

А. М. Андреев, Д. В. Березкин,
Г. П. Можаров, И. С. Свиригин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И СЕТЕЙ

Проблема моделирования надежности аппаратных и программных средств компьютерных систем и сетей обострилась в связи с расширением их функций и ростом объема их программного обеспечения. Математическое моделирование надежности компьютерных систем и сетей предназначено для оценки зависимости их характеристик надежности от других параметров, значения которых могут быть известны либо измерены в процессе функционирования компьютерных систем и сетей. С помощью математических моделей возможна оценка параметров, косвенно влияющих на надежность программного обеспечения, таких как число ошибок, оставшихся в программе, или интенсивность обнаружения ошибок.

E-mail: arkandreev@gmail.com

Ключевые слова: компьютерные системы, компьютерные сети, надежность, моделирование, программное обеспечение.

Высокая эффективность системы управления реального времени может быть достигнута только при соответствующей надежности функционирования всех ее компонентов. В настоящее время создан целый ряд сложных компьютерных систем и сетей (КСС) управления высокой надежности. Они состоят из элементов, узлов, линий связи и программного обеспечения (ПО). Поэтому при анализе надежности КСС условно выделяют аспекты аппаратной, структурной (комбинаторной) и программной надежности. Под аппаратной надежностью понимается сохранение работоспособности КСС с качеством не хуже заданного на некотором интервале времени. Это свойство обуславливается многими факторами, в том числе и стойкостью элементной базы к дестабилизирующему воздействию внешней среды. Под структурной или комбинаторной надежностью понимается объективное свойство КСС обеспечивать связность параллельных КСС с качеством не хуже заданного. Надежность ПО оценивается по степени влияния на комплексные показатели надежности КСС. Наиболее подходящей мерой надежности является вероятность того, что КСС выполняют функцию управления в течение заданного времени при условии взаимодействия КСС и ПО. Отказы КСС и ПО в определенных случаях являются взаимозависимыми событиями. Эта зависимость возникает из-за взаимовлияния потоков отказов аппаратуры и программ КСС.

Рассмотрим подробнее влияние на надежность КСС и ПО этих факторов. Компоненты аппаратной части КС имеют самые разные ме-

ханизмы отказов. Некоторые из них могут быть вызваны воздействием программной части системы, например, чрезмерное (интенсивное) использование каких-либо компонентов аппаратуры, особенно имеющих механические элементы. Можно утверждать, что во многих случаях отказы ПО и аппаратной части КСС являются событиями зависимыми. Влияние программы на надежность аппаратуры рассмотрим на примере двухфункциональной КСС. Один план управления требует, чтобы обе функции были активными для расчета реакции на входные данные, в то время как другой план требует, чтобы только одна функция была активной. Когда программа влияет на надежность аппаратуры таким образом, мы можем говорить только об условной статистической независимости аппаратной и программной частей.

Отказы могут быть обусловлены ограничением на работу в реальном времени (в КСС среда может изменяться динамически), поэтому если время планирования или расчета отклика слишком велико, то к моменту выполнения отклика среда может быть уже измененной так сильно, что вычисленный или спланированный отклик не будет иметь требуемого эффекта. Эти отказы часто характеризуются неспособностью КСС работать при ограничениях на реальное время. Кроме того, перечисленные факторы влияют друг на друга.

Вместе с тем в целях декомпозиции задачи получение отдельных оценок показателей надежности КСС и ПО с последующим их объединением по схеме независимых событий весьма распространено при комплексном анализе надежности КСС [1, 2]. Пренебрежение взаимозависимостью отказов приводит к оценке снизу для показателей надежности КСС и ПО [2].

Таким образом, анализ надежности КСС — достаточно сложная задача, на которую влияет большое число факторов. И, очевидно, ее решение желательно анализировать, учитывая взаимодействие всех компонентов КСС.

Одними из первых работ, посвященных надежности сложных КСС, являются работы Э. Мура и К. Шеннона. Дальнейшее развитие теории анализа надежности отражено в работах Р. Барлоу, Ф. Прошана, Дж. Эзари, И.А. Ушакова, А.К. Кельманса, В.П. Полесского, А.М. Половко, С.В. Гурова, Э. Ханслера и др.

Широкое внедрение в практику методов анализа надежности как в нашей стране, так и за рубежом показало, что на больших разветвленных структурах КСС и ПО получить точные значения показателей надежности затруднительно, что привело к развитию аналитических методов приближенной оценки показателей надежности, но с гарантированной точностью вычислений. В основе таких подходов лежало использование точных методов, позволяющих вычислять количественные оценки показателей надежности, приближающиеся к точному значению.

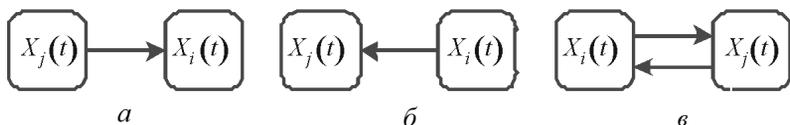


Рис. 1. Графы взаимозависимости двух случайных процессов рождения и гибели

1. Стохастически зависимые процессы типа рождения и гибели. Рассмотрим взаимозависимые отказы КСС и ПО и определим характеристики надежности аппаратного и программного комплексов КСС.

Пусть векторная случайная функция $X(t)$ состоит из m действительных составляющих $X_1(t), \dots, X_m(t)$, каждая из которых представляет собой случайный процесс рождения и гибели, причем для каждого фиксированного момента времени t будем рассматривать случайный вектор в m -мерном пространстве $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)\}$.

Введем в рассмотрение граф случайной функции $X(t) \sim G(X(t))$, вершины которого представляют собой составляющие этой случайной функции. Тогда граф случайной функции $X(t)$, имеющей m составляющих, содержит m вершин. Ребра графа и будут определять те связи, которые существуют между отдельными составляющими векторной случайной функции $X_i(t)$ ¹ (рис. 1).

Рассмотрим закон распределения одной составляющей случайного процесса рождения и гибели $X_i(t)$. Поскольку каждая случайная функция $X_i(t)$ ($i = \overline{1, m}$) представляет собой марковский случайный процесс с непрерывным временем и дискретным числом состояний, то исчерпывающей характеристикой этого процесса является его двумерный закон распределения [3], который запишем в следующем виде:

$$P_{h,g}^{(i)}(t, t') = P[(X_i(t) = x_h)(X_i(t') = x_g)],$$

где $g, h = \overline{0, n_i}$; $n_i + 1$ — число возможных состояний процесса рождения и гибели $X_i(t)$; $P_{h,g}^{(i)}$ — закон распределения случайного процесса рождения и гибели $X_i(t)$.

Все вероятностные характеристики случайного процесса рождения и гибели $X_i(t)$, в том числе и его закон распределения, определяются тремя группами неслучайных параметров: а) числом возможных состояний процесса $n_i + 1$; б) интенсивностями потоков размножения $\lambda_k^{(i)}(t)$ ($k = \overline{0, n_i}$); в) интенсивностями потоков гибели $\mu_k^{(i)}(t)$ ($k = \overline{0, n_i}$).

¹Ребро $R[X_i(t); X_j(t)] = 1$, если процесс $X_i(t)$ является управляющим по отношению к процессу $X_j(t)$. Ребро $R[X_i(t); X_j(t)] = 0$, если процесс $X_i(t)$ не является управляющим по отношению к процессу $X_j(t)$. Если исследуются только два процесса $X_i(t)$ и $X_j(t)$, то они будут независимыми тогда и только тогда, когда выполняется условие $R[X_i(t); X_j(t)] = R[X_j(t); X_i(t)] = 0$.

Исчерпывающей характеристикой процесса рождения и гибели $X_i(t)$ является его двумерный закон распределения, который полностью определяется параметрами этого процесса $\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i$. Это положение символически можно записать следующим образом:

$$P_{h,g}^{(i)}(t, t') = P_{h,g}^{(i)}\left(t, t', \lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i\right) \quad (h, g = \overline{0, n_i}).$$

Исследуем закон распределения двух случайных процессов рождения и гибели $X_i(t)$ и $X_j(t)$. Зависимость между двумя случайными процессами рождения и гибели $X_i(t)$ и $X_j(t)$ возможна в трех различных случаях:

- если параметры случайного процесса рождения и гибели $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$ зависят от вида и значения параметров случайного процесса рождения и гибели $X_j(t) \sim (\lambda_k^{(j)}, \mu_k^{(j)}, n_j)$, а параметры процесса $X_j(t) \sim (\lambda_k^{(j)}, \mu_k^{(j)}, n_j)$ не зависят от вида и значения параметров процесса $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$ (рис. 1, а);

- если параметры случайного процесса рождения и гибели $X_j(t) \sim (\lambda_k^{(j)}, \mu_k^{(j)}, n_j)$ зависят от вида и значения параметров случайного процесса рождения и гибели $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$, а параметры процесса $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$ не зависят от вида и значения параметров процесса $X_j(t) \sim (\lambda_k^{(j)}, \mu_k^{(j)}, n_j)$ (рис. 1, б);

- если параметры случайного процесса рождения и гибели $X_j(t) \sim (\lambda_k^{(j)}, \mu_k^{(j)}, n_j)$ зависят от вида и значения параметров случайного процесса рождения и гибели $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$ и параметры процесса $X_i(t) \sim (\lambda_k^{(i)}, \mu_k^{(i)}, n_i)$, в свою очередь, зависят от вида и значения параметров процесса $X_j(t) \sim (\lambda_k^{(j)}, \mu_k^{(j)}, n_j)$ (рис. 1, в).

Первые два случая с точки зрения определения тождественны (меняются лишь местами сами случайные процессы). Поэтому ограничимся рассмотрением лишь первого случая. В нем развитие процесса рождения и гибели $X_j(t)$ полностью обусловлено его параметрами $(\lambda_k^{(j)}, \mu_k^{(j)}, n_j)$.

Развитие же случайного процесса рождения и гибели $X_i(t)$ происходит под влиянием процесса $X_j(t)$. Процесс $X_j(t)$ как бы управляет процессом $X_i(t)$, а процесс $X_i(t)$ в какой-то степени управляется процессом $X_j(t)$. Чтобы различать эти процессы, в первом случае будем называть процесс $X_j(t)$ управляющим случайным процессом рождения и гибели по отношению к процессу $X_i(t)$, а процесс $X_i(t)$ — управляемым случайным процессом рождения и гибели со стороны процесса $X_j(t)$.

Во втором случае (см. рис. 1, б), наоборот, процесс $X_i(t)$ является управляющим случайным процессом рождения и гибели, а процесс $X_j(t)$ — управляемым случайным процессом рождения и гибели.

Отметим третий, наиболее общий случай: оба случайных процесса рождения и гибели $X_i(t)$ и $X_j(t)$ влияют друг на друга.

Рассмотрим векторную случайную функцию $X(t)$, имеющую произвольное число m составляющих $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$.

Совокупность всех составляющих случайной функции $X(t)$ будем называть множеством случайных процессов рождения и гибели, а сами составляющие — элементами этого множества. Рассмотрим произвольное (непустое) подмножество случайных процессов рождения и гибели $Y(t)$, составляющими (элементами) которого являются процессы $X_i(t), \dots, X_k(t)$. Будем называть подмножество $Y(t)$ замкнутым, если в число составляющих этого подмножества объединены все зависимые между собой случайные процессы рождения и гибели.

Обозначим подмножеством $Z(t)$ дополнение подмножества $Y(t)$ [$X(t) = Y(t) + Z(t)$]. Следовательно, подмножество $Y(t)$ будет замкнутым, если между графом подмножества $Y(t) \sim G(Y(t))$ и графом подмножества $Z(t) \sim G(Z(t))$ нет никаких связей. Другими словами, для любой вершины $X_i(t) \in Y(t)$ нет маршрута, соединяющего эту вершину с любой вершиной $X_j(t) \in Y(t)$, и нет маршрута, соединяющего любую вершину $X_l(t) \in Z(t)$ с любой вершиной $X_j(t) \in Y(t)$:

$$M[X_i(t), \dots, X_l(t)] = M[X_l(t), \dots, X_j(t)] = 0. \quad (1)$$

Отдельная вершина $X_i(t)$, для которой $R[X_i(t); X_j(t)] = R[X_j(t); X_i(t)] = 0$, является замкнутым подмножеством, если $X_j(t)$ — любой элемент множества $X(t)$ ($j \neq i$).

Таким образом, исследование случайных процессов рождения и гибели можно вести только в рамках замкнутых подмножеств.

Рассмотрим замкнутое подмножество $Y(t)$, число элементов которого не меньше двух.

Между двумя любыми элементами $X_i(t)$ и $X_j(t)$ замкнутого подмножества $Y(t)$ должен существовать хотя бы один из двух маршрутов: маршрут от вершины $X_i(t)$ к вершине $X_j(t)$ или маршрут от вершины $X_j(t)$ к вершине $X_i(t)$:

$$M[X_i(t), \dots, X_j(t)] = 1, \quad M[X_j(t), \dots, X_i(t)] = 0,$$

или

$$M[X_j(t), \dots, X_i(t)] = 1, \quad M[X_i(t), \dots, X_j(t)] = 0, \quad (2)$$

или

$$M[X_i(t), \dots, X_j(t)] = M[X_j(t), \dots, X_i(t)] = 1.$$

Совокупность элементов случайной функции $X(t)$, удовлетворяющей условиям (1) и (2), составляет замкнутое подмножество $Y(t)$.

Любое непустое замкнутое подмножество $Y(t)$ можно разбить на три непересекающихся подмножества: $Y^{(1)}(t)$ — подмножество, состоящее только из управляющих случайных процессов рождения и гибели; $Y^{(2)}(t)$ — подмножество, состоящее только из управляемых случайных процессов рождения и гибели; $Y^{(3)}(t)$ — подмножество, состоящее только из транзитивных случайных процессов рождения и гибели.

Это означает, что вершины $X_i(t)$, принадлежащие подмножеству $Y^{(1)}(t)$, являются начальными; вершины $X_j(t)$, принадлежащие подмножеству $Y^{(2)}(t)$, являются конечными; вершины $X_k(t)$, принадлежащие подмножеству $Y^{(3)}(t)$, являются транзитивными.

