \le j < m$, также вещественны при $\alpha > \sigma > 1$.

Оказывается, что выбирая произвольно в качестве выделенного слой с номером $2 \le j \le m$, дисперсионное уравнение можно записать в виде скалярного произведения векторов:

$$(\mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{A}_j^0) = 0, \tag{1}$$

где вектор $\mathbf{a}_{j+1}$ имеет координаты (a_{j+1}, b_{j+1}), а вектор $\mathbf{A}_j^0$ можно получить зеркальным отражением вектора $\mathbf{A}_j = (A_j, B_j)$ от прямой $y = x$.

Подчеркнем, что из невырожденности матриц $V_j(\sigma)$ следует неравенство каждого вектора $\mathbf{a}_j(\sigma)$, $\mathbf{A}_j(\sigma)$, $1 < \sigma < \alpha$, нулевому вектору.

Совпадение корней дисперсионного уравнения с множеством собственных значений постоянной рапространения. Докажем, что множество корней уравнения (1) совпадает с множеством собственных значений эффективного показателя преломления. Обозначим левую часть уравнения (1) через $\tilde{F}(\sigma)$. Установим следующий факт.

Лемма 1. Величины $\tilde{F}(\sigma)$ не зависят от номера j выделенного слоя. Действительно,

$$\mathbf{a}_{j+1} = V_j \mathbf{a}_j,\ \mathbf{A}_j^0 = O\mathbf{A}_j,\ \mathbf{A}_{j-1} = V_j \mathbf{A}_j,$$

где под векторами мы понимаем столбцы их координат, а матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\tilde{F}_j(\sigma)$ и $\tilde{F}_{j-1}(\sigma)$ можно записать

$$(\mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{A}_j^0) = \mathbf{a}_{j+1}^{\mathrm{т}} \mathbf{A}_j^0 = \mathbf{a}_{j+1}^{\mathrm{т}} O\mathbf{A}_j = \mathbf{a}_j^{\mathrm{т}} V_j^{\mathrm{т}} O\mathbf{A}_j$$

и $(\mathbf{a}_j, \mathbf{A}_{j-1}^0) = \mathbf{a}_j^{\mathrm{т}} O\mathbf{A}_{j-1} = \mathbf{a}_j^{\mathrm{т}} = \mathbf{a}_j^{\mathrm{т}} OV_j\, \mathbf{A}_j$.

Последние выражения равны между собой, поскольку верно матричное равенство $V_j^{\mathrm{т}} O = OV_j$. Так как матрица OV_j симметрическая, $OV_j = (OV_j)^{\mathrm{т}} = V_j^{\mathrm{т}} O^{\mathrm{т}} = V_j^{\mathrm{т}} O$. Лемма доказана.

Как известно [2, 5], дисперсионное уравнение, полученное методом характеристических матриц, имеет вид

$$D_m(\sigma) = q_1(c_{11} - q_{m+1}c_{12}) - c_{21} + q_{m+1}c_{22} = 0, \qquad (2)$$

где c_{ij} — элементы квадратной матрицы второго порядка C, равной произведению $M_2 M_3 \ldots M_m$ характеристических матриц слоев. Для j-го слоя матрица

$$M_j = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma_j & -\dfrac{1}{q_j}\operatorname{sh}\gamma_j \\ -q_j \operatorname{sh}\gamma_j & \operatorname{ch}\gamma_j \end{pmatrix}.$$

В работе [6] доказано, что множество корней j-го слоя на интервале $(1, \alpha)$ в точности совпадает с множеством собственных значений эффективного показателя преломления. Из приведенной ниже теоремы следует справедливость аналогичного утверждения и для уравнения $\tilde{F}_j(\sigma) = 0$.

Теорема 1. Для любого числа $m \geq 3$ слоев и любого $1 \leq j \leq m$ справедливо равенство $(\mathbf{a}_{j+1}, \mathbf{A}_j^0) = \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}\, D_m$.

