

Ю. В. Ю р и н, В. А. К у т ы р к и н

АППРОКСИМАЦИЯ СФЕРИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОГРАНИЧИВАЮЩЕЙ ЗВЕЗДНУЮ ОБЛАСТЬ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Предложены методы аппроксимации гладкой поверхности, ограничивающей звездную область евклидова пространства, на основе сферических сплайнов, которые являются линейными комбинациями базисных локальных сферических сплайнов. Экспериментальная цифровая информация о поверхности представлена в виде набора случайных точек на поверхности, заданных с некоторой погрешностью. Носитель каждого базисного локального сплайна задан с помощью локальной сетки. Общая восстанавливаемая информация о таких локальных сетках представлена в виде псевдосетки, в которую входят не все узлы локальных сеток. Применение предложенных методов показано на примерах аппроксимации достаточно сложных поверхностей.

E-mail: ven8469@yandex.ru, vkutyркиn@yandex.ru

Ключевые слова: сферический сплайн, локальный сплайн, аппроксимация поверхности, псевдосетка укладки прямоугольника.

Задача аппроксимации поверхностей актуальна для многих прикладных исследований. В частности, решение такой задачи требуется при фильтрации зашумленных цифровых сигналов (изображений). В этом случае, как правило, ограничиваются поверхностями, аналитическое описание которых задается одной картой, когда поверхность диффеоморфна некоторой области двумерного евклидова пространства [1]. Однако во многих прикладных исследованиях физических свойств различных материалов возникает задача аппроксимации гладких поверхностей, ограничивающих некоторую звездную область трехмерного евклидова пространства. Такие поверхности не допускают аналитического описания одной картой. Они встречаются при описании пластических и прочностных свойств композиционных материалов [2, 3] и называются поверхностями текучести и прочности соответственно. Фактически аналитическое описание таких поверхностей определяется гладкими функциями на сфере единичного радиуса в евклидовом пространстве. Для аналитического описания поверхности этого типа также можно использовать сферическую си-

стему координат, если известен центр звездной области, ограниченной рассматриваемой поверхностью. Но при использовании такой системы координат возникают проблемы «периодической» склейки поверхности и ее описания в «полюсах» [4].

В настоящей работе предлагаются методы аппроксимации гладкой поверхности, ограничивающей звездную область евклидова пространства, с помощью сферических сплайнов, являющихся гладкими функциями на сфере единичного радиуса. В этих методах выбор экспериментальных точек поверхности, заданных с некоторой погрешностью, случаен, что не позволяет ориентироваться на какие-либо сетки поверхности. Поэтому в работе рассматриваются псевдосетки, позволяющие восстановить локальные сетки для носителей базисных сферических сплайнов. Эффективность предложенного подхода показана на аппроксимациях сферическими сплайнами достаточно сложных гладких поверхностей, ограничивающих звездные области евклидова пространства.

Базисы локальных сплайнов для гладких на отрезке функций. В настоящей работе численное описание гладких на сфере функций осуществляется с помощью локальных сплайнов, структура которых учитывает топологические свойства сферы. Для введения таких двумерных сплайнов используются одномерные локальные сплайны, удовлетворяющие специальным граничным условиям в концах заданного отрезка.

Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы сетка A и ее расширение до сетки A_0 за этот отрезок, для которых

$$\begin{cases} A = (a = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N = b); \\ A_0 = (\tau_{-3}, \tau_{-2}, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N, \tau_{N+1}, \tau_{N+2}, \tau_{N+3}), \end{cases} \quad (1)$$

где $\tau_{-3} < \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < \tau_{N+1} < \tau_{N+2} < \tau_{N+3}$.