Для любого элемента $X_i(t)$ подмножества $Y^{(1)}(t)$ найдется хотя бы один элемент $X_j(t)$, принадлежащий либо подмножеству $Y^{(2)}(t)$, либо подмножеству $Y^{(3)}(t)$, для которого выполняется условие

$$R[X_i(t), X_j(t)] = 1[X_j(t) \in Y^{(2)}(t) + Y^{(3)}(t); X_i(t) \in Y^{(1)}(t)]. \quad (3)$$

Для любого элемента $X_j(t)$ подмножества $Y^{(2)}(t)$ найдется хотя бы один элемент $X_i(t)$, принадлежащий либо подмножеству $Y^{(1)}(t)$, либо подмножеству $Y^{(3)}(t)$, для которого выполняется условие

$$R[X_i(t), X_j(t)] = 1[X_j(t) \in Y^{(2)}(t); X_i(t) \in Y^{(1)}(t) + Y^{(3)}(t)]. \quad (4)$$

Условия (3) и (4) позволяют однозначно разбить подмножество $Y(t)$ на три непересекающихся подмножества $Y^{(1)}(t)$, $Y^{(2)}(t)$, $Y^{(3)}(t)$ так, что

$$Y(t) = Y^{(1)}(t) + Y^{(2)}(t) + Y^{(3)}(t).$$

Зависимыми случайными процессами рождения и гибели могут быть, например, процессы в КСС, состоящих из двух одинаковых компьютеров и ПО к ним. Исследуем динамику изменения случайного процесса рождения и гибели $X_1(t)$: каждый компьютер может отказывать (рождение ошибок), отказавший компьютер немедленно начинает восстанавливаться (гибель ошибок). Второй случайный процесс рождения и гибели $X_2(t)$ есть число ошибок в ПО КСС. Процесс рождения ошибок происходит из-за возможности отказа ПО, а гибель — в результате того, что ошибки в ПО немедленно исправляются.

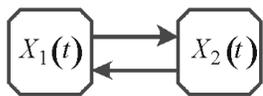


Рис. 2. Граф взаимозависимых транзитивных процессов рождения ошибок в КСС и ПО

Рассматриваемые процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ являются транзитивными (рис. 2).

Наличие ребра $R[X_1(t), X_2(t)]$ очевидно. Это связано с тем, что если случайный процесс

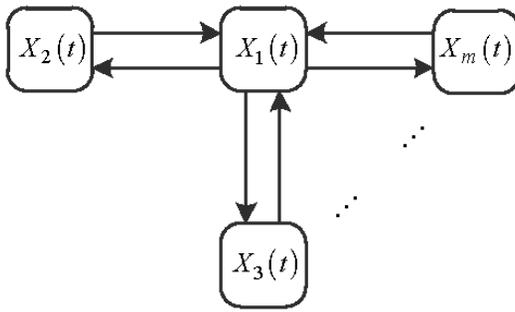


Рис. 3. Граф функции $X(t)$ для общего числа различных устройств и ПМ, которые требуются для эксплуатации КСС данного вида

$X_2(t) = 0$, то интенсивность выхода из строя КСС увеличится вследствие того, что часть компьютеров не будет находиться в эксплуатации из-за нерабочего ПО.

В рамках этого примера число составляющих векторной случайной функции $X(t)$ можно увеличить в результате перечисления всех тех устройств и программных модулей (ПМ), которые требуются для нормальной эксплуатации КСС. Допустим, что общее число различных устройств и ПМ, которое требуется для эксплуатации КСС данного вида (основного изделия), равно $m - 1$ и векторная случайная функция $X(t)$ будет иметь m составляющих, объединенных в граф (рис. 3).

Наряду с отказами аппаратного обеспечения отказы ПО, которые вызваны ошибками, допущенными при проектировании ПО КСС [4–6], являются другим существенным фактором, влияющим на показатели надежности.

Однако до настоящего времени при проектировании, создании и отработке КСС не учитывался фактор взаимовлияния на надежность совместной работы аппаратных и программных средств.

2. Взаимозависимость характеристик двух случайных процессов. Рассмотрим случай, когда векторная случайная функция $X(t)$ состоит из двух составляющих: $X_1(t)$ и $X_2(t)$. Пусть процесс $X_1(t)$ — управляющий, а процесс $X_2(t)$ — управляемый (рис. 4, а). Управление процессом $X_2(t)$ может идти по линии воздействия на потоки рождения, на потоки гибели и на потоки рождения и гибели одновременно.

При воздействии процесса $X_1(t)$ на потоки рождения процесса $X_2(t)$ интенсивности потоков рождения процесса $X_2(t)$ должны зави-

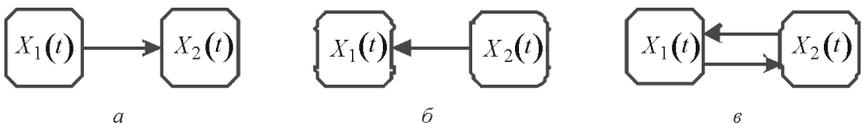


Рис. 4. Взаимозависимость характеристик двух случайных процессов

сеть от вида процесса $X_1(t)$:

$$\lambda_k^{(2)}(t) = \lambda_{(k)}^{(2)}\left(\lambda_k^{(1)}(t), \mu_k^{(1)}(t), n_1, t\right) \quad (k = \overline{0, n_2 - 1}),$$

а интенсивности потоков гибели не зависят от вида и значения параметров процесса $X_1(t)$.

При воздействии процесса $X_1(t)$ на потоки гибели процесса $X_2(t)$ интенсивности потоков гибели процесса $X_2(t)$ должны зависеть от вида процесса $X_1(t)$, т.е. являться в общем случае функционалами от функций $\lambda_k^{(1)}(t)$, $\mu_k^{(1)}(t)$ и параметра n_1 :

$$\mu_k^{(2)}(t) = \mu_{(k)}^{(2)}\left(\lambda_k^{(1)}(t), \mu_k^{(1)}(t), n_1, t\right) \quad (k = \overline{0, n_1 - 1}).$$

В этом случае интенсивность потоков рождения не зависит от вида и значения параметров процесса $X_1(t)$.

Наконец, при воздействии процесса $X_1(t)$ на потоки рождения и гибели процесса $X_2(t)$ интенсивности потоков рождения и гибели процесса $X_2(t)$ должны зависеть от вида и значения параметров процесса $X_1(t)$.

Рассмотрим сначала случай, когда процесс $X_1(t)$ воздействует на интенсивности потоков рождения процесса $X_2(t)$.

1. Случайный процесс $X_1(t)$ представляет собой число однородных единиц процесса ошибок КСС, каждая из которых осуществляет рождение единиц процесса $X_2(t)$. При этом интенсивность рождения единиц процесса $X_2(t)$ одинакова для всех единиц процесса $X_1(t)$ и равна $\lambda(t)$, ограничений на общее число состояний процесса $X_2(t)$ нет ($n_2 \rightarrow \infty$).

В этом случае условная интенсивность рождения единиц процесса $X_2(t)$, вычисляемая при гипотезе о том, что в момент времени t процесс $X_1(t)$ находился в состоянии $x_i^{(1)}$, будет равна $\lambda(t) x_i^{(1)}$, а безусловная интенсивность определяется по формуле

$$\lambda_k^{(2)}(t) = \sum_{i=0}^{n_1} \lambda(t) x_i^{(1)} p_i^{(1)}(t) = \lambda(t) m_1(t), \quad (5)$$

где

$$p_i^{(1)}(t) = P[X_1(t) = x_i^{(1)}]; \quad m_1(t) = M[X_1(t)].$$

Отметим, что интенсивность потока $\lambda_k^{(2)}(t)$ определяется только параметром $\lambda(t)$ и математическим ожиданием случайной функции $X_1(t)$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\lambda_k^{(2)}\left(\lambda_k^{(1)}, \mu_k^{(1)}, h_1, t\right) = \lambda(t) m_1(t),$$

где $m_1(t)$ представляет собой известный функционал от параметров процесса рождения и гибели $X_1(t)$: $\lambda_k^{(1)}, \mu_k^{(1)}, n_1$ [3].

Таким образом, в рассматриваемом случае интенсивность потока рождения единиц, составляющих управляемый процесс $X_2(t)$, зависит только от математического ожидания управляющего процесса $X_1(t)$ и интенсивности рождения единиц управляемого процесса каждой единицей управляющего процесса, которая предполагается одинаковой для всех единиц управляющего процесса $X_1(t)$.

Формула (5) является выражением известного допущения о так называемой квазирегулярности взаимодействия процессов рождения и гибели, впервые сформулированного в [7]. Отметим, что допущение о квазирегулярности является следствием допущения о том, что каждая единица управляющего процесса производит единицы управляемого процесса с одинаковой интенсивностью. Последнее допущение во все не исключает того положения, что каждая единица управляющего процесса должна порождать строго одинаковое число единиц управляемого процесса. Речь идет о том, что среднее рождение единиц управляемого процесса было одинаковым для всех единиц управляющего процесса. Другим допущением, которое было использовано, является допущение о том, что рассматриваемые случайные процессы — марковские. Это допущение эквивалентно, в частности, тому, что суммарный поток порождаемых единиц управляемого процесса, интенсивность которого определяется по формуле (5), является пуассоновским. Данное допущение является практически вполне оправданным, если величина $m_1(t) > 5$, что почти всегда выполняется. Это утверждение вытекает из теоремы о сходимости суммарного потока к пуассоновскому в довольно широких пределах [7, 8].

2. Случайный процесс $X_1(t)$ представляет собой число однородных единиц процесса ошибок КСС, каждая из которых осуществляет рождение единиц процесса $X_2(t)$. При этом условии интенсивность рождения единиц процесса $X_2(t)$ есть некоторая функция (или функционал) $\varphi_1[X_1(t)]$ числа единиц процесса $X_1(t)$.

В этом случае интенсивность рождения единиц процесса $X_2(t)$, вычисляемая при гипотезе о том, что в момент времени t процесс $X_1(t)$ находится в состоянии x_i , будет равна $\varphi_1(x_i^{(1)})$, а математическое ожидание этой интенсивности определяется формулой

$$\lambda_k^{(2)}(t) = M[\varphi_1(X_1(t))].$$

Пусть функция $\varphi(x_i^{(1)})$ представляет полином l -й степени от величины $x_i^{(1)}$:

$$\varphi(x_i^{(1)}) = \sum_{k=0}^l a_k(t) (x_i^{(1)})^k.$$

Коэффициенты этого полинома в общем случае могут быть любыми неотрицательными функциями времени. В этом случае

$$\lambda_k^{(2)}(t) = \sum_{j=0}^l a_j(t) \alpha_j[X_1(t)].$$

где

$$\alpha_j[X_1(t)] = M[(X_1(t))^j] = \sum_{i=0}^{n_i} (x_i^{(1)})^j p_i^{(1)}(t) \quad (j = 0, 1, \dots, l) \quad (6)$$

— начальный момент n -го порядка случайной функции $\varphi(x_i)$.

Предыдущий случай является частным для рассматриваемого случая, когда $a_0(t) = a_2(t) = \dots = a_l(t) = 0$, а $a_1(t) = \lambda(t)$.

Если математическое ожидание случайного процесса $X_1(t)$ достаточно велико для того, чтобы считать, что его закон распределения близок к нормальному, то начальные моменты (6) могут быть определены по известным формулам [9]:

$$\alpha_j[X_1(t)] = \sum_{k=0}^s C_s^k \mu_k[X_1(t)] (M[X_1(t)])^{s-k},$$

где

$$\mu_k[X_1(t)] = M \left[\left(\overset{\circ}{X}_1(t) \right)^k \right] = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } k, \\ (2k-1)!! \sigma_{x_1}^{2k}(t) & \text{при четном } k, \end{cases}$$

$$\sigma_{x_1}(t) = \sqrt{D_{x_1}(t)}.$$

Другой интересный случай состоит в том, что преобразование $\varphi_1[X_1(t)]$ представляет собой линейный неоднородный оператор:

$$\varphi_1[X_1(t)] = L_{0t}[X_1(t)] + X(t),$$

где $X(t)$ — неоднородная часть этого оператора, а L_{0t} — линейный однородный оператор.

В этом случае интенсивность выпуска единиц процесса $X_2(t)$ определится по формуле [3]

$$\lambda_k^{(2)}(t) = M[L_{0t}(X_1(t)) + X(t)].$$

3. Рассмотрим последний случай влияния случайного процесса $X_1(t)$ на интенсивности потоков рождения случайного процесса $X_2(t)$. Сущность этого влияния состоит в том, что интенсивность потоков рождения определяется не полностью параметрами процесса $X_2(t)$, а только частично, по формуле

$$\lambda_k^{(2)}(t) = M[\varphi_1(\bar{X}_1(t))] + \lambda_1^{(2)}(t) + k\lambda_2^{(2)}(t).$$

Введение ограничений на число состояний процесса $X_2(t)$ ($n_2 < \infty$) во всех рассмотренных случаях можно учесть так: $\lambda_k^{(2)}(t) \equiv 0$ ($k \geq n_2$).

Проанализируем влияние случайного процесса $X_1(t)$ на интенсивности потоков гибели случайного процесса $X_2(t)$. При исследовании влияния управляющего процесса $X_1(t)$ на потоки гибели процесса $X_2(t)$ необходимо рассматривать два разных случая.

Первый случай. Гибель единиц процесса $X_2(t)$ происходит за счет их потребления единицами процесса $X_1(t)$. Кроме того, единицы процесса $X_1(t)$ не могут существовать (гибнут) без этого потребления. В этом случае процессы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ связаны между собой: оба являются транзитивными (рис. 4).

Второй случай. Гибель единиц процесса $X_2(t)$ происходит не из-за потребления единиц процесса $X_2(t)$ единицами процесса $X_1(t)$, а вследствие функционирования единиц процесса $X_1(t)$, которое не ведет ни к рождению, ни к гибели процесса $X_1(t)$. В этом случае процесс $X_1(t)$ будет управляющим, а процесс $X_2(t)$ — управляемым.

Рассмотрим оба случая более подробно.

Случайный процесс рождения и гибели $X_2(t)$ представляет собой число однородных единиц, каждая из которых во время своего существования потребляет единицы, составляющие процесс $X_2(t)$. При этом интенсивность потребления единиц, составляющих процесс $X_2(t)$, одинакова для всех живых единиц процесса $X_2(t)$ — равна $\mu(t)$, если $X_2(t) > 0$, и равна нулю, если $X_2(t) = 0$ (т.е. потреблять нечего).