В силу леммы 1 достаточно доказать равенство $\tilde{F}_m = (\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{A}_m^0) = \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}\, D_m$. Пусть $R_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_j \end{pmatrix}$. Тогда справедливо равенство

$$V_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma_j & \operatorname{sh}\gamma_j \\ \operatorname{sh}\gamma_j & \operatorname{ch}\gamma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_j \end{pmatrix} = R_j^{-1} U_j R_j.$$

Отметим, что величины r_j и гиперболические функции могут принимать мнимые значения, хотя сами матрицы и вещественны.

Используя равенства $\mathbf{a}_{m+1}^{\mathrm{т}} = \mathbf{a}_2^{\mathrm{т}} V_2^{\mathrm{т}} \ldots V_m^{\mathrm{т}}$ и $V_j^{\mathrm{т}} = R_j^{\mathrm{т}} U_j^{\mathrm{т}} (R_j^{-1})^{\mathrm{т}} = R_j U_j R_j^{-1}$, вычисляем

$$\tilde{F}_m = \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}\, a_{m+1} + q_{m+1} b_{m+1} = (a_{m+1} \;\; b_{m+1}) \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2} \\ q_{m+1} \end{pmatrix} =$$

$$= (q_1 \;\; \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}) V_2^{\mathrm{т}} \ldots V_m^{\mathrm{т}} \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2} \\ q_{m+1} \end{pmatrix} =$$

$$= (q_1 \;\; q_2) U_2 R_2^{-1} R_3 U_3 \dots U_m \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2} \\ \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}\, q_{m+1}}{q_m} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}{q_m} (q_1 \;\; q_2)\, \Pi \begin{pmatrix} q_m \\ q_{m+1} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где

$$\Pi = U_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{q_3}{q_2} \end{pmatrix} U_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{q_4}{q_3} \end{pmatrix} \dots U_{m-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{q_m}{q_{m-1}} \end{pmatrix} U_m .$$

Теперь найдем левую часть уравнения (2). Характеристическую матрицу M_j слоя нам удобно представить следующим образом:

$$M_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\gamma_j & \mathrm{sh}\gamma_j \\ \mathrm{sh}\gamma_j & \mathrm{ch}\gamma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{q_j} \end{pmatrix} = T_j U_j T_j^{-1}. \qquad (4)$$

Имеем

$$D_m = (c_{11} \;\; c_{12}) \begin{pmatrix} q_1 \\ -q_1 q_{m+1} \end{pmatrix} + (c_{21} \;\; c_{22}) \begin{pmatrix} -1 \\ q_{m+1} \end{pmatrix} =$$

$$= [q_1 (c_{11} \;\; c_{12}) - (c_{21} \;\; c_{22})] \begin{pmatrix} 1 \\ -q_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Используя равенства

$$(c_{11} \;\; c_{12}) = (1 \;\; 0)\, C,$$

$$(c_{21} \;\; c_{22}) = (0 \;\; 1)\, C,$$

запишем

$$D_m = [q_1 (1 \;\; 0)\, C - (0 \;\; 1)\, C] \begin{pmatrix} 1 \\ -q_{m+1} \end{pmatrix} =$$

$$= (q_1 \;\; -1)\, C \begin{pmatrix} 1 \\ -q_{m+1} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Применив выражение (4) с учетом

$$T_{j-1}^{-1}T_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{q_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{q_j}{q_{j-1}} \end{pmatrix},$$

получим

$$C = T_2 U_2 T_2^{-1} T_3 U_3 T_3^{-1} \dots T_{m-1}^{-1} T_m U_m T_m^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{pmatrix} \Pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{q_m} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Подставляя выражение (6) в формулу (5), получаем

$$D_m = (q_1 \ \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{pmatrix} \Pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{q_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -q_{m+1} \end{pmatrix} =$$

$$= (q_1 \ \ q_2)\, \Pi \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{q_{m+1}}{q_m} \end{pmatrix} = \frac{1}{q_m} (q_1 \ \ q_2)\, \Pi \begin{pmatrix} q_m \\ q_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Из этого равенства и равенства (3) вытекает, что

$$\tilde{F}_m = \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}\, D_m.$$

Теорема доказана.