Для введения необходимых локальных сплайнов на отрезке $[0; 1]$ определяется функция Q_α вида

$$2\alpha(1-\alpha)Q_\alpha(t) = \begin{cases} t^3, & 0 \leq t < \alpha; \\ t^3 - \frac{(t-\alpha)^3}{1-2\alpha}, & \alpha \leq t < 1-\alpha; \\ t^3 + \frac{(t+\alpha-1)^3 - (t-\alpha)^3}{1-2\alpha}, & 1-\alpha \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha \in (0; 0,5)$ — фиксированное число (в работе $\alpha = 0,25$). Кроме того, с использованием функции (2) для узла τ_i ($-1 \leq i \leq N+1$) сетки A_0 из (1) вводится гладкая функция B_{i+1} вида

$$B_{i+1}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \tau_{i-2}; \\ Q_\alpha \left(\frac{\tau - \tau_{i-2}}{\tau_i - \tau_{i-2}} \right), & \tau \in [\tau_{i-2}; \tau_i]; \\ Q_\alpha \left(1 - \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+2} - \tau_i} \right), & \tau \in [\tau_i; \tau_{i+2}]; \\ 0, & \tau > \tau_{i+2}. \end{cases} \quad (3)$$

При дальнейшем изложении потребуются функции вида (3) двух типов.

Для функций первого типа сетка удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \tau_1 - \tau_0 = \tau_{N+1} - \tau_N, \tau_2 - \tau_1 = \tau_{N+2} - \tau_{N+1}, \tau_3 - \tau_2 = \tau_{N+3} - \tau_{N+2}; \\ \tau_0 - \tau_{-1} = \tau_N - \tau_{N-1}, \tau_{-1} - \tau_{-2} = \tau_{N-1} - \tau_{N-2}, \tau_{-2} - \tau_{-3} = \tau_{N-2} - \tau_{N-3}. \end{cases} \quad (4)$$

Кроме того, для функций вида (3) первого типа

$$B_{i+1} = B_{i+1}^1, \quad -1 \leq i \leq N+1. \quad (5)$$

Если же для расширенной сетки A_0 из (1) справедливы соотношения

$$\tau_0 = \frac{\tau_{-1} + \tau_1}{2}, \quad \tau_N = \frac{\tau_{N-1} + \tau_{N+1}}{2}, \quad (6)$$

то для функций вида (3) второго типа

$$B_{i+1} = B_{i+1}^2, \quad -1 \leq i \leq N+1. \quad (7)$$

Функции вида (5) (первого типа), индуцированные сеткой A_0 из (1), которая удовлетворяет условиям (4), предназначены для введения линейного пространства гладких на отрезке $[-\pi; \pi]$ сплайнов, имеющих в концах этого отрезка одинаковые значения и равные одно-сторонние производные (свойство «периодичности» сплайна). Базисные гладкие сплайны H_1, \dots, H_{N-1} этого пространства, определенные только на отрезке $[-\pi; \pi]$, имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(\tau) = B_0^1(\tau) + B_N^1(\tau), \quad \tau \in [-\pi; \pi]; \\ H_2(\tau) = B_1^1(\tau) + B_{N+1}^1(\tau), \quad \tau \in [-\pi; \pi]; \\ H_3(\tau) = B_2^1(\tau) + B_{N+2}^1(\tau), \quad \tau \in [-\pi; \pi]; \\ H_i(\tau) = B_i^1(\tau), \quad \tau \in [-\pi; \pi], \quad 3 \leq i \leq N-1. \end{array} \right. \quad (8)$$

Все сплайны из линейной оболочки базисных сплайнов (8) являются гладкими на отрезке $[-\pi; \pi]$ функциями, которые имеют в концах этого отрезка одинаковые значения и равные односторонние производные (свойство «периодичности» сплайна).

Функции вида (7) (второго типа), индуцированные сеткой A_0 из (1), которая удовлетворяет условиям (6), предназначены для введения линейного пространства гладких на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ сплайнов, имеющих в концах этого отрезка нулевые производные. Базисные гладкие сплайны h_1, \dots, h_{N+1} этого пространства, определенные только на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$, имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1(\tau) = B_1^2(\tau), \quad \tau \in [-\pi/2; \pi/2]; \\ h_2(\tau) = B_0^2(\tau) + B_2^2(\tau), \quad \tau \in [-\pi/2; \pi/2]; \\ h_i(\tau) = B_i^2(\tau), \quad \tau \in [-\pi/2; \pi/2], \quad 3 \leq i \leq N-1; \\ h_N(\tau) = B_N^2(\tau) + B_{N+2}^2(\tau), \quad \tau \in [-\pi/2; \pi/2]; \\ h_{N+1}(\tau) = B_{N+1}^2(\tau), \quad \tau \in [-\pi/2; \pi/2]. \end{array} \right. \quad (9)$$