В этом случае интенсивность гибели единиц процесса $X_2(t)$, вычисляемая при гипотезе о том, что в момент времени t процесс $X_1(t)$ находится в состоянии $x_i^{(1)}$, будет приблизительно равна $\mu(t) x_i^{(1)} \left(1 - p_0^{(2)}(t)\right)$, где $p_0^{(2)}(t) = p[X_2(t) = 0]$. Математическое ожидание этой интенсивности определится по формуле

$$\mu_k^{(2)}(t) = \mu(t) m_1(t) \left[1 - P_0^{(2)}(t)\right]. \quad (7)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\mu_k^{(2)} \left(\lambda_k^{(1)}(t), \mu_k^{(1)}(t), n_1, t \right) = \mu(t) m_1(t) \left(1 - p_0^{(2)}(t)\right).$$

Таким образом, интенсивность потока гибели единиц управляемого процесса $X_2(t)$ зависит как от математического ожидания управляющего процесса $X_1(t)$ и интенсивности потребления единиц управляемого процесса каждой единицей управляющего процесса, которая предполагается одинаковой для всех единиц управляющего процесса, так и от вероятности того, что все единицы процесса $X_2(t)$ погибли. В случае, когда $m_2(t) > 3$, можно практически пользоваться приближенной формулой $\mu_k^{(2)}(t) \approx \mu(t) m_1(t)$.

В рассматриваемом случае интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ будут зависеть от того, обеспечено ли потребление единиц процесса $X_1(t)$ единицами процесса $X_2(t)$, или нет. Простейший случай состоит в том, что интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ зависят лишь от того, есть единицы процесса $X_2(t)$ или их нет.

Если случайная функция $X_2(t) > 0$, то $\mu_k^{(1)}(t) = \mu_k^{(1)}(t)^*$; если случайная функция $X_2(t) = 0$, то $\mu_k^{(1)}(t) = \mu_k^{(1)}(t)^0$.

Следовательно, математические ожидания интенсивностей потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ будут приближенно равны

$$\mu_k^{(1)}(t) = \mu_k^{(1)}(t)^* + \mu_k^{(1)}(t)^0 - \mu_k^{(1)}(t)^* p_0^{(2)}(t).$$

В более общем случае условные интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ могут определяться как некоторое преобразование процесса $X_2(t)$: $\psi_2[X_2(t)]$. Тогда интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ будут равны

$$\mu_k^{(1)}(t) = M[\psi_2[X_2(t)]].$$

И, наконец, возможен случай, когда интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_1(t)$ определяются следующим образом:

$$\mu_k^{(1)}(t) = M[\psi_2(X_2(t))] + \mu_1^{(1)}(t) + k\mu_2^{(1)}(t).$$

Случайный процесс рождения и гибели $X_1(t)$ представляет собой число однородных единиц, каждая из которых осуществляет уничтожение единиц, составляющих процесс $X_2(t)$. При этом потенциальная интенсивность уничтожения единиц, составляющих $X_2(t)$, одинакова для всех единиц процесса $X_1(t)$ и равна $\mu(t)$. Эта потенциальная интенсивность каждой единицы не зависит от того, в каком состоянии находится процесс $X_2(t)$.

В этом случае интенсивности потоков гибели единиц процесса $X_2(t)$ определяются по формуле (7), а интенсивности потоков рождения и гибели единиц процесса $X_1(t)$ не зависят от параметров процесса $X_2(t)$, если функционирование каждой единицы процесса $X_1(t)$, связанное с уничтожением единиц процесса $X_2(t)$, никак не отражается на интенсивностях потоков гибели и размножения процесса $X_1(t)$.

Случайный процесс рождения и гибели $X_1(t)$ представляет собой число однородных единиц. Условная интенсивность потока гибели процесса $X_2(t)$ определяется следующим образом:

$$\psi_1[X_1(t)] + \mu_1^{(2)}(t) + k\mu_2^{(2)}(t) [X_2(t)] > 0.$$

В этом случае интенсивность потока гибели единиц процесса $X_2(t)$ будет определяться по формуле

$$\left(M[\psi_1(X_1(t))] + \mu_1^{(2)}(t) + k\mu_2^{(2)}(t) \right) \left(1 - p_0^{(2)}(t) \right).$$

Теперь рассмотрим случайный процесс $X(t)$, который можно представить в виде разложения $X(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t)$, где элементарные процессы [3] $Y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) определяются марковским процессом блуждания по произвольному множеству состояний $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$.

Рассмотрим только случай, когда множество Y является одинаковым для любого элементарного процесса $Y_k(t)$.

На этом множестве состояний Y задается размеченный граф $G(Y)$, который полностью определяется матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$.

Процесс блуждания по состояниям множества Y определяется матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$ и матрицей-строкой начальных условий $\|p(0)\|$, которые также считаются одинаковыми для всех элементарных процессов $Y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$).

Введем понятие элементарного целочисленного случайного процесса $Y(t)$. Рассмотрим некоторое подмножество состояний $Z \subset Y$, которое не является пустым и не равно всему множеству состояний Y . Будем считать случайный процесс $Y(t) = 1$, если в момент времени t система находится в одном из состояний $y_i \in Z$, и процесс $Y(t) = 0$, если в момент времени t система находится в одном из состояний $y_i \in Z$. Случайный процесс $Y(t)$, определенный таким образом, будем называть элементарным целочисленным случайным процессом.

Реализация процесса $Y(t)$ представляет собой в общем случае скачкообразную случайную функцию, которая в любой момент времени t может иметь лишь одно из двух значений: 0 или 1 (рис. 5).

Моменты T_1, T_2, \dots, T_i представляют собой последовательность моментов попадания процесса $Y(t)$ в подмножество состояний $Z \subset Y$, а моменты T'_1, T'_2, \dots, T'_3 , представляют собой последовательности моментов попадания процесса $Y(t)$ в дополнение подмножества

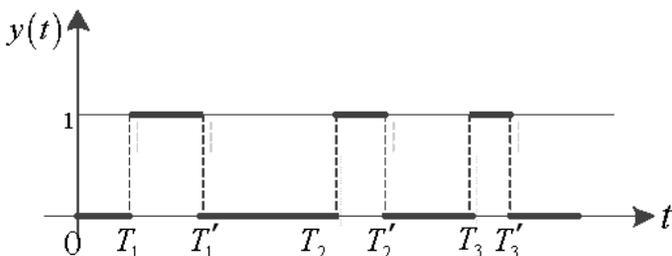


Рис. 5. Реализация скачкообразной случайной функции

$Z \sim \bar{Z} = Y - Z$. Если элементарный процесс рождения и гибели был марковским процессом, то элементарный целочисленный случайный процесс в общем случае не является марковским. Элементарный случайный процесс рождения и гибели является частным случаем элементарного целочисленного случайного процесса, когда множество состояний Y сокращается до двух состояний.

Разложение $X(t)$ будем называть однородным разложением целочисленного случайного процесса

$$X(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t),$$

если его составляющие $Y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) представляют собой элементарные целочисленные случайные процессы с одинаковыми законами распределения и совокупность любых двух случайных процессов $Y_i(t)$ и $Y_j(t)$ ($i, j = \overline{1, n}$) также имеет одинаковый закон распределения.

Разложение $X(t)$ будем называть однородным каноническим разложением целочисленного случайного процесса, если его составляющие $Y_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) представляют собой некоррелированные элементарные целочисленные случайные процессы с одинаковыми законами распределения.

Изучим закон распределения и характеристики элементарного целочисленного случайного процесса $Y(t)$, который полностью определяется матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$ и матрицей-строкой начальных условий $\|p(0)\|$, описывающими процесс блуждания по множеству состояний Y .

Закон распределения сечения случайной функции $Y(t)$ определяется следующим образом: $\pi_1(t) = P(Y(t) = 1) = \sum_{y_i \in Z} p_i(t)$, где $p_i(t)$

представляет собой вероятность того, что в момент времени t процесс, описывающий блуждание по множеству состояний Y , находится в состоянии y_i , а суммирование распространяется только на те состояния y_i , которые принадлежат подмножеству Z . Вероятности $p_i(t)$ определяются путем интегрирования системы дифференциальных уравнений, определяемых графом $G(Y)$ (матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$) и начальными условиями, задаваемыми матрицей-строкой $\|p(0)\|$. Очевидно, что $\pi_0(t) = 1 - \pi_1(t)$.

Двумерный закон распределения случайной функции $Y(t)$ будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\pi_{0,0}(t, t') &= P[(Y(t) = 0)(Y(t') = 0)], \\ \pi_{0,1}(t, t') &= P[(Y(t) = 0)(Y(t') = 1)], \\ \pi_{1,0}(t, t') &= P[(Y(t) = 1)(Y(t') = 0)], \\ \pi_{1,1}(t, t') &= P[(Y(t) = 1)(Y(t') = 1)].\end{aligned}$$

Для определенности будем считать, что $t' > t$. Эти вероятности можно записать так

$$\pi_{i,j}(t, t') = \pi_i(t) \pi_{j|i}(t', t) \quad (i, j = 0, 1), \quad (8)$$

где

$$\pi_{j|i}(t', t) = P(Y(t') = j | Y(t) = i) \quad (i, j = 0, 1). \quad (9)$$

Найдем указанные условные вероятности; их можно получить путем интегрирования на участке времени (t', t) дифференциальных уравнений, соответствующих графу $G(Y)$ и матрице интенсивностей $\|\lambda(t)\|$ при соответствующих начальных условиях в момент времени t . Начальные условия могут иметь различный вид. При определении вероятности $\pi_{j|0}(t', t)$ ($j = 0, 1$) начальные условия в момент времени t определяются как

$$p_h^{(0)}(t) = p_h(t) / \sum_{y_h \in \bar{Z}} p_h(t), \quad (10)$$

где индекс h принадлежит тем состояниям y_h , которые принадлежат множеству \bar{Z} ($y_h \in \bar{Z}$); $p_h(t)$ — безусловная вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии $p_h(t) \in \bar{Z}$, а индекс 0 указывает, что описываются начальные условия в момент времени t .

Нетрудно убедиться в том, что $\sum_{y_h \in \bar{Z}} p_h^{(0)}(t) = 1$, т.е. в момент времени t система находится в одном из состояний $y_h \in \bar{Z}$.

В результате интегрирования на участке времени (t', t) системы дифференциальных уравнений, соответствующих графу $G(Y)$ (матрице интенсивностей $\|\lambda(t)\|$), при указанных ранее начальных условиях (10) можно определить условные вероятности

$$p_{k|0}(t', t) \quad (k = \overline{0, m}). \quad (11)$$

Эти вероятности равны условным вероятностям попадания процесса блуждания в момент времени t' в состояние y_k ($k = \overline{0, m}$), вычисляемым при условии, что в момент времени $t' > t$ процесс находился в одном из состояний множества \bar{Z} . Искомые вероятности

$\pi_{j|0}(t', t)$ ($j = 0, 1$) определим по формулам

$$\pi_{1|0}(t', t) = \sum_{y_e \in Z} p_{e|0}(t', t), \quad (12)$$

$$\pi_{0|0}(t', t) = 1 - \pi_{1|0}(t', t). \quad (13)$$

Аналогично найдем вероятности $\pi_{j|1}(t', t)$ ($j = 0, 1$). Начальные условия в момент времени t в этом случае определяются по формуле

$$p_e^{(0)}(t) = p_e(t) \sum_{y_e \in Z} p_e(t). \quad (14)$$

Затем интегрируем на участке времени (t', t) систему дифференциальных уравнений, соответствующих графу $G(Y)$ (матрице интенсивностей $\|\lambda(t)\|$), и определяем условные вероятности

$$p_{k|1}(t', t) \quad (k = \overline{0, m}), \quad (15)$$

а по ним находим искомые вероятности:

$$\pi_{1|1}(t', t) = \sum_{y_e \in Z} p_{e|1}(t', t), \quad (16)$$

$$\pi_{0|1}(t', t) = 1 - \pi_{1|1}(t', t). \quad (17)$$

Таким образом, совокупность формул (8)–(17) дает возможность определить двумерный закон распределения случайной функции $Y(t)$. Отметим, что в данном случае этот закон распределения не является исчерпывающей характеристикой случайной функции $Y(t)$.

Определим характеристики случайной функции $Y(t)$: $m_y(t)$, $D_y(t)$, $k_y(t, t')$.

Математическое ожидание и дисперсию случайной функции $Y(t)$ найдем по формулам

$$m_y(t) = \pi_1(t),$$

$$D_y(t) = \pi_1(t) (1 - \pi_1(t)).$$

Математическое ожидание произведения двух сечений случайной функции $Y(t)$ имеет следующий вид:

$$M[Y(t)Y(t')] = \pi_1(t) \pi_{1|1}(t', t),$$

откуда

$$k_y(t', t) = \pi_1(t) [\pi_{1|1}(t', t) - \pi_1(t)].$$

Когда случайная функция $X(t)$ является однородным каноническим разложением целочисленного марковского случайного процесса,

ее характеристики определяются как

$$m_x(t) = nm_y(t),$$

$$D_x(t) = nD_y(t),$$

$$k_x(t, t') = nk_y(t, t').$$

Если случайная функция $X(t)$ является однородным разложением целочисленного марковского случайного процесса, то ее характеристики определяются по формулам

$$m_x(t) = nm_y(t),$$

$$D_x(t) = nD_y(t) + C_n^2 k_{y,y}(t, t'),$$

$$k_x(t, t') = \Gamma_x(t, t') - m_x(t) m_x(t'),$$

$$\Gamma_x(t, t') = n\Gamma_y(t, t') + C_n^2 \Gamma_{y,y}(t, t').$$

Следует обратить внимание на тот факт, что формула для математического ожидания однородного целочисленного случайного процесса $X(t)$ не зависит от того, является ли этот процесс каноническим, или нет.

Рассмотрим более сложный случай, когда среди множества состояний Y выделяются два произвольных подмножества: Z_1 и Z_2 . Между этими подмножествами могут существовать различные соотношения: а) $Z_1 \cup Z_2 = \emptyset$, т.е. подмножества Z_1 и Z_2 не имеют общих состояний (не пересекаются); б) $Z_1 \cup Z_2 \neq \emptyset$, $Z_1 \not\subset Z_2$, $Z_2 \not\subset Z_1$, т.е. подмножества Z_1 и Z_2 имеют общие состояния (пересекаются), но ни одно из них не включает полностью другого; в) $Z_1 \cup Z_2 \neq \emptyset$, $Z_1 \subset Z_2$, $Z_2 \not\subset Z_1$, т.е. подмножества Z_1 и Z_2 пересекаются и второе полностью включает в себя первое; г) $Z_1 \cup Z_2 \neq \emptyset$, $Z_2 \subset Z_1$, $Z_1 \not\subset Z_2$, этот случай аналогичен случаю в).