Монотонность поворота вектора $a_j(\sigma)$**.** Годограф вектор-функции $\mathbf{a}_2(\sigma) = \left(\sqrt{\sigma^2 - 1}, \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}\right)$ есть четверть окружности радиуса $\sqrt{\alpha^2 - 1}$, проходящая по ходу часовой стрелки при возрастании величины σ от 1 до α, с конечной точкой $(\sqrt{\alpha^2 - 1}, 0)$ на положительной полуоси абсцисс. Докажем, что и для произвольной вектор-функции $\mathbf{a}_j(\sigma)$ ее годограф есть дуга, не пересекающая начало координат и проходящая по ходу часовой стрелки при изменении величины σ от 1 до α, с конечной точкой на положительной полуоси абсцисс. Кроме того, установим монотонность поворота любого ненулевого вектора семейством преобразований $V_j(\sigma)$. Доказательство проведем в соответствии с методом индукции. Пусть $\left(a_j'(\sigma), b_j'(\sigma)\right)$ — производная вектор-функции $\mathbf{a}_j(\sigma)$. Достаточным условием монотонности поворота вектора $\mathbf{a}_j(\sigma)$ по ходу часовой стрелки при возрастании величины σ является отрицательность выражения $a_j b_j' - a_j' b_j$. Для вектор-функции $\mathbf{a}_2(\sigma)$ это условие выполнено. Допустим, что оно выполняется для вектор-функции $\mathbf{a}_j(\sigma)$. Тогда его справедливость для вектор-функции $\mathbf{a}_{j+1}(\sigma) = V_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\sigma)$ вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{a}(\sigma) = (x, y)$, а $\mathbf{A}(\sigma) = V_j(\sigma)\mathbf{a} = (X, Y)$, $2 \le j \le m+1$, тогда если ненулевой вектор **a** постоянен либо поворачивается по ходу часовой стрелки при возрастании величины σ от 1 до α, то вектор **A** монотонно поворачивается по ходу часовой стрелки при возрастании σ от 1 до α.

Достаточно доказать неравенство $XY' - X'Y < 0$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $\alpha > \sigma > \eta_j > 0$. В этом случае, упрощая обозначения: $\eta_j = \eta$, $q_j = q = \sqrt{\sigma^2 - \eta^2}$, $\gamma_j = q_j t_j = qt = \gamma$, имеем

$$X = x \operatorname{ch}\gamma + y \frac{q \operatorname{sh}\gamma}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}},$$

$$Y = x \frac{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}{q} \operatorname{sh}\gamma + y \operatorname{ch}\gamma.$$

Запишем выражение $XY' - X'Y$:

$$XY' - X'Y = xy' - x'y + W,$$

где величина W не содержит производных x' и y'. Поскольку $xy' - x'y$ отрицательно в случае поворота вектора **a** по ходу часовой стрелки, остается установить отрицательность W. Это выражение достаточно громоздко: его знаменатель $[(\alpha^2 - \sigma^2)(\sigma^2 - \eta^2)]^{\frac{3}{2}} > 0$, а числитель представляет собой квадратичную форму $ux^2 + 2vxy + wy^2$ относительно переменных x, y с коэффициентами

$$u = \sigma(\alpha^2 - \sigma^2)[\gamma(\alpha^2 - \sigma^2) - \frac{\operatorname{sh} 2\gamma}{2}(\alpha^2 - \eta^2)] < 0,$$

$$w = -\sigma(\sigma^2 - \eta^2)[\gamma(\alpha^2 - \sigma^2) + \frac{\operatorname{sh} 2\gamma}{2}(\alpha^2 - \eta^2)] < 0,$$

$$v = -\frac{\gamma\sigma}{t}\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}(\alpha^2 - \eta^2)\operatorname{sh}^2\gamma.$$