Все сплайны из линейной оболочки базисных сплайнов (9) являются гладкими на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ функциями, имеющими в концах этого отрезка нулевые производные. Следовательно, все сплайны из линейной оболочки базисных сплайнов (9) являются гладкими на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ функциями, также имеющими в концах этого отрезка нулевые производные.

Можно показать, что на отрезках $[-\pi; \pi]$ и $[-\pi/2; \pi/2]$ сплайны (8) и (9) удовлетворяют тождествам

$$\sum_{i=1}^{N-1} H_i \equiv 1; \quad \sum_{i=1}^{N+1} h_i \equiv 1. \quad (10)$$

Базисы гладких локальных сферических сплайнов. Для описания гладких на сфере единичного радиуса локальных сплайнов сначала введем их на прямоугольнике $[-\pi; \pi] \times [-\pi/2; \pi/2] = \Pi$, где $\varphi \in [-\pi; \pi)$ и $\theta \in (-\pi/2; \pi/2)$ — соответствующие углы, определяющие положение точки на сфере, за исключением ее полюсов. Для того чтобы гладкий сплайн, заданный на прямоугольнике Π , можно было бы рассматривать как сплайн на сфере, он должен удовлетворять следующим граничным условиям. В точках $(-\pi; \theta) \in \Pi$ и $(\pi; \theta) \in \Pi$ боковых границ значения сплайна должны совпадать. В точках верхней (нижней) границы прямоугольника Π сплайн должен принимать одно и то же значение и иметь нулевые производные по направлению меридианов сферы с началом в ее верхнем (нижнем) полюсе, индуцированном верхней (нижней) границей прямоугольника Π . Сплайны, заданные на прямоугольнике Π и удовлетворяющие таким граничным условиям, называют сферическими сплайнами.

Носители рассматриваемых далее локальных сплайнов определяются подразделением Π на более мелкие прямоугольники, вершины которых нельзя задать некоторой двумерной сеткой на прямоугольнике Π . Такое подразделение называется укладкой прямоугольника Π . Она определяется соответствующим набором точек-узлов прямоугольника (вершинами прямоугольников укладки). Этот набор узлов для носителя каждого базисного локального (сферического) сплайна индуцирует свою локальную сетку; далее он называется псевдосеткой, поскольку такой набор содержит не все узлы этих локальных сеток, но позволяет их восстановить из узлов указанной псевдосетки.

На прямоугольнике Π такая псевдосетка имеет вид

$$C = \{(\tau_i, \tau_k^i) : 0 \leq i \leq N-1, 0 \leq k \leq n\}, \quad (11)$$

где $A_1 = (-\pi = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ — часть сетки $A = (-\pi = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}, \tau_N = \pi)$, введенной в (1) вместе с сеткой A_0 , удовлетворяющей условиям (3).

Кроме того, если $0 \leq i \leq N-1$, то $A^i = (-\pi/2 = \tau_0^i, \tau_1^i, \dots, \tau_n^i = \pi/2)$ — сетка, аналогичная сетке A из (1) с расширением $A_0^i = (\tau_{-3}^i, \tau_{-2}^i, \tau_{-1}^i, \tau_0^i, \tau_1^i, \dots, \tau_n^i, \tau_{n+1}^i, \tau_{n+2}^i, \tau_{n+3}^i)$ вне отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$, которое удовлетворяет условиям $\tau_0^i = \frac{\tau_{-1}^i + \tau_1^i}{2}$, $\tau_n^i = \frac{\tau_{n-1}^i + \tau_{n+1}^i}{2}$, аналогичным введенным в (6).