С точки зрения анализа случаи в) и г) подобны, поэтому ограничимся изучением только случаев а), б), в).

Введем в рассмотрение случайную функцию $Y_{z_1,k}(t)$, которую определим следующим образом: $Y_{z_1,k}(t) = 1$, если k -я единица в момент времени t (из всех рассматриваемых) находится в одном из состояний подмножества Z_1 ; $Y_{z_1,k}(t) = 0$ если k -я единица в момент времени t не находится ни в одном из состояний подмножества Z_1 .

Таким образом, случайная функция $Y_{z_1,k}(t)$ представляет собой элементарный целочисленный случайный процесс. Аналогично вводится элементарный целочисленный процесс $Y_{z_2,k}(t)$.

Рассмотрим случайные функции

$$X^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^n Y_{z_1,k}(t), \quad (18)$$

$$X^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^n Y_{z_2,k}(t), \quad (19)$$

которые представляют собой однородные разложения целочисленных случайных процессов.

Для каждой из случайных функций $X^{(1)}(t)$ и $X^{(2)}(t)$ было показано, как находить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию в различных случаях.

Найдем способ определения взаимной корреляционной функции двух случайных функций $X^{(1)}(t)$ и $X^{(2)}(t)$:

$$R_x^{(1,2)}(t', t) = M \left[\overset{\circ}{X}^{(1)}(t) \overset{\circ}{X}^{(2)}(t') \right]. \quad (20)$$

Рассмотрим случай, когда разложения (18) и (19) являются однородными каноническими разложениями целочисленных случайных процессов и все элементарные процессы

$$Y_{z_1,k}(t) \quad (k = \overline{1, n}) \quad \text{и} \quad Y_{z_2,l}(t) \quad (l = \overline{1, n})$$

являются независимыми в своей совокупности.

По определению имеем

$$\begin{aligned} M \left[\overset{\circ}{X}^{(1)}(t) \overset{\circ}{X}^{(2)}(t') \right] &= M \left[\left(\sum_{k=1}^n \overset{\circ}{Y}_{z_1,h}(t) \right) \left(\sum_{j=1}^n \overset{\circ}{Y}_{z_2,l}(t') \right) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n M \left[\sum_{k=1}^n \overset{\circ}{Y}_{z_1,k}(t) \overset{\circ}{Y}_{z_2,k}(t') \right] = \sum_{k=1}^n \left(M [Y_{z_1,k}(t) Y_{z_2,k}(t')] - \right. \\ &\quad \left. - M [Y_{z_1,k}(t)] M [Y_{z_2,k}(t')] \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Обозначим

$$M [Y_{z_1,k}(t)] = \pi_{z_1}(t) \quad (22)$$

вероятность того, что единица процесса $X(t)$ в момент времени t находится в одном из состояний множества Z_1 . Соответственно

$$M [Y_{z_2,k}(t')] = \pi_{z_2}(t'). \quad (23)$$

В первом случае произведение функций

$$Y_{z_1,k}(t) Y_{z_0,k}(t) = 1 \quad (24)$$

в том случае, если k -я единица в момент времени t находилась в одном из состояний множества Z_1 и в момент времени $t' > t$ эта единица попадет в одно из состояний множества Z_2 . Обозначим вероятность события (24) так:

$$p(Y_{z_1,k}(t) Y_{z_0,k}(t)) = \pi_{z_1}(t', t) \pi_{z_2|z_1}(t', t). \quad (25)$$

Вероятность $\pi_{z_2|z_1}(t', t)$ определяется путем интегрирования системы дифференциальных уравнений, определяемой матрицей интенсивностей $\|\lambda(t)\|$. Начальные условия для интегрирования в момент времени t определяются аналогично формулам (10) и (14):

$$p_h^{(0)}(t) = p_h(t) \Big/ \sum_{y_h \in Z_1} p_h(t), \quad (26)$$

где $p_h(t)$ — вероятность того, что единица (любая) в момент времени t будет находиться в состоянии $y_h \in Z_1$, а суммирование распространяется только на состояние $y_h \in Z_1$.

Интегрирование оканчивается в момент времени $t' > t$, а вероятность (25) определяется как вероятность пребывания единицы в одном из состояний $y_h \in Z_2$. Следовательно,

$$R_x^{(1,2)}(t', t) = n\pi_{z_1}(t) [\pi_{z_2|z_1}(t', t) - \pi_{z_1}(t')]. \quad (27)$$

Формулы (18)–(27) справедливы для всех рассмотренных случаев при $t \neq t'$. Имеется небольшая особенность при $t = t'$.

Для первого случая $R_x^{(1,2)}(t', t) = n\pi_{z_1}(t)\pi_{z_2}(t)$, так как $\pi_{z_2|z_1}(t', t) \equiv 0$.

Для второго случая $\pi_{z_2|z_1}(t_1, t) = \sum_{y_l \in Z_2} p_l(t) \Big/ \sum_{y_h \in Z_1} p_h(t)$, где сумма $\sum_{y_l \in Z_2} p_l(t)$ распространяется на состояния $y_l \in Z_1 \cap Z_2$, а сумма $\sum_{y_h \in Z_1} p_h(t)$ — на состояния $y_h \in Z_1$.

Для третьего случая $\pi_{z_2|z_1}(t', t) \equiv 1$.

Для четвертого случая $\pi_{z_2|z_1}(t', t) = \sum_{y_l \in Z_2} p_l(t) \Big/ \sum_{y_h \in Z_1} p_h(t)$, где сумма $\sum_{y_l \in Z_2} p_l(t)$ распространяется на состояние $y_l \in Z_1 \cap Z_2 = Z_2$, а сумма $\sum_{y_h \in Z_1} p_h(t)$ — на состояние $y_h \in Z_1$.

Найдем взаимную корреляционную функцию $R_x^{(1,2)}(t, t')$ для случая, когда разложения являются однородными разложениями целочисленных случайных процессов. При этом будем считать известными корреляционные функции

$$K_{z_2|z_1}(t', t) = M \left[\overset{\circ}{Y}_{z_1, k}(t) \overset{\circ}{Y}_{z_2, l}(t) \right] \quad (k, l = \overline{1, n}; \quad k \neq l). \quad (28)$$

В этом случае выражение (21) с учетом (27) и (28) примет следующий вид:

$$R_x^{(1,2)}(t, t') = M \left[\overset{\circ}{X}^{(1)}(t) \overset{\circ}{X}^{(2)}(t') \right] = \\ = n\pi_{z_1}(t) [\pi_{z_2|z_1}(t', t) - \pi_{z_0}(t')] + 2C_n^2 K_{z_2, z_1}(t', t).$$

3. Решение уравнений для определения характеристик надежности однородных разложений процессов рождения и гибели методом динамики средних. Метод динамики средних [7, 10] описывает динамику изменений математических ожиданий случайных функций $X_1(t), \dots, X_m(t)$. Каждая из этих случайных функций представляет собой однородное разложение целочисленного случайного процесса. Все эти случайные функции находятся в определенной зависимости между собой. Таким образом, метод динамики средних представляет собой метод отыскания математического ожидания векторной случайной функции $X(t)$, составляющие которой являются однородными разложениями целочисленных случайных процессов.

Следовательно, первым допущением, положенным в основу метода динамики средних, является допущение о том, что каждая составляющая $X_i(t)$ представляет собой однородное разложение целочисленного случайного процесса. Это означает, что элементарные целочисленные случайные процессы, из которых складывается процесс $X_i(t)$, описываются с помощью марковского процесса блуждания по некоторому множеству состояний $Y^{(i)}$, одинаковому для всех элементарных целочисленных случайных процессов, из которых складывается случайная функция $X_i(t)$.

Таким образом, первое допущение состоит в том, что каждый целочисленный случайный процесс $X_i(t)$ распадается на n_i элементарных целочисленных, одинаково распределенных случайных процессов $Y_j^{(i)}(t)$ ($j = \overline{1, n}$):

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^n Y_j^{(i)}(t), \quad (29)$$

где $Y_j^{(i)}(t)$ — элементарный целочисленный случайный процесс, описываемый с помощью марковского процесса блуждания j -й единицы по множеству состояний $Y = \{y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_{m_i}^{(i)}\}$, ребра графа которого определяются матрицей интенсивностей $\|\lambda^{(i)}(t)\|$.

Подробное исследование всех характеристик таких процессов дано в предыдущем разделе.

Первое допущение эквивалентно тому, что целочисленный случайный процесс $X_i(t)$ представляет собой процесс в общем случае коррелированных блужданий n_i однородных единиц по своим состояниям, составляющим множество $Y^{(i)}$. Блуждание каждой единицы по множеству состояний $Y = \{y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_{m_i}^{(i)}\}$, представляет собой

марковский случайный процесс с непрерывным временем и дискретным числом состояний, который полностью определяется квадратной матрицей интенсивностей $\|\lambda^{(i)}(t)\|$ и матрицей-столбцом начальных условий $\|p^{(i)}(0)\|$. Для всех n единиц, составляющих процесс гибели $X_i(t)$, все параметры процесса блуждания – множество состояний $Y^{(i)}$, квадратная матрица интенсивностей $\|\lambda^{(i)}(t)\|$ и матрица-столбец начальных условий $\|p^{(i)}(t)\|$ – одинаковы.

На первый взгляд, это допущение может показаться весьма жестким. На самом деле это не так. Всегда можно выделить единицы, которые практически ведут себя статистически одинаково. Это вовсе не означает, что они ведут себя в точности одинаково, а лишь значит, что все единицы имеют одинаковый вероятностный закон поведения.

Уравнения для характеристик изолированного (независимого) случайного процесса $X_i(t) : m_i(t), D_i(t)$ и $k_i(t, t')$ – являются точными, справедливыми для любого целого $n_i > 0$. Во всех предшествовавших работах делалось допущение о том, что выражение для математического ожидания $m_i(t)$ является приближенным и его точность увеличивается по мере увеличения числа составляющих его процесса n_i . Проведенные многочисленные моделирования таких процессов [8, 10] подтверждают вывод о том, что уравнения для определения $m_i(t), D_i(t)$ и $k_i(t, t')$ (для независимых случайных процессов) являются точными.

Первое допущение о марковости случайного процесса блуждания единицы по множеству состояний $Y^{(i)}$ также не является жестким. Это утверждение основывается на том, что путем обогащения множества состояний $Y^{(i)}$ можно конструировать такие подмножества в пределах этого множества, закон распределения времени пребывания в которых будет изменяться в весьма широких пределах. Однако нужно иметь в виду, что увеличение числа состояний множества $Y^{(i)}$ приводит к тому, что увеличивается число уравнений. Это обстоятельство иногда является решающим при рассмотрении практических задач, если число $m_i^{(i)}(t)$ составляющих векторной случайной функции $X_i(t)$ достаточно велико.

К тому же введение более сложных законов распределения времени пребывания в подмножестве состояний зачастую не приводит к сколько-нибудь значительному изменению выходных параметров и точности решения задачи в целом.

Следующая группа допущений касается порядка взаимодействия двух целочисленных случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ между собой. Другими словами, это допущение должно указывать на то, каким образом определяются элементы матрицы интенсивностей $\|\lambda^{(i)}(t)\|$ и $\|\lambda^{(j)}(t)\|$, если процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ зависимы.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда каждое множество состояний ($Y^{(i)}$ и $Y^{(j)}$) состоит из двух:

$$Y^{(i)} = \{y_0^{(i)}, y_1^{(i)}\}; \quad Y^{(j)} = \{y_0^{(j)}, y_1^{(j)}\}.$$

Случайные функции $Y_k^{(i)}(t)$ ($k = \overline{1, n_i}$) и $Y_l^{(j)}(t)$ ($l = \overline{1, n_j}$) являются элементарными процессами гибели и рождения, а процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ представляют собой однородные разложения процессов гибели и рождения.

Рассмотрим случай, когда процесс $X_i(t)$ является управляющим, а процесс $X_j(t)$ — управляемым.

Обычно управление процессом $X_j(t)$ со стороны процесса $X_i(t)$ состоит либо в том, что процесс $X_j(t)$ возрождается под воздействием процесса $X_i(t)$, либо в том, что процесс $X_j(t)$ гибнет под воздействием процесса $X_i(t)$.

Условимся считать, что единица, находящаяся в состоянии $y_1^{(j)}$, “жива”, а в состоянии $y_0^{(j)}$ — “погибла”. Аналогичные состояния будем рассматривать и для процесса $X_i(t)$.

Рассмотрим случай, когда управление процессом $X_j(t)$ сводится только к гибели его единиц.

Обычно поражение единиц процесса $X_j(t)$ могут осуществлять только “живые” единицы процесса $X_i(t)$, число которых в момент времени t равно $X_i(t)$. Пусть условная интенсивность общего потока событий, приводящего к гибели единиц процесса $X_j(t)$, равна $\varphi_i(X_i(t))$, т.е. некоторой функции (или функционалу) случайной функции $X_i(t)$. В соответствии с равенством (29) выражение для этой функции можно переписать так:

$$\varphi_i(X_i(t)) = \varphi_i \left[\sum_{h=1}^{n_i} Y_h^{(i)}(t) \right]. \quad (30)$$

Если преобразование $\varphi_i(X_i(t))$ представляет собой либо линейную функцию, либо линейный функционал, то выражение (30) примет вид

$$\varphi_i(X_i(t)) = \sum_{j=1}^n \varphi_i \left[Y_j^{(i)}(t) \right]. \quad (31)$$

Этот общий поток событий, приводящий к гибели единиц процесса $X_j(t)$, должен статистически равномерно распределяться между единицами этого процесса. Данное положение следует из того, что единицы, составляющие процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$, ведут себя статистически однородно. Распределение в общем случае зависит от того, в каком состоянии находится сам процесс $X_j(t)$. Таким образом, интен-

сивность $\varphi_i(X_i(t))$ должна быть преобразована, и это преобразование зависит от того, в каком состоянии находится процесс $X_j(t)$.

Например, если поток гибели единиц распределяется равномерно только между “живыми” единицами процесса $X_j(t)$, то выражение $\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))]$ примет вид

$$\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))] = \varphi_i[X_i(t)]/X_j(t) [X_j(t) > 0]. \quad (32)$$

Выражение (32) справедливо для случая, когда $X_j(t) > 0$; при $X_j(t) = 0$ это выражение должно быть равно нулю. Условно это запишем так:

$$\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))] = \varphi_i[X_i(t)]\mathbf{1}[X_j(t)]/X_j(t), \quad (33)$$

считая, что $\mathbf{1}[X_j(t)]/X_j(t) = 0$ при $X_j(t) = 0$.