Чтобы доказать отрицательную определенность этой квадратичной формы, достаточно доказать положительность ее дискриминанта $uw-v^2$. Вычислив дискриминант, вынося из полученного результата положительный множитель $\dfrac{\sigma^2}{t^2}$ и проводя замену $t=\dfrac{\gamma}{\sqrt{\sigma^2-\eta^2}}$, получим выражение

$$\gamma^2(\sigma^2-\alpha^2)(\gamma^2\alpha^4+\alpha^4-\alpha^4\mathrm{ch}^2\gamma-2\alpha^2\gamma^2\sigma^2-2\alpha^2\eta^2+$$
$$+2\alpha^2\eta^2\mathrm{ch}^2\gamma+\gamma^2\sigma^4+\eta^4-\eta^4\mathrm{ch}^2\gamma).$$

Здесь второй сомножитель отрицателен при $1<\eta<\sigma<\alpha$, а последний сомножитель можно переписать как

$$(\alpha^2-\sigma^2)^2\gamma^2-(\alpha^2-\eta^2)^2\mathrm{sh}^2\gamma<(\alpha^2-\eta^2)^2(\gamma^2-\mathrm{sh}^2\gamma)<0.$$

Отсюда следует положительность дискриминанта и отрицательность W.

Случай 2: $\alpha>\eta_j>\sigma>1$. Полагая, что $\eta_j=\eta$, $q=\sqrt{\eta^2-\sigma^2}$, $\gamma=qt_j=qt$, получаем

$$X=x\cos\gamma-y\frac{q\sin\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\sigma^2}},$$
$$Y=x\frac{\sqrt{\alpha^2-\sigma^2}}{q}\sin\gamma+y\cos\gamma.$$

Запишем выражение

$$XY'-X'Y=xy'-x'y+W,$$

где W не зависит от производных x' и y'. Нам нужно установить отрицательность выражения W, которое представляет собой дробь со знаменателем $[(\alpha^2-\sigma^2)(\eta^2)-\sigma^2]^{\frac{3}{2}}>0$ и числителем, являющимся квадратичной формой вида $ux^2+2vxy+wy^2$ с коэффициентами

$$u=-\sigma(\alpha^2-\sigma^2)[\gamma(\alpha^2-\sigma^2)-\frac{\sin 2\gamma}{2}(\alpha^2-\eta^2)]<0,$$
$$w=\sigma(\sigma^2-\eta^2)[\gamma(\alpha^2-\sigma^2)+\frac{\sin 2\gamma}{2}(\alpha^2-\eta^2)]<0,$$
$$v=-\frac{\gamma\sigma}{t}\sqrt{\alpha^2-\sigma^2}(\alpha^2-\eta^2)\mathrm{sh}^2\gamma.$$

Достаточно установить положительность его дискриминанта. Вычисляя дискриминант, вынося из полученного результата множитель $\frac{\sigma^2}{t^2}$ и проводя замену $t=\frac{\gamma}{\sqrt{\sigma^2-\eta^2}}$, получаем

$$\gamma^2(\alpha^2-\sigma^2)(\gamma^2\alpha^4-\alpha^4+\alpha^4\cos^2\gamma-2\alpha^2\gamma^2\sigma^2+2\alpha^2\eta^2-$$

$$-2\alpha^2\eta^2\cos^2\gamma+\gamma^2\sigma^4-\eta^4+\eta^4\cos^2\gamma).$$

Первые два сомножителя этого произведения положительны, а последний равен $(\alpha^2-\sigma^2)^2\gamma^2-(\alpha^2-\eta^2)^2\sin^2\gamma$ и также положителен при $1<\sigma<\eta<\alpha$. Отсюда следует положительность дискриминанта и справедливость неравенства.

Отметим, что отрицательность W приводит к монотонному повороту постоянного вектора семейством преобразований $V_j(\sigma)$ по ходу часовой стрелки при возрастании величины σ. Таким образом, теорема доказана.

При $\eta_j\neq\alpha$ и $\sigma\to\alpha-0$ имеем $V_j(\sigma)\to\begin{pmatrix}\operatorname{ch}g_j & +\infty\\ 0 & \operatorname{ch}g_j\end{pmatrix}$, где $g_j=t_j\sqrt{\alpha^2-\eta_j^2}$. Докажем теперь, что вектор $\lim\limits_{\sigma\to\alpha-0}V_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\sigma)=$ $=\mathbf{a}_{j+1}(\alpha)=\left(a_{j+1}(\alpha),b_{j+1}(\alpha)\right)$ суть вектор конечной длины, имеющий направление оси абсцисс. Следовательно, вектор функции $\mathbf{a}_j(\sigma)$ при любом $2\le j\le m+1$ является непрерывным на отрезке $[1,\,\alpha]$.