Как и в предыдущем подразделе, для указанной выше сетки A_1 на отрезке $[-\pi; \pi]$ вводятся базисные сплайны H_1, \dots, H_{N-1} , определенные в (8). Если $0 \leq i \leq n$, то для указанной выше сетки A^i с расширением A_0^i , на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ вводятся базисные сплайны h_1^i, \dots, h_{N+1}^i , фактически определенные в (9) (см. также выражения (6) и (7)). Эти одномерные базисные сплайны позволяют ввести на прямоугольнике $[-\pi; \pi] \times [-\pi/2; \pi/2] = \Pi$ двумерные сферические базисные сплайны вида

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1^\bullet(\varphi, \theta) = \sum_{i=1}^{N-1} H_i(\varphi) h_1^i(\theta), \quad \varphi \in [-\pi; \pi], \theta \in [-\pi/2; \pi/2]; \\ S_2^\bullet(\varphi, \theta) = \sum_{i=1}^{N-1} H_i(\varphi) h_2^i(\theta), \quad \varphi \in [-\pi; \pi], \theta \in [-\pi/2; \pi/2]; \\ S_k^i(\varphi, \theta) = H_i(\varphi) h_k^i(\theta), \quad \varphi \in [-\pi; \pi], \theta \in [-\pi/2; \pi/2], \\ \qquad \qquad \qquad 1 \leq i \leq N-1, \quad 2 \leq k \leq n; \\ S_n^\bullet(\varphi, \theta) = \sum_{i=1}^{N-1} H_i(\varphi) h_n^i(\theta), \quad \varphi \in [-\pi; \pi], \theta \in [-\pi/2; \pi/2]; \\ S_{n+1}^\bullet(\varphi, \theta) = \sum_{i=1}^{N-1} H_i(\varphi) h_{n+1}^i(\theta), \quad \varphi \in [-\pi; \pi], \theta \in [-\pi/2; \pi/2]. \end{array} \right. \quad (12)$$

Уже указывалось, что для $i = 1, \dots, N-1$ сплайн H_i из (8) в концах отрезка $[-\pi; \pi]$ имеет одинаковые значения и равные односторонние производные. Кроме того, для $k = 1, \dots, n+1$ сплайн h_k^i , аналогичный сплайну h_k из (9), имеет в концах отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$ нулевые производные. Вследствие таких свойств для $m = \bullet, 1, \dots, N-1$ и $k = 1, \dots, n+1$ в граничных точках прямоугольника $[-\pi; \pi] \times [-\pi/2; \pi/2] = \Pi$ сплайн S_k^m удовлетворяет условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} S_k^m(-\pi; \theta) = S_k^m(\pi; \theta), \quad \theta \in [-\pi/2; \pi/2]; \\ \frac{\partial S_k^m(-\pi; \theta)}{\partial \varphi} = \frac{\partial S_k^m(\pi; \theta)}{\partial \varphi}, \quad \theta \in [-\pi/2; \pi/2]; \\ \frac{\partial S_k^m(\varphi; -\pi/2)}{\partial \theta} = \frac{\partial S_k^m(\varphi; \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad \varphi \in [-\pi; \pi]. \end{array} \right. \quad (13)$$

Следовательно, любой сплайн S из линейной оболочки сплайнов вида (11) в точках боковых границ прямоугольника $[-\pi; \pi] \times [-\pi/2; \pi/2] = \Pi$ удовлетворяет условиям «периодичности»:

$$\begin{cases} S(-\pi; \theta) = S(\pi; \theta), \quad \theta \in [-\pi/2; \pi/2]; \\ \frac{\partial S(-\pi; \theta)}{\partial \varphi} = \frac{\partial S(\pi; \theta)}{\partial \varphi}, \quad \theta \in [-\pi/2; \pi/2]. \end{cases} \quad (14)$$