Если поток гибели единиц распределяется равномерно между всеми единицами процесса $X_j(t)$ (как “живыми”, так и “мертвыми”), то выражение $\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))]$ примет такой вид:

$$\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))] = \varphi_i[X_i(t)]/n_j.$$

Таким образом, интенсивность потока гибели каждой из единиц, из которых складывается случайный процесс $X_j(t)$, за счет воздействия единиц, составляющих случайный процесс $X_i(t)$, будет определяться по формуле

$$\mu_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) = M[\Psi_{X_j(t)}(\varphi_i(X_i(t)))] = \sum_i \sum_j \Psi_{x_j}[\varphi_i(x_i)]p_{i,j}(t), \quad (34)$$

где

$$p_{i,j}(t) = p[(X_i(t) = x_i)(X_j(t) = x_j)].$$

— одномерный закон распределения векторной случайной функции с двумя составляющими: $X_i(t)$ и $X_j(t)$. Выражение (34) справедливо, если преобразования $\varphi_i(X_i(t))$ и $\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))]$ являются функциями. В случае, когда эти же преобразования являются функционалами, требуется знание закона распределения векторной случайной функции.

Единицы, составляющие процесс $X_j(t)$, могут гибнуть не только за счет поражения их единицами, составляющими процесс $X_i(t)$, но и сами по себе (например, за счет отказов аппаратных и программных средств). Интенсивность потока событий, определяющего выход единиц, составляющих процесс $X_j(t)$, за счет функционирования этих единиц, обозначим $\mu_{X_j(t)}(t)$ и будем считать, что этот поток событий не зависит от потока событий, интенсивность которого определяется по формуле (34).

Тогда на основании теоремы сложения потоков общая интенсивность потока гибели каждой единицы, составляющей процесс $X_j(t)$,

будет определяться по формуле

$$\mu_j(t) = \mu_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) + \mu_{X_j(t)}(t). \quad (35)$$

Рассмотрим часто встречающийся в практике случай, когда преобразование $\varphi_i(X_i(t))$ является линейной функцией, а преобразование $\Psi_{X_j(t)}[\varphi_i(X_i(t))]$ имеет вид формулы (33). В этом случае выражение (31) можно переписать:

$$\varphi_i[X_i(t)] = \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i[Y_j^{(i)}(t)] = \sum_{j=1}^{n_i} a_i Y_j^{(i)}(t) + b_i = a_i X_i(t) + b_i.$$

Параметры a_i и b_i в общем случае являются известными функциями времени.

Следовательно, интенсивность (34) в рассматриваемом случае будет выражаться формулой

$$\begin{aligned} \mu_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) &= M \left[(a_i X_i(t) + b_i) \bar{1} X_j(t) / X_j(t) \right] = \\ &= a_i M \left[X_i(t) \mathbf{1} X_j(t) / X_j(t) \right] + b_i M \left[\mathbf{1} X_j(t) / X_j(t) \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Проведенные расчеты [3, 8] показывают, что для неотрицательной целочисленной случайной величины $X_j(t)$ можно предложить следующее приближение:

$$M[\mathbf{1}(X_j(t))/X_j(t)] \approx 1/M[X_j(t)], \quad (37)$$

которое дает вполне удовлетворительный по точности результат, если величина $M[X_j(t)]$ не очень мала, что справедливо для многих практических случаев: равномерного распределения в пределах всех ее возможных значений $\bar{0}, \bar{n}_j$ (при $n_j > 3$ погрешность не превышает нескольких сотых); биномиального распределения с параметрами n_j и p (при $pn_j > 3$ погрешность приближения Δ также мала); распределение Пуассона с параметром a (при $a > 3$ приближение является вполне удовлетворительным).

Математическое ожидание отношения $X_i(t)/X_j(t)$ приближенно равно отношению математических ожиданий $M[X_i(t)]/M[X_j(t)]$.

Таким образом, когда процесс $X_i(t)$ управляет процессом $X_j(t)$ путем поражения единиц процесса $X_j(t)$, формулу (36) можно с достаточной степенью приближения переписать в таком виде:

$$\mu_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)} \approx \frac{a_i M[(X_i(t))]}{M[X_j(t)]} + \frac{b_i}{M[X_j(t)]}. \quad (38)$$

Практические расчеты показывают, что точность этой формулы достаточна при $M[X_j(t)] > 3$.

Рассмотрим теперь случай, когда управление процессом $X_j(t)$ сводится только к рождению его единиц. Будем также считать, что раз-

множение единиц процесса $X_j(t)$ могут осуществлять только “живые” единицы процесса $X_i(t)$. Пусть опять условная интенсивность общего потока событий, приводящего к рождению единиц процесса $X_j(t)$, равна $\chi_i[X_i(t)]$ (некоторая функция (или функционал) случайной функции $X_i(t)$).

Условную интенсивность рождения каждой единицы процесса $X_j(t)$ запишем в виде $\xi_{X_j(t)}[\chi_i(X_i(t))]$.

Следовательно, безусловная интенсивность потока событий, приводящая к рождению единиц процесса $X_j(t)$ за счет единиц процесса $X_i(t)$, будет определяться по формуле

$$\lambda_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) = M[\xi_{X_j(t)}(\chi_i(X_i(t)))], \quad (39)$$

а общая интенсивность рождения каждой единицы процесса $X_j(t)$ равна

$$\lambda_j(t) = \lambda_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) + \lambda_{X_j}(t), \quad (40)$$

где $\lambda_{X_j}(t)$ — интенсивность потока рождения единиц процесса $X_j(t)$ независимо от процесса $X_i(t)$. В случае, когда выражение $\chi_i[X_i(t)]$ представляет собой линейную функцию случайной функции $X_i(t)$, получим

$$\chi_i(X_i(t)) = c_i X_i(t) + d_i.$$

Если эта интенсивность рождения единиц процесса $X_j(t)$ делится между всеми “живыми” единицами, то интенсивность рождения каждой единицы определится по приближенной формуле

$$\lambda_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) \approx c_i M[X_i(t)] / M[X_j(t)] + d_i / M[X_j(t)], \quad (41)$$

справедливой при $M[X_j(t)] > 3$.

Формулы (38) и (40) справедливы в случае, когда функции φ_i и χ_i являются линейными, а воздействие производится равномерно на все “живые” единицы. В том и состоит второе допущение, положенное в основу метода динамики средних, которое будем называть в дальнейшем допущением о линейности взаимодействия целочисленных случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$. Это допущение о квазирегулярности процесса взаимодействия случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ [7].

Таким образом, квазирегулярность взаимодействия случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ имеет место только для взаимодействия процессов определенного вида, когда выполняются условия линейного взаимодействия этих процессов. Это допущение справедливо только при достаточно больших значениях: $M[X_i(t)] (M[X_j(t)] > 3)$.

Проводя аналогичные рассуждения при рассмотрении управления процессом $X_i(t)$ со стороны процесса $X_j(t)$, получаем следующие выражения для интенсивностей потоков рождения и гибели в случае

линейности взаимодействия этих процессов:

$$\mu_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) = \frac{a_j M[(X_j(t))]}{M[X_i(t)]} + \frac{b_j}{M[X_i(t)]}, \quad (42)$$

$$\lambda_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) = \frac{c_j M[(X_j(t))]}{M[X_i(t)]} + \frac{d_j}{M[X_i(t)]}, \quad (43)$$

$$\mu_i(t) = \mu_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) + \mu_{X_i(t)}, \quad (44)$$

$$\lambda_i(t) = \lambda_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) + \lambda_{X_i(t)}. \quad (45)$$

В случае, когда функции φ_i и χ_i представляют собой полиномы h -й степени от случайной функции $X_i(t)$ с коэффициентами, которые зависят от времени, интенсивности потоков рождения и гибели будут содержать начальные моменты случайной функции $X_i(t)$ (до h -го порядка включительно). Эти начальные моменты могут быть легко определены, если предположить нормальность рассматриваемых случайных процессов рождения и гибели.

Сформулируем алгоритм составления уравнений для нахождения математических ожиданий, дисперсий и корреляционных функций двух взаимодействующих процессов рождения и гибели $X_i(t)$ и $X_j(t)$: $m_i(t), m_j(t), D_i(t), D_j(t), K_i(t, t'), K_j(t, t')$.

Рассмотрим простейший случай, когда выполняется равенство (29) и $y_{m_i} = y_1^{(i)}$; $y_{m_j} = y_1^{(j)}$. В этом случае процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ полностью описываются процессом блуждания одной единицы по своим двум состояниям, размеченные графы которых представлены на рис. 6, и теми корреляционными связями, которые существуют между ними. Ребра этих графов определяются по формулам (35), (38)–(45).

Решив систему дифференциальных уравнений, соответствующую этим размеченным графам, находим вероятности

$$\pi_1^{(i)}(t) = P\left(Y_k^{(i)}(t) = y_1^{(i)} = 1\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n_i),$$

$$\pi_1^{(j)}(t) = P\left(Y_l^{(j)}(t) = y_1^{(j)} = 1\right) \quad (l = 1, 2, \dots, n_j).$$

Математическое ожидание случайных функций $X_i(t)$ и $X_j(t)$

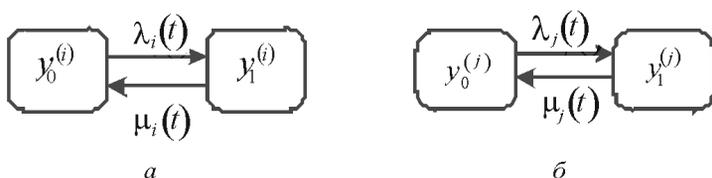


Рис. 6. Размеченные графы, иллюстрирующие процесс блуждания одной единицы по своим двум состояниям

определяется по формулам

$$m_i(t) = n_i \pi_1^{(i)}(t),$$

$$m_j(t) = n_j \pi_1^{(j)}(t).$$

Отметим, что для определения математических ожиданий процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ не требуется знания корреляционных связей, которые существуют между этими процессами.

Перейдем к определению дисперсий и корреляционных функций случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$. Рассмотрим для простоты вначале случай, когда взаимодействие двух процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ осуществляется только за счет взаимного поражения [см. (42)–(45)]:

$$\mu_i(t) = \frac{a_j M[(X_j(t))]}{M[X_i(t)]}, \quad (46)$$

$$\mu_j(t) = \frac{a_i M[(X_i(t))]}{M[X_j(t)]}, \quad (47)$$

$$\lambda_{X_j(t) \rightarrow X_i(t)}(t) = \lambda_{X_i(t) \rightarrow X_j(t)}(t) = \mu_{X_i(t)}(t) = \mu_{X_j(t)}(t) = 0.$$

Интенсивности потоков возрождения каждой единицы для процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ равны $\lambda_i(t)$ и $\lambda_j(t)$ соответственно. В дальнейшем для сокращения записи аргумент t в обозначениях интенсивностей потоков будем опускать.

Примем следующие обозначения:

$$X_k(t + \Delta t) = X_k(t) + \Delta X_k(t) = X_k + \Delta X_k \quad (k = i, j), \quad (48)$$

$$M[X_k(t)] = m_k \quad (k = i, j),$$

$$D[X_k(t)] = D_k \quad (k = i, j), \quad (49)$$

$$K[X_i(t) X_j(t)] = M[\overset{\circ}{X}_i(t) \overset{\circ}{X}_j(t)] = K_{i,j},$$

$$\Gamma[X_i(t) X_j(t)] = M[X_i(t) X_j(t)] = \Gamma_{i,j}.$$

Запишем матрицу приращений ΔX_i и ΔX_j процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ в виде табл. 1.

Матрица (см. табл. 1) имеет место в случае, когда ни один из процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ не находится на левой границе, т.е. $0 < X_i(t) \leq n_i$ и $0 < X_j(t) \leq n_j$. Как быть в случае, когда один из процессов находится на границе [$X_i(t) = 0$ или $X_j(t) = 0$], будет указано далее.

Матрица приращений процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$

ΔX_j	ΔX_i		
	-1	0	+1
-1	$o(\Delta t)$	$\mu_j m_i \Delta t + o(\Delta t)$	$o(\Delta t)$
0	$\mu_j m_i \Delta t + o(\Delta t)$	$1 - [\lambda_i n_i - (\lambda_i + \mu_i) m_i + \lambda_j n_j - (\lambda_j + \mu_j) m_j] \Delta t + o(\Delta t)$	$\lambda_i (n_i - m_i) \Delta t + o(\Delta t)$
+1	$o(\Delta t)$	$\lambda_j (n_j - m_j) \Delta t + o(\Delta t)$	$o(\Delta t)$

Примечание. Величина $o(\Delta t)$ имеет порядок малости выше, чем Δt .