Лемма 2. При $j\ge 2$ справедливо равенство $\mathbf{a}_j(\alpha)=(a_j,0)$, где $a_j>0$. Имеем $\mathbf{a}_2(\alpha)=\lim\limits_{\sigma\to\alpha-0}(\sqrt{\sigma^2-1},\sqrt{\alpha^2-\sigma^2})=(\sqrt{\alpha^2-1},0)$. Отметим, что $\lim\limits_{\sigma\to\alpha-0}\frac{b_2(\sigma)}{\sqrt{\alpha^2-\sigma^2}}=1>0$. Используя метод индукции, достаточно доказать, что из соотношений $\lim\limits_{\sigma\to\alpha-0}\frac{b_j(\sigma)}{\sqrt{\alpha^2-\sigma^2}}=c_j>0$ и $a_j(\alpha)=a_j>0$ следует, что $\lim\limits_{\sigma\to\alpha-0}\frac{b_{j+1}}{\sqrt{\alpha^2-\sigma^2}}=c_{j+1}>0$ и $a_{j+1}(\alpha)=a_{j+1}>0$. Действительно, при $\eta_j=\alpha$ имеем

$$a_{j+1}=a_j\cos\gamma_j-b_j\sin\gamma_j,$$
$$b_{j+1}=a_j\sin\gamma_j+b_j\cos\gamma_j,$$

где $\gamma_j = t_j\sqrt{\alpha^2-\sigma^2}$. Очевидно, что $a_{j+1} = a_j > 0$ и $c_{j+1} = a_j t_j + c_j > 0$.

При $\eta_j < \alpha$ и близких значениях σ и α имеем

$$a_{j+1} = a_j \operatorname{ch}\gamma_j + b_j \frac{\sqrt{\sigma^2-\eta_j^2}\operatorname{sh}\gamma_j}{\sqrt{\alpha^2-\sigma^2}},$$

$$b_{j+1} = a_j \frac{\sqrt{\alpha^2-\sigma^2}}{\sqrt{\sigma^2-\eta_j^2}}\operatorname{sh}\gamma_j + b_j\operatorname{ch}\gamma_j.$$

Переходя в этих формулах к пределу и учитывая, что $\gamma_j = t_j\sqrt{\sigma^2-\eta_j^2} \to t_j\sqrt{\alpha^2-\eta_j^2} = \gamma > 0$ при $\sigma \to \alpha - 0$, получаем $a_{j+1} = a_j\operatorname{ch}\gamma + c_j\sqrt{\alpha^2-\eta_j^2}\operatorname{sh}\gamma > 0$ и $c_{j+1} = a_j\dfrac{\operatorname{sh}\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\eta_j^2}} + c_j\operatorname{ch}\gamma > 0.$

Лемма доказана.

Подсчет поворота вектора $\mathbf{a}_j(\sigma)$. Поворот p_j вектора $\mathbf{a}_j(\sigma)$ при значении σ, убывающем от α до единицы, происходит монотонно против хода часовой стрелки. Согласно методу индукции, поворот p_2 вектора $\mathbf{a}_2(\sigma)$ равен $\dfrac{\pi}{2}$. Далее воспользуемся следующими соображениями. Рассмотрим семейство векторов $\mathbf{a}(s_1, s_2)$, непрерывно зависящих от параметров s_1, s_2, значения которых меняются от A до B, и не обращающихся в нулевой вектор ни при каком наборе значений параметров. Тогда на этом семействе векторов можно определить угол поворота вектора, однозначно определяющийся углом поворота вектора $\mathbf{a}(s_1, s_2)$ при каком-либо определенном наборе параметров s_1, s_2. Очевидно следующее утверждение.