Кроме того, вследствие вида базисных сплайнов (11) (см. также выражения (3), (6), (7), (8) и (13)) и тождеств (10) для любого в точках верхней и нижней границ прямоугольника $[-\pi; \pi] \times [-\pi/2; \pi/2] = \Pi$ справедливы соотношения

$$\begin{cases} S(\varphi; -\pi/2) = S(-\pi; -\pi/2) = S(\pi; -\pi/2), \quad \varphi \in [-\pi; \pi]; \\ S(\varphi; \pi/2) = S(-\pi; \pi/2) = S(\pi; \pi/2), \quad \varphi \in [-\pi; \pi]; \\ \frac{\partial S(\varphi; -\pi/2)}{\partial \theta} = \frac{\partial S(\varphi; \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad \varphi \in [-\pi; \pi]. \end{cases} \quad (15)$$

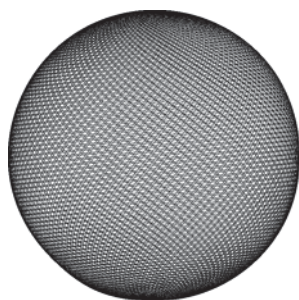


Рис. 1. Представление сферы с помощью специального сферического сплайна

Свойства (14) и (15) сплайна S позволяют рассматривать его как гладкую функцию, заданную на сфере единичного радиуса, т. е. как сферический сплайн, согласно введенной выше терминологии. Следовательно, этот сферический сплайн описывает гладкую поверхность, ограничивающую некоторую звездную область евклидова пространства. В частности, если этот сплайн имеет вид

$$S = S_1^\bullet + S_2^\bullet + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=3}^{n-1} S_k^i + S_n^\bullet + S_{n+1}^\bullet, \quad (16)$$

на прямоугольнике $[-\pi; \pi] \times [-\pi/2; \pi/2] = \Pi$ выполняется тождество

$$S \equiv 1. \quad (17)$$

Такой сплайн описывает сферу единичного радиуса, показанную на рис. 1, где $N = n = 5$.

Методы построения аппроксимации поверхности сферическим сплайном. В выбранной сферической системе координат (R, θ, φ) евклидова пространства гладкая поверхность, ограничивающая звездную область трехмерного евклидова пространства, задана уравнением

$$R = f(\theta, \varphi), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad \text{и} \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad (18)$$

где $f(\theta, \varphi) > 0$ — соответствующая гладкая функция своих переменных (углов) на прямоугольнике $[-\pi; \pi] \times [-\pi/2; \pi/2] = \Pi$.

Экспериментальные данные для этой поверхности представлены в следующем виде. Заданы ее внутренний «центр», расположенный в начале координат, и точки поверхности

$$P_1(f(\theta_1, \varphi_1) + \varepsilon_1, \theta_1, \varphi_1), \dots, P_m(f(\theta_m, \varphi_m) + \varepsilon_m, \theta_m, \varphi_m), \quad (19)$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ — независимые случайные величины (погрешности), распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией.

Далее для точек P_1, \dots, P_m из (17) приняты обозначения

$$R_1 = f(\theta_1, \varphi_1) + \varepsilon_1, \dots, R_m = f(\theta_m, \varphi_m) + \varepsilon_m. \quad (20)$$

Число \bar{R} вида

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m R_j \quad (21)$$

называется средневыборочным радиусом точек (19) для поверхности (18).

Как было описано, на прямоугольнике Π создаются псевдосетка вида (10)

$$C = \left\{ (\tau_i, \tau_k^i) : 0 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq k \leq n \right\} \quad (22)$$

и базис локальных сплайнов $S_1^\bullet, S_2^\bullet, S_k^i$ ($1 \leq i \leq N-1, \quad 3 \leq k \leq n-1$), $S_n^\bullet, S_{n+1}^\bullet$, определенный в (12).