Найдем математические ожидания и дисперсии приращений ΔX_i и ΔX_j , для чего воспользуемся матрицей (см. табл. 1):

$$M[\Delta X_k] = \Delta m_k = [\lambda_k n_k - (\lambda_k + \mu_k) m_k] \Delta t + o(\Delta t) \quad (k = i, j), \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \Delta D_k &= D[X_k(t + \Delta t) - X_k(t)] = M[\Delta X_k^2] - (M[\Delta X_k])^2 = \\ &= [\lambda_k n_k + (\lambda_k + \mu_k) m_k] \Delta t + o(\Delta t) \quad (k = i, j). \end{aligned} \quad (51)$$

Ясно, что

$$K[\Delta X_i; \Delta X_j] = o(\Delta t).$$

Найдем теперь приращения дисперсий, которые в общем случае не равны дисперсиям приращений (см. (48), (49)):

$$\begin{aligned} \Delta D_k &= D[X_k(t + \Delta t)] - D[X_k(t)] = \\ &= D[\Delta X_k] + 2K[X_k; \Delta X_k] + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$K[X_k; \Delta X_k] = K[X_k(t), \Delta X_k(t)]. \quad (53)$$

Приращения корреляционной функции $K_{i,j}$ определяются по формуле

$$\begin{aligned} \Delta K_{i,j} &= K[X_i(t + \Delta t); X_j(t + \Delta t)] - K[X_i(t), X_j(t)] = \\ &= K[X_i; \Delta X_j] + K[X_j; \Delta X_i] + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (54)$$

Для отыскания корреляционных моментов (53) и (54) запишем выражения для приращений ΔX_i и ΔX_j , которые вытекают из условия линейности взаимодействия процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= [-a_j X_j + \lambda_i (n_i - X_i)] \Delta t + o(\Delta t), \\ \Delta X_j &= [-a_j X_i + \lambda_j (n_j - X_j)] \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (55)$$

Выражение для корреляционного момента $K [X_i; \Delta X_i]$ можно привести к такому виду:

$$K [X_i; \Delta X_i] = (-a_j K_{i,j} - \lambda_i D_i) \Delta t + o(\Delta t), \quad (56)$$

откуда

$$K [X_j; \Delta X_j] = (-a_i K_{i,j} - \lambda_j D_j) \Delta t + o(\Delta t). \quad (57)$$

Проделав соответствующие преобразования, получим:

$$K [X_i; \Delta X_j] = (-a_i D_i - \lambda_j K_{i,j}) \Delta t + o(\Delta t), \quad (58)$$

$$K [X_j; \Delta X_i] = (-a_j D_j - \lambda_i K_{i,j}) \Delta t + o(\Delta t). \quad (59)$$

Теперь на основании формул (50)–(52), (54)–(59) можно обычным путем получить систему пяти дифференциальных уравнений для всех основных характеристик двух случайных функций $X_i(t)$ и $X_j(t)$:

$$dm_i(t)/dt = \lambda_i n_i - (\lambda_i + \mu_i) m_i(t),$$

$$dm_j(t)/dt = \lambda_j n_j - (\lambda_j + \mu_j) m_j(t),$$

$$dD_i(t)/dt = \lambda_i n_i + (\mu_i - \lambda_i) m_i(t) - 2a_j K_{i,j} - 2\lambda_i D_i(t),$$

$$dD_j(t)/dt = \lambda_j n_j + (\mu_j - \lambda_j) m_j(t) - 2a_i K_{i,j} - 2\lambda_j D_j(t),$$

$$dK_{i,j}(t)/dt = -a_i D_i(t) - a_j D_j(t) - (\lambda_i + \lambda_j) K_{i,j}(t).$$

Эта система дифференциальных уравнений была выведена при условии, что $0 < X_i(t) \leq n_i$ и $0 < X_j(t) \leq n_j$. Рассмотрим, к каким изменениям этих уравнений должно привести включение границ. Отметим, что система дифференциальных уравнений для математических ожиданий является замкнутой, поэтому ее можно рассмотреть отдельно. Перепишем ее в следующем виде (см. (46), (47)):

$$dm_i(t)/dt = \lambda_i (n_i - m_i(t)) - a_j m_j(t), \quad (60)$$

$$dm_j(t)/dt = \lambda_j (n_j - m_j(t)) - a_i m_i(t).$$

Учет границы в данном случае сводится к тому, что член $a_j m_j(t)$ в первом уравнении (60) должен умножаться на вероятность того, что процесс $X_i(t)$ не равен нулю. Эту вероятность приближенно можно записать так:

$$P(X_i(t) > 0) = P_{i>0}(t) \approx 1 - e^{-m_i(t)}. \quad (61)$$

При рассмотрении двух связанных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ приближение (61) является более грубым, чем при рассмотрении одного несвязанного процесса. Это объясняется тем, что вероятность

$$P[X_i(t) > 0] = \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=0}^{n_j} P(X_i(t) = k) (X_j(t) = l)$$

зависит не только

от математического ожидания $m_i(t)$, а определяется законом распределения системы случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$.

Таким образом, приближенный учет наличия границ $X_i(t) = 0$ и $X_j(t) = 0$ приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 dm_i(t)/dt &= \lambda_i(n_i - m_i(t)) - \mu_i m_i(t) P_{i>0}(t), \\
 dm_j(t)/dt &= \lambda_j(n_j - m_j(t)) - \mu_j m_j(t) P_{j>0}(t), \\
 dD_i(t)/dt &= \lambda_i(n_i - m_i(t)) + \\
 &\quad + [\mu_i m_i(t) - 2a_j K_{i,j}(t)] P_{i>0}(t) - 2\lambda_i D_i(t), \\
 dD_j(t)/dt &= \lambda_j(n_j - m_j(t)) + \\
 &\quad + [\mu_j m_j(t) - 2a_i K_{i,j}(t)] P_{j>0}(t) - 2\lambda_j D_j(t), \\
 dK_{i,j}(t)/dt &= -a_i D_i(t) P_{i>0}(t) - \\
 &\quad - a_j D_j(t) P_{j>0}(t) - (\lambda_i + \lambda_j) K_{i,j}(t).
 \end{aligned} \tag{62}$$

Эти уравнения интегрируются при начальных условиях

$$m_i(0) = n_i, \quad m_j(0) = n_j, \quad D_i(0) = D_j = K_{i,j}(0) = 0.$$

Основное достоинство формул (62) состоит в том, что с их помощью можно рассчитывать вероятности различных состояний взаимодействующих процессов на любой момент времени t . Эти вероятности могут быть вычислены, если случайные величины $X_i(t)$ и $X_j(t)$ подчиняются нормальному закону с характеристиками, определяемыми по формулам (62). В этом случае можно найти вероятность события

$$P[(X_i(t) \in S_i) (X_j(t) \in S_j)] = \int_{(S_i)} \left[\int_{(S_j)} f_t(x_i, x_j) dx_j \right] dx_i, \tag{63}$$

где S_i, S_j — произвольные области;

$$\begin{aligned}
 f_t(x_i, x_j) &= (1/2\pi\sigma_i\sigma_j\sqrt{1-r_{i,j}}) \exp \left[-\frac{1}{2(1-z)^2} \left(\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2r(x_i - m_i)(x_j - m_j)}{\sigma_i\sigma_j} + \frac{(x_j - m_j)^2}{2\sigma_j^2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

— нормальная плотность распределения случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$ с характеристиками $m_i(t), m_j(t), \sigma_i = \sqrt{D_i(t)}, \sigma_j = \sqrt{D_j(t)}$;

$$r = r_{i,j} = K_{i,j}(t) / \sqrt{D_i(t) D_j(t)}$$

— коэффициент корреляции случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$.

В предположении о нормальности системы случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$ вероятности $P_{i>0}(t)$ и $P_{j>0}(t)$ определяются по формулам

$$P_{i>0}(t) = \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_t(x_i, x_j) dx_j \right) dx_i,$$

$$P_{j>0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f_t(x_i, x_j) dx_j \right) dx_i.$$

Пример 1. В качестве применения указанных формул найдем характеристики двух связанных процессов чистой гибели при условии, что $n_i = n_j = n$, $a_i = a_j = a$ ($\lambda_i = \lambda_j \equiv 0$). В этом простом случае, очевидно, должны выполняться равенства

$$m_i(t) = m_j(t) = m(t) \quad \text{и} \quad D_i(t) = D_j(t) = D(t).$$

Тогда систему (62) можно переписать так

$$\begin{aligned} dm(t)/dt &= am(t) P_{>0}(t), \\ dD(t)/dt &= (am(t) - 2aK_{i,j}(t)) P_{>0}(t), \\ dK_{i,j}(t)/dt &= -2aD(t) P_{>0}(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим приближенное решение этих уравнений для небольших времен t , когда $P_{>0}(t) \approx 1$. В этом случае решение имеет вид

$$\begin{aligned} m(t) &= ne^{-at}, \\ D(t) &= (n/6) [e^{2at} - 3e^{-2at} + 2e^{-at}], \\ K_{i,j}(t) &= (n/6) [e^{2at} + 3e^{-2at} - 4e^{-at}]. \end{aligned}$$

Найдем значение этих характеристик в момент времени, когда обе стороны понесут в среднем потери, равные 50% первоначальной численности ($at_1 \approx 0,7$):

$$\begin{aligned} m(t_1) &= n/2 = 0,50n; \\ D(t_1) &= (n/6) [e^{1,4} - 3e^{-1,4} + 1] = 0,71n; \quad \sigma(t_1) = 0,84\sqrt{n}; \\ K_{i,j}(t_1) &= -(n/6) [3 \cdot 0,25 - 4 - 2] = -0,45n; \\ r_{i,j}(t_1) &= -0,66. \end{aligned}$$

Например, при $n = 100$ система случайных величин $X_i(t)$ и $X_j(t)$ имеет следующие характеристики: $m_i(t_1) = m_j(t_1) = 50$; $\sigma_i(t_1) = \sigma_j(t_1) = 8,4$; $r_{ij}(t_1) = -0,66$.

Найдем вероятность того, что в момент времени t_1 у j -й стороны будет не менее $1,2m_j = 60$ единиц, а у i -й стороны — не более

$0,8m_i = 40$ единиц, считая, что система случайных величин $X_i(t)$, $X_j(t)$ подчинена нормальному закону. В этом случае выражение (63) примет вид $P((X_i(t_1) < 0,8m_i), (X_j(t_1) < 1,2m_j))$.

Вероятность того, что в момент времени t_1 одна из сторон будет иметь не менее 60 единиц, а другая не более 40, составляет $2P((X_i(t_1) < 40), (X_j(t_1) > 60))$.

Пример 2. Рассмотрим случай взаимодействия двух процессов гибели с восстановлением, когда $n_i = n_j = 100$; $a_i = a_j = a$; $\lambda_i = \lambda_j = 2a$.

В этом случае при $\lambda > a$ и $t \rightarrow \infty$ существует стационарный режим, для которого $m_i = m_j = 66$; $\sigma_i = \sigma_j = 4,5$; $r_{i,j} = 0,5$.

4. Моделирование надежности сложных КСС. Рассмотрим модель надежности сложных КСС на примере отказов КСС из-за аппаратных отказов, программных и влияния аппаратно-программных отказов друг на друга. Модель надежности основывается на процессах Маркова. Взаимодействующие аппаратно-программные отказы могут быть двух типов: сбой и отказы, связанные со взаимовлиянием отказов аппаратно-программных средств. На рис. 7 представлены категории отказов КСС. Из-за взаимовлияния все отказы аппаратно-программных средств (АС/ПС) могут быть разделены на две категории: сбой и отказы.

На рис. 8 представлена диаграмма надежности КСС, на которой аппаратные и программные отказы условно разделены на четыре части. АС-2/ПС-2 и АС-3/ПС-3 представляют отказы и сбои, возникающие при взаимодействии АС/ПС соответственно.

Аппаратные отказы:

АС-1 — общий отказ аппаратных средств, вызывается ошибками в АС-1, когда КСС отказывает; такие виды отказов являются независимыми чисто аппаратными отказами;

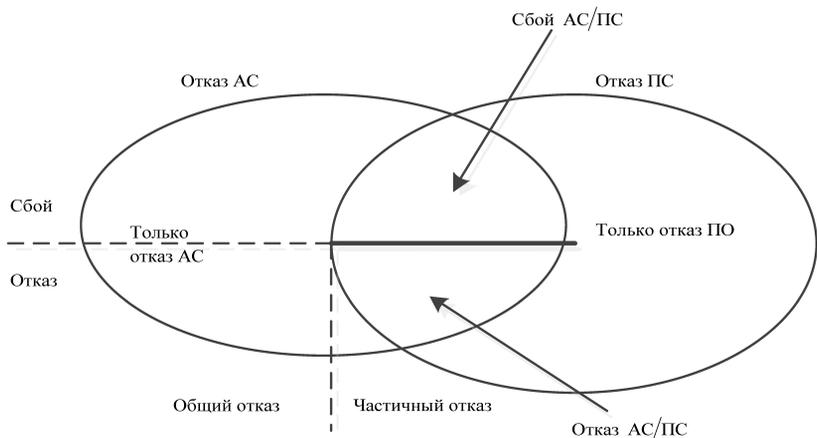


Рис. 7. Категории отказов КСС

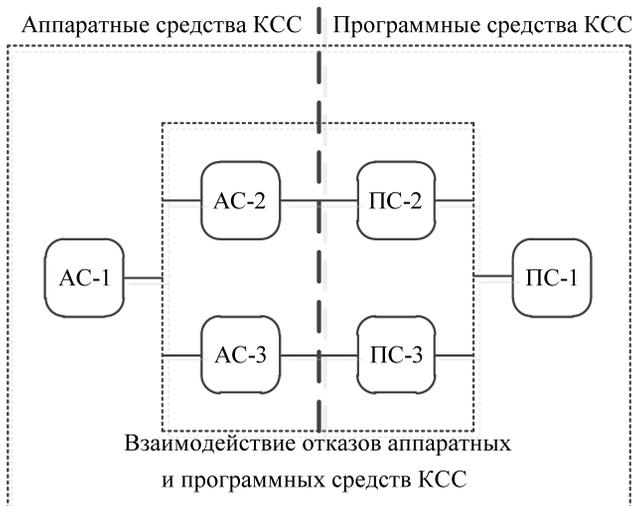


Рис. 8. Диаграмма надежности

АС-2 — аппаратный частичный отказ (деградация КСС); все КСС не отказывают, а работают в ухудшенном состоянии. Это связано с ПС-2 и возможно вызывает отказ ПО в состоянии связанного с аппаратными средствами программного отказа;

АС-3 — временные (переходные) аппаратные составляющие отказов (эти аппаратные отказы обычно вызываются неполадками в операционной среде).

Программные отказы:

ПС-1 — только программные отказы, вызванные ошибками в ПО, которые не связаны с потоком аппаратных отказов (независимые, чисто программные отказы);

ПС-2 — отказы ПО, связанные с АС. Другими словами, когда аппаратные средства деградируют (случай АС-2), то в ПО КСС с высокой вероятностью случаются отказы (ПС-2). Эти отказы не могут быть компенсированы простым восстановлением вычислительных задач и, как правило, связываются с аппаратной деградацией. Можно полагать, что связанные с АС программные отказы вызваны ошибками проектирования, которые не могут иметь дела с потенциальными частичными аппаратными отказами;

ПС-3 — сбои ПО, связанные с аппаратными отказами. Эти отказы фактически связаны со сбоями аппаратуры, но их можно избежать при правильном проектировании, предусмотрев средства отказоустойчивости ПО (например, точки возврата в программе), и таким образом аппаратные сбои могут быть представлены как сбои в ПО (связанные с АС).

Моделирование надежности. Введем следующие предположения и ограничения.