Лемма 3. Поворот вектора $\mathbf{a}(s, s)$ при изменении параметра s от A до B равен сумме $p_1 + p_2$ поворотов, где p_1 — поворот вектора $\mathbf{a}(s, A)$, а p_2 — поворот вектора $\mathbf{a}(B, s)$ при значении s, изменяющемся от A до B.

Следствием этого утверждения является следующая лемма.

Лемма 4. Поворот p_{j+1} вектора $\mathbf{a}_{j+1}(\sigma) = V_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\sigma)$ при значении σ, убывающем от α до единицы, суммируется из поворота ϕ_j постоянного вектора $\mathbf{a}_j(\alpha)$ семейством преобразований $V_j(\sigma)$ при значении σ, убывающем от α до единицы, и поворота θ_j вектора $V_j(1)\mathbf{a}_j(\sigma)$ при значении σ, убывающем от α до единицы.

Семейство преобразований $V_j(\sigma)$ непрерывно при $1 \le \sigma < \alpha$, но при $\eta_j \ne \alpha$ не является непрерывным в точке α. Однако семейство векторов $V_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\sigma)$ в силу леммы 2 непрерывно в точке $\sigma = \alpha$ при любом j. Применим лемму 3 к семейству векторов $\mathbf{a}_{j+1}(\sigma_1, \sigma_2) = = V_j(\sigma_1), \mathbf{a}_j(\sigma_2)$ на квадрате $1 \le \sigma_1 \le \alpha_1, 1 \le \sigma_2 \le \alpha_1$ при $\alpha_1 < \alpha$ и устремим α_1 к α. Поворот вектора $V_j(1)\mathbf{a}_j(\sigma)$ при значении σ, убывающем от α_1 до единицы, очевидно, при $\alpha_1 \to \alpha$ стремится к θ_j. Хотя преобразование $V_j(\sigma)$ разрывно в точке α, поворот вектора $V_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\alpha_1)$ при значении σ, убывающем от α_1 до единицы, стремится к повороту ϕ_j при $\alpha_1 \to \alpha$. Это следует из равенства $\lim\limits_{\alpha_1 \to \alpha - 0} V_j(\alpha_1)\,\mathbf{a}_j(\alpha_1) = V_j(\alpha)\,\mathbf{a}_j(\alpha)$ (см. лемму 2), непрерывности семейства векторов $V_j(\sigma_1)\mathbf{a}_j(\sigma_2)$ при $\alpha > \sigma_1 \ge 1, \alpha > \sigma_2 \ge 1$ и совпадения направлений векторов $V_j(\alpha)\,\mathbf{a}_j(\alpha)$ и $V_j(\sigma)\,\mathbf{a}_j(\alpha)$.

Подсчитаем поворот ϕ_j. Наиболее просто это сделать при $\eta_j = \alpha$. В этом случае преобразования имеют вид

$$V_j(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma_j & -\sin\gamma_j \\ \sin\gamma_j & \cos\gamma_j \end{pmatrix},$$

где $\gamma_j = t_j\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}$. Таким образом, это семейство преобразований плоскости, поворачивающее вектор $\mathbf{a}_j(\alpha)$ на угол $t_j\sqrt{\alpha^2 - 1}$.

При $\eta_j \le 1$ преобразования имеют вид

$$V_j(\sigma) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma_j & r_j \operatorname{sh}\gamma_j \\ \dfrac{\operatorname{sh}\gamma_j}{r_j} & \operatorname{ch}\gamma_j \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\gamma_j = t_j\sqrt{\sigma^2 - \eta_j^2}$, а $r_j = \dfrac{\sqrt{\sigma^2 - \eta_j^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}$. Поскольку матрицы этих преобразований содержат лишь положительные элементы, при любом $\alpha > \sigma \ge 1$ образ $V_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\alpha)$ вектора $\mathbf{a}_j(\alpha) = (a_j, 0), a_j > 0$ лежит в первой координатной четверти стандартной декартовой системы. В этом случае $\phi_j = \operatorname{arctg}\dfrac{y_j}{x_j}$, где (x_j, y_j) — координаты вектора $V(1)\mathbf{a}_j(\alpha)$.