Ранее определялось, каким образом псевдосетка (22) индуцирует на прямоугольнике Π укладку, являющуюся его подразделением на более мелкие прямоугольники. Здесь сетка (22) выбирается таким образом, чтобы в каждый прямоугольник этой укладки попало оди-

наковое число экспериментальных точек из набора (19). Тогда для определения сферического сплайна S вида

$$S = x_1^* S_1^* + x_2^* S_2^* + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=3}^{n-1} x_k^i S_k^i + x_n^* S_n^* + x_{n+1}^* S_{n+1}^*, \quad (23)$$

где x_1^* , x_2^* , x_k^i ($1 \leq i \leq N-1$, $3 \leq k \leq n-1$), x_n^* , x_{n+1}^* — неизвестные коэффициенты в соответствии с набором точек (19), обозначениями (20) и видом (23) сплайна S создается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$S(\theta_j, \varphi_j) = R_j, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (24)$$

В рассматриваемых случаях СЛАУ (24) переопределена. Поэтому для ее решения применяется метод наименьших квадратов, согласно которому создается соответствующая нормальная СЛАУ. Для решения этой нормальной СЛАУ используется метод сопряженных градиентов. В результате найденные неизвестные коэффициенты сферического сплайна S из (23) представляют аппроксимацию искомой поверхности.

На рис. 2, *a* показана поверхность, для которой приведенным выше методом построена аппроксимация при использовании $m = 10^3$ экспериментальных точек вида (20), с 3%-ной абсолютной погрешностью относительно средневывборочного радиуса (21) и сетки (22), для которой $N = 5$ и $n = 15$. Такая аппроксимация показана на рис. 2, *б*.

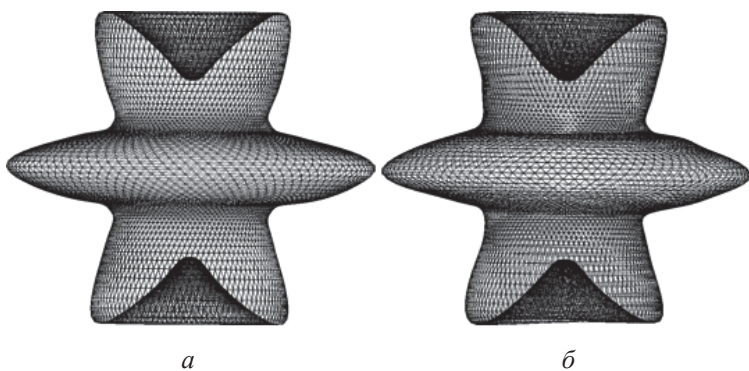


Рис. 2. Исходная поверхность (*a*) и ее аппроксимация сферическим сплайном (*б*)

Для достаточно большого числа экспериментальных точек набора (20) и первичной псевдосетки C из (22) в каждом прямоугольнике укладки, индуцированной псевдосеткой C , производится усреднение экспериментальных точек, попавших в этот прямоугольник. В ре-

результате создается новый набор, содержащий значительно меньшее число экспериментальных точек. В соответствии с этим набором создается вторичная псевдосетка вида (22) с меньшим числом узлов. Затем, согласно изложенному выше методу, с помощью этого нового набора экспериментальных точек и сокращенной псевдосетки создается сферический сплайн, аппроксимирующий поверхность (18). Такая процедура построения приближения к поверхности (18) называется редуцированной аппроксимацией. На рис. 3, *а* показана поверхность, для которой была осуществлена редуцированная аппроксимация, стартовавшая с $m = 10^4$ экспериментальных точек в наборе (20), с 5%-ной абсолютной погрешностью относительно средневыборочного радиуса (21) и первичной псевдосеткой, для которой $N = 10$ и $n = 100$. При редуцировании вторичная псевдосетка имела параметры $N = 5$ и $n = 30$. Результат такой редуцированной аппроксимации приведен на рис. 3, *б*.