1. Все средства КСС полностью отказываются всякий раз, когда происходит только аппаратный отказ или только программный отказ или отказ, связанный со взаимодействием отказов АС/ПС.
2. Имеют место только аппаратные отказы и только программные отказы, независимые друг от друга.
3. Происходят только аппаратные отказы и отказы от взаимодействия друг на друга отказов АС/ПС.
4. Только программные отказы и связанные с АС программные отказы (АС/ПС) имеют место.
5. Связанные с АС программные отказы (АС/ПС) могут случаться в двух случаях: отказы АС/ПС и сбои АС/ПС (они также не зависят друг от друга).
6. Аппаратные компоненты частично отказывают (частичный отказ (деградация) КСС) с интенсивностью отказов λ_1 .
7. Частичный аппаратный отказ немедленно обнаруживается с вероятностью p_1 и восстанавливается программными средствами с вероятностью p_2 .
8. Необнаруженный отказ (деградация АС) может вызвать связанный с АС программный отказ с интенсивностью λ_3 , и обнаруженный частичный отказ может вызвать аварийное прекращение работы КСС с интенсивностью λ_4 .
9. Как только частичный аппаратный отказ обнаружен, отказавшие аппаратные компоненты могут быть диагностированы и заменены с интенсивностями μ_1 (если ПО восстановлено) и μ_2 (если не восстановлено ПО).
10. Частичный аппаратный отказ может привести к полному отказу АС КСС с интенсивностями λ_{21} , λ_{22} или λ_{23} (рис. 9).
11. Сбой в АС происходит с интенсивностью λ_5 .
12. Аппаратные сбои немедленно обнаруживаются с вероятностью p_3 . Если обнаружены сбои, они немедленно устраняются программными методами с вероятностью p_4 . Если из-за сбоя восстановления КСС не произошло, то последующий сбой все еще может быть обнаружен, так как вызван тем же самым видом аппаратных проблем.
13. Если сбой не будет обнаружен, то ПО будет не в состоянии выдать правильный результат, и тогда произойдет отказ КСС.
14. Максимальное число попыток ПО восстановить аппаратный сбой обозначим через H . Если уровень H превышен, средства КСС считаем отказавшими.

Надежность всего комплекса КСС

$$R_{\text{КС}}(t) = R_{\text{ПС}}(t) R_{\text{АС}}(t) R_{\text{АС}\backslash\text{ПС}}(t),$$

где $R_{\text{ПС}}(t)$ — надежность КПС; $R_{\text{АС}}(t)$ — надежность АС КСС; $R_{\text{АС}\backslash\text{ПС}}(t)$ — надежность взаимодействующих АС/ПС.

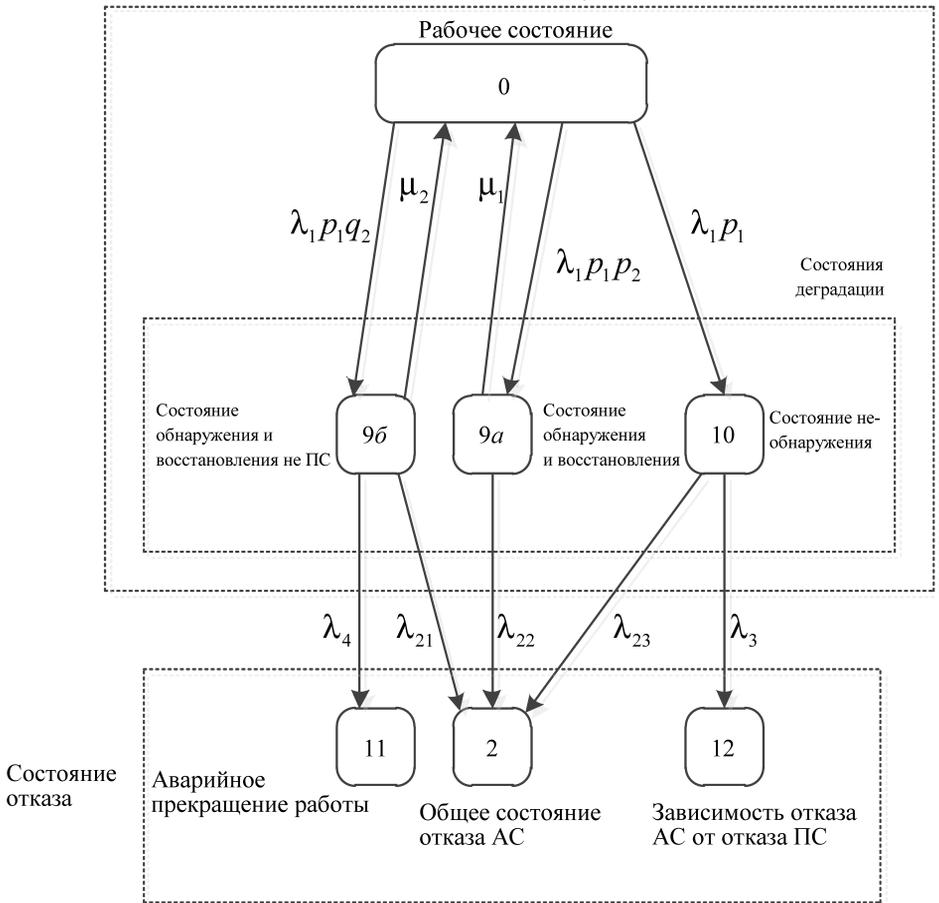


Рис. 9. Граф перехода постоянных взаимодействий АС/ПС

Аппаратные средства КСС. Предположим, что АС КСС имеют следующую вейбулловскую функцию риска:

$$h_{\text{ПС}}(t) = \frac{\gamma}{\theta} t^{\gamma-1},$$

тогда функция надежности АС с распределением Вейбулла может быть записана в следующем виде:

$$R_{\text{ПС}}(t) = e^{-\frac{t^\gamma}{\theta}}. \quad (64)$$

Программные средства КСС. Предположим, что функция интенсивности обнаружения ошибок $b(t)$ является неубывающей функцией с S-образной точкой перегиба, тогда

$$b(t) = \frac{c}{1 + \alpha e^{-bt}}$$

и ошибки могут быть внесены во время отладки; пусть β будет постоянной интенсивностью вводимых ошибок, т.е. $\beta(t) = \beta$.

Тогда среднее значение и надежность ПС можно записать в следующем виде:

$$m_{\text{ПС}}(t) = \frac{a}{p - \beta} \left(1 - \left(\frac{(1 + \alpha) e^{-bt}}{1 + \alpha e^{-bt}} \right)^{\frac{c}{b}(p-\beta)} \right) \quad (65)$$

и

$$R_{\text{ПС}}(t) = e^{-m_{\text{ПС}}(t)}$$

соответственно.

Моделирование взаимовлияния отказов аппаратных и программных средств КСС. Введем следующие обозначения (см. рис. 9):

λ_1 — интенсивность потока событий, переводящих КСС из рабочего состояния 0 в состояние деградации 10 (т.е. отказа некоторых компонентов АС);

μ — интенсивность потока восстановлений КСС;

μ_1 — интенсивность потока восстановлений, переводящих КСС из состояния 9а в рабочее состояние 0;

μ_2 — интенсивность потока восстановлений, переводящих КСС из состояния 9б в рабочее состояние 0;

λ_2 — интенсивность потока событий, переводящих КСС из состояний деградации в состояние 2 (общий отказ АС);

λ_{21} — интенсивность потока событий, переводящих КСС из состояния 9а в состояние 2;

λ_{22} — интенсивность потока событий, переводящих КСС из состояния 9б в состояние 2;

λ_{23} — интенсивность потока событий, переводящих КСС из состояния 10 в состояние 2;

λ_3 — интенсивность потока событий, переводящих КСС из состояний необнаруженной частичной аппаратной деградации в состояние аппаратно зависимого программного отказа;

λ_4 — интенсивность потока событий, переводящих КСС из состояний обнаруженной частичной аппаратной деградации в состояние аварийного прекращения работы;

λ_5 — интенсивность потока сбоев АС;

λ_6 — интенсивность потока сбоев АС, приводящих к аварийному прекращению работы;

p_1 — вероятность того, что аппаратная деградация обнаружена;

q_1 — вероятность того, что аппаратная деградация не обнаружена ($q_1 = 1 - p_1$);

p_2 — вероятность того, что деградация восстановлена программными методами;

q_2 — вероятность того, что деградация не восстановлена программными методами ($q_2 = 1 - p_2$);

p_3 — вероятность того, что сбои обнаружены другими методами;
 q_3 — вероятность, что сбои не обнаружены программным обеспечением ($q_3 = 1 - p_3$);

H — максимальное число восстановлений задачи от сбоев АС.

Случай постоянного взаимовлияния АС/ПС. Если компонент аппаратуры полностью отказывает, то тогда его рассматривают в аппаратной модели надежности; если аппаратный компонент отказывает частично, то этот случай рассматривается в этой модели.

Обозначим:

$Q_0(t)$ — вероятность остаться в состоянии 0;

$Q_2(t)$ — вероятность остаться в состоянии 2 (полный аппаратный отказ);

$Q_{9a}(t)$ — вероятность остаться в состоянии 9а (обнаруженные деградацией АС и восстановленное ПО);

$Q_{9б}(t)$ — вероятность остаться в состоянии 9б (обнаруженные деградацией и невосстановленное ПО);

$Q_{10}(t)$ — вероятность остаться в состоянии 10 (необнаруженная аппаратная деградация);

$Q_{11}(t)$ — вероятность остаться в состоянии 11 (прерванное выполнение);

$Q_{12}(t)$ — вероятность остаться в состоянии 12 (постоянный связанный с АС программный отказ).

На рис. 9 показан граф переходов постоянных отказов взаимодействующих АС/ПС, основанных на предположениях 6–10. Отсюда мы можем получить следующие дифференциальные уравнения:

$$Q'_0(t) = -\lambda_1 Q_0(t) + \mu_1 Q_{9a}(t) + \mu_2 Q_{9б}(t),$$

$$Q'_2(t) = \lambda_{22} Q_{9a}(t) + \lambda_{21} Q_{9б}(t) + \lambda_{23} Q_{10}(t),$$

$$Q'_{9a}(t) = \lambda_1 p_1 p_2 Q_0(t) - (\mu_1 + \lambda_{22}) Q_{9a}(t),$$

$$Q'_{9б}(t) = \lambda_1 p_1 q_2 Q_0(t) - (\mu_1 + \lambda_{21} + \lambda_4) Q_{9б}(t),$$

$$Q'_{10}(t) = \lambda_1 q_1 Q_0(t) - (\lambda_{23} + \lambda_3) Q_{10}(t),$$

$$Q'_{11}(t) = \lambda_4 Q_{9б}(t),$$

$$Q'_{12}(t) = \lambda_3 Q_{10}(t),$$

учитывая начальные условия

$$Q_0(0) = 1, \quad Q_2(0) = 0, \quad Q_{9a}(0) = 0, \quad Q_{9б}(0) = 0,$$

$$Q_{10}(0) = 0, \quad Q_{11}(0) = 0, \quad Q_{12}(0) = 0.$$

Следует отметить, что среди всех этих состояний только состояния 2, 11 и 12 являются состояниями отказа, в то время как состояния 9а, 9б и 10 являются деградационно рабочими состояниями, а состояние 0

является нормальным рабочим состоянием. Используя преобразование Лапласа, получаем следующие решения:

$$Q_0(t) = \frac{(c_1 + b_1)(c_1 + b_2)}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)} e^{-c_1 t} + \frac{(c_2 + b_1)(c_2 + b_2)}{(c_2 - c_1)(c_2 - c_3)} e^{-c_2 t} + \frac{(c_3 + b_1)(c_3 + b_2)}{(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)} e^{-c_3 t},$$

$$Q_{9a}(t) = \lambda_1 p_1 p_2 \left[\frac{(c_1 + b_2) e^{-c_1 t}}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)} + \frac{(c_2 + b_2) e^{-c_2 t}}{(c_2 - c_1)(c_2 - c_3)} + \frac{(c_3 + b_2) e^{-c_3 t}}{(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)} \right],$$

$$Q_{9б}(t) = \lambda_1 p_1 q_2 \left[\frac{(c_1 + b_1) e^{-c_1 t}}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)} + \frac{(c_2 + b_1) e^{-c_2 t}}{(c_2 - c_1)(c_2 - c_3)} + \frac{(c_3 + b_1) e^{-c_3 t}}{(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)} \right],$$

$$Q_{10}(t) = \lambda_1 q_1 \left(\frac{(c_1 + b_1)(c_1 + b_2) e^{-c_1 t}}{(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)(c_1 - c_4)} + \frac{(c_2 + b_1)(c_2 + b_2) e^{-c_2 t}}{(c_2 - c_1)(c_2 - c_3)(c_2 - c_4)} + \frac{(c_3 + b_1)(c_3 + b_2) e^{-c_3 t}}{(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)(c_3 - c_4)} + \frac{(c_4 + b_1)(c_4 + b_2) e^{-c_4 t}}{(c_4 - c_1)(c_4 - c_2)(c_4 - c_3)} \right),$$

$$Q_{11}(t) = \lambda_1 \lambda_4 p_1 q_2 \left(\frac{-b_1}{c_1 c_2 c_3} + \frac{(c_1 + b_1) e^{-c_1 t}}{c_1 (c_1 - c_2)(c_1 - c_3)} + \frac{(c_2 + b_1) e^{-c_2 t}}{c_2 (c_2 - c_1)(c_2 - c_3)} + \frac{(c_3 + b_1) e^{-c_3 t}}{c_3 (c_3 - c_1)(c_3 - c_2)} \right),$$

$$Q_{12}(t) = \lambda_1 \lambda_3 q_1 \left(\frac{b_1 b_2}{c_1 c_2 c_3 c_4} + \frac{(c_1 + b_1)(c_1 + b_2) e^{-c_1 t}}{c_1 (c_1 - c_2)(c_1 - c_3)(c_1 - c_4)} + \frac{(c_2 + b_1)(c_2 + b_2) e^{-c_2 t}}{c_2 (c_2 - c_1)(c_2 - c_3)(c_2 - c_4)} + \frac{(c_3 + b_1)(c_3 + b_2) e^{-c_3 t}}{c_3 (c_3 - c_1)(c_3 - c_2)(c_3 - c_4)} + \frac{(c_4 + b_1)(c_4 + b_2) e^{-c_4 t}}{c_4 (c_4 - c_1)(c_4 - c_2)(c_4 - c_3)} \right),$$

$$Q_2(t) = 1 - Q_0(t) - Q_{9a}(t) - Q_{9б}(t) - Q_{10}(t) - Q_{11}(t) - Q_{12}(t),$$

где $b_1 = \mu_1 + \lambda_{22}$; $b_2 = \mu_2 + \lambda_{21} + \lambda_4$; $c_4 = -(\lambda_{23} + \lambda_3)$; c_1, c_3 и c_3 — корни уравнения

$$(x + \lambda_1)(x + b_1)(x + b_2) = \lambda_1 p_1 [\mu_1 p_2 (x + b_2) + \mu_2 q_2 (x + b_1)].$$

Вероятность того, что отказа КСС не будет в режиме постоянного взаимовлияния аппаратных и программных средств, можно выразить следующим образом:

$$P_{\text{ПА/П}}(t) = \Pr\{\text{сбой АС/ПС}\} = Q_0(t) + Q_{9a}(t) + Q_{9b}(t) + Q_{10}(t). \quad (66)$$

Кроме того, вероятность, что отказ КСС будет из-за отказа АС

$$P_{AC}(t) = Q_{11}(t).$$

Вероятность, что отказ КСС произойдет из-за отказа АС и связанного с АС программного отказа,

$$P_{\text{АПС}}(t) = Q_2(t) + Q_{12}(t).$$

Сбой АС/ПС (взаимозависимый случай). На рис. 10 показана диаграмма сбоев АС/ПС в КСС, основанных на предположениях 11–14. В состоянии 3а сбой процесса может быть восстановлен ПС с вероятностью p_4 , и если сбой не может быть восстановлен (при числе неудавшихся попыток восстановления H), то ПО прервет задачу восстановления и из состояния 3а осуществится переход в состояние 4 с вероятностью $q_4 = (1 - p_4)$.