При $\alpha > \eta_j > 1$ вид преобразований $V_j(\sigma)$ зависит от величины σ: при $\alpha > \sigma > \eta_j$ описываются выражением (7), а при $\eta_j > \sigma > 1$ преобразования

$$V_j(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma_j & -r_j \sin\gamma_j \\ \dfrac{\sin\gamma_j}{r_j} & \cos\gamma_j \end{pmatrix},$$

где $\gamma_j = t_j \sqrt{\eta_j^2 - \sigma^2}$, а $r_j = \dfrac{\sqrt{\eta_j^2 - \sigma^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}$.

В любом случае преобразования $V_j(\sigma)$ можно представить как последовательное сжатие-растяжение к координатным осям и обычный либо гиперболический поворот:

$$V_j(\sigma) = R_j^{-1}(\sigma) U_j(\sigma) R_j(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r_j} \end{pmatrix} U_j(\sigma) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_j \end{pmatrix},$$

где $U_j(\sigma) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\gamma_j & \operatorname{sh}\gamma_j \\ \operatorname{sh}\gamma_j & \operatorname{ch}\gamma_j \end{pmatrix}$ при $\alpha > \sigma > \eta_j$ и $U_j(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma_j & -\sin\gamma_j \\ \sin\gamma_j & \cos\gamma_j \end{pmatrix}$ при $\eta_j > \sigma \geq 1$.

В точке η_j семейство преобразований $V_j(\sigma)$ непрерывно, так как односторонние пределы совпадают:

$$V_j(\eta_j - 0) = V_j(\eta_j + 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_j \sqrt{\alpha^2 - \eta_j^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 2, преобразование $V_j(\alpha)$ не изменяет направления вектора $\mathbf{a}_j(\alpha)$. Преобразование $R_j(\sigma)$ при любом значении σ также не изменяет направления этого вектора. Поворот вектора $V_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\alpha)$ суммируется из поворота вектора $U_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\alpha)$ и добавочного поворота, происходящего под действием растяжения-сжатия $R_j^{-1}(\sigma)$ на вектор $U_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\alpha)$. Отметим, что вектор $U_j(\alpha)\mathbf{a}_j(\alpha)$ образует с осью Ox положительный острый угол. При уменьшении параметра σ до η_j этот угол уменьшается до нуля. А при дальнейшем уменьшении параметра, когда преобразования семейства $U_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\alpha)$ становятся обычными поворотами, он снова растет. Однако вследствие растяжения-сжатия $R_j^{-1}(\sigma)$ поворот вектора $V_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\alpha)$ происходит монотонно против хода часовой стрелки при уменьшении значения σ.

Поворот ϕ_j в этом случае можно подсчитать следующим образом. Пусть $t_j\sqrt{\eta_j^2-1}=2\pi k_j+\psi_j, 0\le\psi_j<2\pi$, тогда в силу непрерывности преобразования $V_j(\sigma)$ при $\sigma\le\eta_j$ и невырожденности не изменяющей ориентации преобразования $R_j^{-1}(\sigma)$ при $\sigma<\eta_j$ число полных оборотов вектора $V_j(\sigma)\mathbf{a}_j(\alpha)$ при значении σ, убывающем от η_j до единицы, также равно k_j. Кроме того, векторы $U_j(1)\mathbf{a}_j(\alpha)$ и $V_j(1)\mathbf{a}_j(\alpha)$ лежат в одной координатной четверти. В случае если это первая или вторая координатная четверть ($0\le\psi_j\le\pi$), имеем $\phi_j=2\pi k_j+\chi_j$, где $\chi_j=\arccos\dfrac{x_j}{\sqrt{x_j^2+y_j^2}}$. Если это третья или четвертая координатная четверть ($\pi<\psi_j<2\pi$), получаем $\phi_j=2\pi(k_j+1)-\chi_j$.