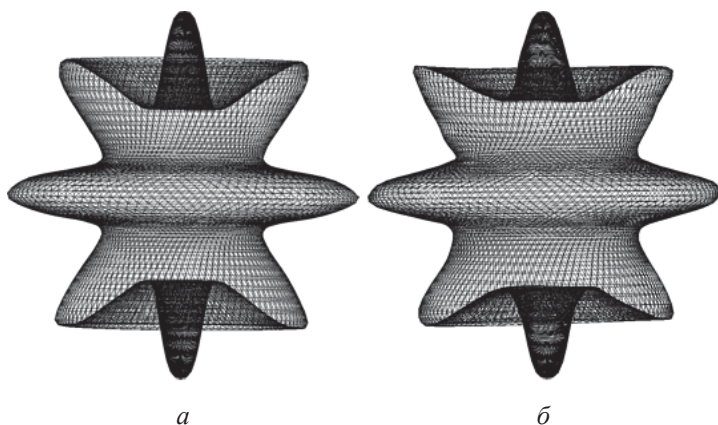


Рис. 3. Исходная поверхность (*а*) и ее редуцированная аппроксимация сферическим сплайном (*б*)

Возможна ситуация, когда для гладкой поверхности, ограничивающей звездную область евклидова пространства, указан набор экспериментальных точек в прямоугольной системе координат, но неизвестен центр этой звездной области. Тогда в качестве такого искусственного центра можно выбирать точку пространства, полученную усреднением заданных экспериментальных точек.

После построения этого центра можно перейти к сферической системе координат с началом в этом центре и создать сферический сплайн, аппроксимирующий поверхность, разработанным выше методом.

Такую аппроксимацию поверхности можно назвать нецентрированной. Эксперименты показали, что эффективность нецентрированной

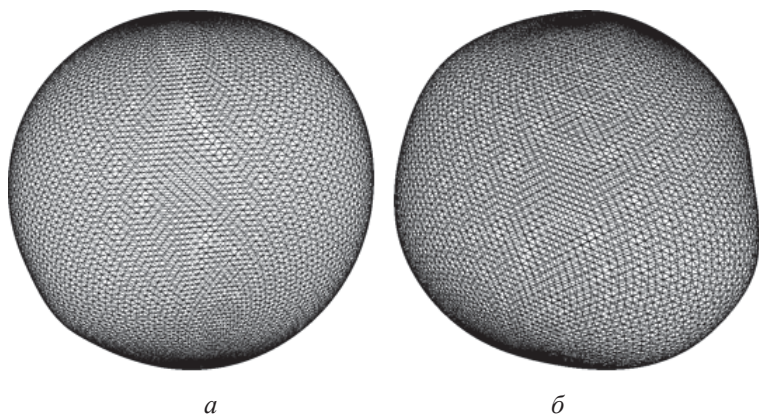


Рис. 4. Центрированная (*а*) и нецентрированная (*б*) аппроксимация сферы с помощью сферического сплайна

ной аппроксимации несколько ниже по сравнению с центрированной, когда известен внутренний центр звездной области, ограниченной рассматриваемой поверхностью. Эффективность нецентрированной аппроксимации можно повысить с помощью другой процедуры построения искусственного центра поверхности.

На рис. 4, *а* приведена центрированная аппроксимация поверхности сферы и для сравнения на рис. 4, *б* — нецентрированная аппроксимация той же сферы. В обоих случаях использовались параметры аппроксимации: $m = 50$, $N = n = 5$ и 5%-ная абсолютная погрешность относительно средневыборочного радиуса (21). Снижение эффективности нецентрированной аппроксимации связано со случайным смещением средневыборочного центра поверхности относительно центра аппроксимируемой сферы.

Заключение. Предложены методы решения задачи аппроксимации гладкой поверхности, ограничивающей звездную область евклидова пространства, когда экспериментальная информация о поверхности представлена в виде цифрового набора случайных точек на поверхности, заданных с некоторой погрешностью. Эта задача является традиционной для фильтрации зашумленных цифровых «изображений».

Гладкую поверхность, ограничивающую некоторую звездную область евклидова пространства, можно назвать сферообразной. Рассмотренные в работе методы аппроксимации распространяются и на поверхности другого типа, например на гладкие, которые можно было бы назвать торообразными. Кроме того, предложенные методы допускают естественное обобщение для поверхностей в евклидовых пространствах более высокой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шувалов Р. И. Фильтрация цифровых изображений проекционно-сеточным методом // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. Спец. вып. Мат. моделирование. – 2011. – С. 216–222.
2. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.
3. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – 3-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
4. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.