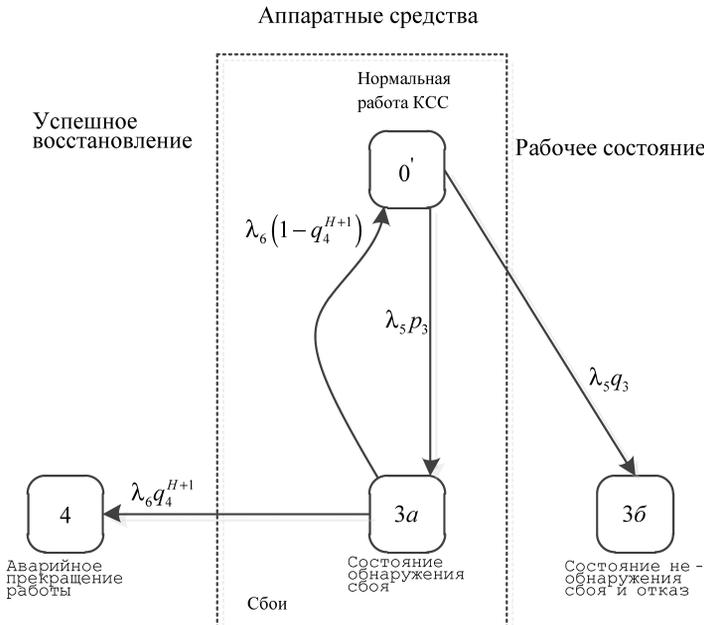


Рис. 10. Граф состояний КСС из-за сбоев

На рис. 10 состояния 3б и 4 являются состояниями отказа, состояние 0' — рабочее состояние, а состояние 3а — промежуточное состояние. Предположим, что подведенные и прерванные состояния независимы друг от друга, тогда

$$\begin{aligned} Q'_0(t) &= -\lambda_5 Q_0(t) + \lambda_6 (1 - q_4^H) Q_{3a}(t), \\ Q'_{3a}(t) &= \lambda_5 p_3 Q_0(t) - \lambda_6 Q_{3a}(t), \\ Q'_{3б}(t) &= \lambda_5 q_3 Q_0(t), \\ Q'_4(t) &= \lambda_6 q_4^H Q_0(t). \end{aligned} \quad (67)$$

Решение системы уравнений (67) может быть легко получено. Следовательно, вероятность, что отказа КСС не будет из-за взаимовлияния отказов АС/ПС,

$$P_{САП}(t) = \Pr\{\text{сбоя АС/ПС}\} = Q_0(t) + Q_{3a}(t) p_4. \quad (68)$$

Из уравнений (66) и (68) может быть получена функция надежности при аппаратно-программном взаимовлиянии:

$$P_{АП}(t) = \Pr\{\text{сбоев}\} \times \Pr\{\text{отказов}\} = P_{ПА/П}(t) P_{САП}(t).$$

Таким образом, $P_{АП}(t) = [Q_0(t) + Q_{9a}(t) + Q_{9б}(t) + Q_{10}(t)] \times (Q_0(t) + Q_{3a}(t))$. Следовательно, системную надежность (учитывающую ошибки аппаратных и программных средств, а также взаимодействия между ними) можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} R_C(t) &= R_A(t) R_{П}(t) R_{АП}(t) = \\ &= e^{-\frac{t\gamma}{\theta}} e^{-m(t)} [Q_0(t) + Q_{9a}(t) + Q_{9б}(t) + Q_{10}(t)] (Q_{0'}(t) + Q_3(t)). \end{aligned}$$

Численный пример. Проиллюстрируем этот подход к моделированию надежности КСС при взаимовлиянии АС и ПО на примере телекоммуникационных данных прикладной программы. В табл. 2 показаны длительность использования АС и ПО и данные по отказам.

В табл. 2 явно не указаны отказы АС/ПС, 15 % отказов АС [11], были фактически отказами АС/ПС. В табл. 3 представлены данные табл. 2 с учетом 15 % отказов АС/ПС.

Только программные отказы. Из уравнения (65) получаем

$$m(t) = \frac{a}{p - \beta} \left(1 - \left(\frac{(1 + \alpha) e^{-bt}}{1 + \alpha e^{-bt}} \right)^{\frac{c}{b}(p - \beta)} \right),$$

где a — ожидаемое число начальных ошибок в ПО; c — среднее число интенсивности отказов; β — вероятность ошибок, вводимых во время процесса отладки; p — вероятность успешно исправляемых ошибок; α — характеристика формы кривой обучения в процессе отладки; b — наклон кривой процесса отладки.

Отказы в КСС, используемой в телекоммуникационной системе

Месяц	Длительность использования ПО, сут.	Отказы ПО	Длительность использования АС, сут.	Отказы АС
1	9,61	4	9,843	23
2	4,170	1	10,290	32
3	8,789	5	11,254	32
4	11,858	4	12,385	21
5	13,110	3	13,155	44
6	14,198	1	14,198	55
Общее число	53,086	18	71,125	207

Таблица 3

Набор данных при взаимодействии отказов АС/ПС

Месяц	Длительность использования ПО, сут.	Отказы ПО	Длительность использования АС, сут.	Отказы АС	Отказы АС/ПС
1	9,61	4	9,843	20	3
2	4,170	1	10,290	27	5
3	8,789	5	11,254	27	5
4	11,858	4	12,385	18	3
5	13,110	3	13,155	37	7
6	14,198	1	14,198	47	8
Общее число	53,086	18	71,125	176	31

Принимая значение $p = 0,95$ и полагая что функции наибольшего правдоподобия для всех неизвестных параметров составляют $\hat{a} = 17,97$, $\hat{b} = 0,000001$, $\hat{c} = 0,000001$, $\hat{\alpha} = 0$, $\hat{\beta} = 0$. Поскольку при α и β равных нулю получающаяся модель становится моделью Гоэла–Окумото [12] с несовершенной отладкой. Таким образом модель Гоэла–Окумото хорошо соответствует данному набору данных.

Только аппаратные отказы. Предположим, что 85% аппаратных отказов зафиксированных в данном месяце, является чистыми ФС. Для аппаратных отказов используем модель Вейбулла (64). Оценка максимального правдоподобия для θ и γ в уравнении (64) дает следующие значения:

$$\hat{\gamma} = 1,14, \quad \hat{\theta} = 1949,$$

при этом аппаратная функция надежности будет

$$R_A(t) = e^{-\frac{t^{1,14}}{1949}}.$$

Взаимовлияние отказов АС/ПС. Чтобы упростить вычисление, рассмотрим только отказы АС/ПС и предположим, что $p = 0,95$, $\lambda_{23} = 0$, $\lambda_1 = 0,1\lambda_3$ и $\lambda_3 = 0,0048$ отказа/сутки. Вероятность, что в КС не будет отказов из-за аппаратно-программных взаимодействий за время x может быть вычислена по следующей формуле:

$$P_{АП}(x) = \frac{\lambda_3 e^{-\lambda_1} - \lambda_1 e^{-\lambda_3}}{\lambda_3 - \lambda_1}.$$

Полная функция надежности КСС. Рассмотрим новую инсталляцию, которую поставят за время $t = 53,086$ сут., тогда полная системная надежность (комбинируя надежность АС, ПС и модели АС/ПС) между моментами времени $t = 53,086$ и $t = 53,086 + x$ (где x – время работы) может быть найдена из уравнения

$$R_{КСС}(x|t = 53,086) = R_A(x) R_{П}(x|t = 53,086) R_{АП}(x) = e^{-\frac{x\gamma}{\theta}} e^{-[(m(53,086+x) - m(53,086))]} \frac{\lambda_3 e^{-\lambda_1} - \lambda_1 e^{-\lambda_3}}{\lambda_3 - \lambda_1}.$$

Предполагаемая условная функция надежности $R_{КСС}(x)$ и каждая из ее трех компонент изображены на рис. 11.

На рис. 12 сравнивается надежность $R_{ПК}(t)$ и $R_{КСС}(t)$, где $R_{ПК}(t)$ является моделью надежности, которая не включает эффекты взаимодействия АС/ПС

$$R_{ПК}(t) = R_{АС}(t) R_{ПС}(t) = R_{КСС}(t) / R_{АС/ПС}(t).$$

Выводы. Приведенные теоретический анализ и пример показывают, что надежность ПО КСС нельзя рассматривать отдельно от их аппаратных составляющих.

1. Предложена модель вычисления характеристик надежности сложных КСС, базирующаяся на полумарковских процессах и учитывающая аппаратные и программные сбои, а также взаимовлияние

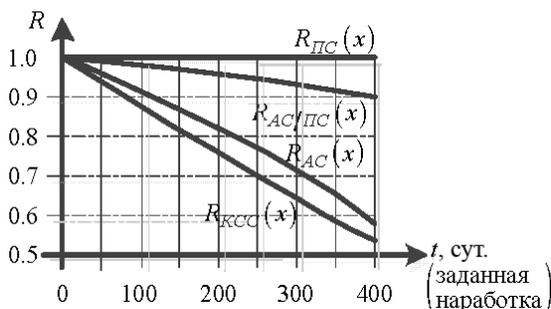


Рис. 11. Системная функция надежности

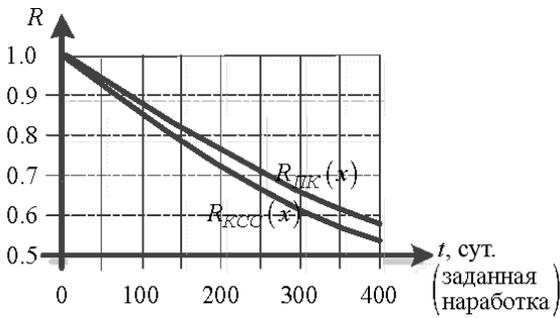


Рис. 12. Системные сравнения надежности

сбоев и отказов аппаратных и программных средств КСС. Модель предсказывает в среднем состояние КСС во время функционирования.

2. Модель в начальный период используется со значениями λ и μ , которые были получены на базе накопленного прошлого опыта. В связи с тем, что последующая работа модели позволит в свою очередь накопить данные об ошибках, возможно дальнейшее повышение точности анализа на основе предыдущего моделирования.

3. Модель позволяет предсказать характеристики системы во время проверки моделированием до или после реализации КСС. В этом случае величина t может включать как время моделирования, так и время испытания. Модель может быть полезной в определении момента достаточной степени отлаженности ПО, т.е. удовлетворения характеристикам надежности.

4. На практике интенсивность исправления ошибок запаздывает по отношению к их обнаружению, что в известной мере затрудняет процесс.

5. Реализация предложенного подхода к оцениванию и повышению надежности функционирования КСС требует определенных затрат различного вида. Но на наш взгляд его осуществление необходимо, поскольку обусловлено конечной точностью вычислений в современных и перспективных КСС и другими факторами, из которых наиболее весомым является лавинообразный рост сложности перспективных программ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П о л о в к о А. М., Г у р о в С. В. Основы теории надежности. – СПб.: БХВ–Петербург, 2006. – 704 с.
2. Ч е р к е с о в Г. Н. Надежность аппаратно-программных комплексов: Учеб. пособие. – СПб.: Питер, 2005. – 479 с.
3. П у г а ч е в В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Гостехиздат, 1957. – 659 с.

4. Ачильдиев В. М., Вязов С. М., Динеев В. Г., Ковригин М. И., Колозезный Э. А., Можаров Г. П., Теплова И. В., Цуцаева Т. В. Системы управления средств выведения космических аппаратов и их сертификация: Учеб. пособие для студентов специальности 210500/ Под ред. проф. Э.А. Колозезного. – М.: МГУЛ, 2002. – 158 с.
5. Колозезный Э. А., Бужинский В. А., Динеев В. Г., Ковригин М. И., Колозезный Э. А., Можаров Г. П. Независимая экспертиза – основа сертификации программно-математического обеспечения изделий ракетно-космической техники // Космонавтика и ракетостроение. – 2001. – Вып. 24. – С. 154–162.
6. Шурakov В. В. Надежность программного обеспечения систем обработки данных: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 272 с.
7. Динер И. Я. О некоторых направлениях развития исследования операций // Морской сб. – 1970. – № 1. – С. 9–18.
8. Тараканов К. В., Овчаров Л. А., Тырышкин А. Н. Аналитические методы исследования систем. – М.: Сов. радио, 1974. – 240 с.
9. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
10. Вентцель Е. С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 550 с.
11. Teng X., Pham H. A software reliability growth model for N -version programming systems // IEEE Transactions on Reliability. – 2002. – Vol. 51, no. 3. – P. 311–321.
12. Goel A. Z., Okumoto K. Time-dependent error-detection rate models for software reliability and other performance measures // IEEE Trans. On Reliability, R-28 (3). – 1979. – P. 206–211.

Статья поступила в редакцию 15.12.2011