Остается подсчитать поворот θ_j. Допустим поворот p_j вектора $\mathbf{a}_j(\sigma)$ при значении σ, изменяющемся от α до единицы, известен. Требуется определить поворот θ_j вектора $V(1)\mathbf{a}_j(\sigma)$ при значении σ, изменяющемся от α до единицы. Поскольку $\det V(1)=1$, вращение вектора $V(1)\mathbf{a}_j(\sigma)$ при значении σ, изменяющемся от α до единицы, происходит в ту же сторону, что и поворот вектора $\mathbf{a}_j(\sigma)$. В силу невырожденности преобразования $V(1)$ число целых оборотов этих двух векторов совпадает. Добавок к числу целых оборотов равен повороту μ_j^* от вектора $V(1)\mathbf{a}_j(\alpha)$ до вектора $V(1)\mathbf{a}_j(1)$. Пусть $V(\sigma)\mathbf{a}_j(1)=(X_{j+1},Y_{j+1})$, $\mu_j=\arccos\dfrac{x_jX_{j+1}+y_jY_{j+1}}{\sqrt{x_j^2+y_j^2}\sqrt{X_{j+1}^2+Y_{j+1}^2}}$. Тогда поворот μ_j^* равен повороту μ_j, если $S=x_jY_{j+1}-X_{j+1}y_j\ge 0$ и $\mu_j^*=2\pi-\mu$ при $S<0$.

Формула для числа ТЕ-мод. Запишем формулу для числа K собственных ТЕ-мод, которое равно числу нулей скалярного произведения $\left(\mathbf{a}_{m+1}(\sigma),\mathbf{A}_m^0(\sigma)\right)$ при изменении значения σ от α до единицы. Напомним, что поворот вектора $\mathbf{a}_{m+1}(\sigma)$ при изменении значения σ от α до единицы равен p_{m+1} и совершается монотонно против хода часовой стрелки, начиная от положительного направления на оси абсцисс. Поворот вектора $\mathbf{A}_m(\sigma)$ при изменении значения σ от α до единицы также происходит, начиная от его положения на оси абсцисс, монотонно против хода часовой стрелки на угол P_A. Этот угол можно вычислить следующим образом:

$$P_A = \lim_{\sigma \to 1+0} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \sigma^2}{\sigma^2 - \eta_{m+1}^2}}.$$

Поворот отраженного вектора $\mathbf{A}_m^0$ происходит по ходу часовой стрелки, начиная от положительного направления оси ординат, на угол P_A. Итак, поворот вектора $\mathbf{A}_{m+1}(\sigma)$ относительно вектора $\mathbf{A}_m^0$ равен $p_{m+1} + P_A$. При этом векторы $\mathbf{a}_{m+1}(\sigma)$ и $\mathbf{A}_m^0$ образуют прямой угол, если не учитывать прямой угол, получающийся при $\sigma = \alpha$, число раз

$$K = [\frac{p_{m+1} + P_A}{\pi}]_-, \tag{8}$$

где $[x]_-$ — наибольшее целое число, строго меньшее числа x.

Таким же образом можно получить формулу для числа ТМ-мод. Она будет иметь тот же вид, что и формула (8), но с некоторым изменением смысла входящих в нее величин. Отметим, что результаты вычислений по формулам (8) как для ТЕ-, так и для ТМ-мод полностью совпадают с результатами, полученными по формулам, имеющим другой вид [7]. Расчеты по формулам (8) для волноводов, включающих десятки слоев, на персональном компьютере выполняются практически мгновенно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
2. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах / Под ред. И.Н. Сисакяна. М.: Мир, 1987.
3. Валовик Д. В., Смирнов Ю. И. Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах. Пенза. Изд-во ПГУ, 2010.
4. Ковалев М. Д. Число энергетических уровней квантовой частицы в кусочно постоянном потенциальном поле // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана Естественные науки. Спец. Выпуск. Математическое моделирование. 2011. С. 3–16.
5. Волноводная оптоэлектроника / Под ред. Т. Тамира. М.: Мир. 1991.
6. Ковалев М. Д. Многослойная модель в оптике и квантовой механике // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49. № 8. С. 1–14.
7. Ковалев М. Д. О числе ТЕ- и ТМ-мод в плоском многослойном волноводе // Тр. Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Сер. Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. Вып. 3. Суздаль, 22–24 сентября 2009 г. С. 171–174.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.