УДК 531.36, 517.977

И. К. Романова

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕДУКЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрена задача редукции нелинейных систем. Отмечена определенная преемственность в подходах к решению задач редукции линейных и нелинейных систем. Дана классификация методов редукции нелинейных систем. Приведено решение задачи редукции модели движения объекта в нелинейной постановке.

E-mail: romanova@sm.bmstu.ru

Ключевые слова: *редукция, нелинейные динамические системы, система управления, наблюдаемость и управляемость, оптимальное управление.*

Редукция, или сокращение порядка моделей динамических систем, давно является одной из важных проблем в моделировании систем [1]. Бурный рост ресурсов современной вычислительной техники сопровождается постоянным усложнением математических моделей процессов разной физической природы. Поэтому появляются все новые работы, предлагающие подходы к оптимизации электротехнических, аэро- и гидродинамических, химических, биологических, прочностных, климатических и многих других моделей. Цель редукции — не только снижение вычислительной стоимости, но и стремление структурировать полученную информацию, например выделить основные составляющие изучаемого процесса. В работе [1] рассматривается проблема редукции очень важной группы динамических систем, а именно систем управления. В этом случае актуальность редукции обусловлена не только снижением затрат на моделирование. Аппроксимация низкого порядка системы большой размерности позволяет сформировать алгоритм управления, реализуемый более простым контроллером. Очевидно, что модели перечисленных процессов, в том числе объектов управления, по своей природе являются нелинейными.

Постановка задачи редукции нелинейных систем. Рассмотрим постановку задачи редукции для нелинейных систем управления.

Пусть полная модель представляется в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u); \\ &y = h(x), \quad x \in \Re^n, \ \ u \in \Re^m, \ \ y \in \Re^p. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x — вектор фазовых координат размерности n; u — вектор управления размерности m; y — вектор наблюдения размерности p.

Обычно проблема возникает, когда размерность модели, оцениваемая через число фазовых координат, намного больше единицы, т.е. $n \gg 1$.

Задача редукции для системы общего вида может быть сформулирована как получение редуцированной модели вида

$$\dot{z} = a(z, u); \quad y = c(z); \quad z \in \Re^k, \quad k \ll n, \tag{2}$$

т.е. конечной целью редукции является получение модели, которая имеет размерность, намного меньшую, чем исходная.

Поскольку далеко не всегда модель управляема, более общим случаем является модель динамической системы. Для полной модели высокого порядка n используется запись вида

$$\dot{x} = f(x, u); \quad x \in \Re^n, \quad n \gg 1. \tag{3}$$

Редуцированная модель динамической системы записывается как

$$\dot{z} = a(u); \quad z \in \Re^k, \quad k \ll n. \tag{4}$$

Поскольку достаточно много методов разработано для редукции управляемых систем, проблема редукции динамических систем общего вида может быть приведена к виду задачи для системы управления добавлением входа и выхода, т.е.

$$\dot{x} = f(x) + u; \quad y = x. \tag{5}$$

К моделям систем (2) и (4) предъявляется общее требование: редуцированная модель должна отражать существенные свойства полной модели.

Для редуцированной модели системы управления требования более конкретны: должны сохраняться существенные свойства вход-выход; регулятор, разработанный для стабилизации модели сокращенного порядка, также стабилизирует полную модель.

Сравнительный анализ подходов к решению задач редукции линейных и нелинейных систем. Анализ существующих методов редукции нелинейных систем показывает, что многие из них опираются на распространение идей редукции линейных систем. При этом помимо математических аспектов используется следующий физический факт [2]. Как правило, модели реальных процессов, таких как движение летательных аппаратов и многих других, характеризуются наличием быстрой и медленной составляющих, т.е. возможность декомпозиции заложена в самой физической природе процесса, описываемого моделью. Этот факт математически представляется следующим образом: редукция моделей динамических систем включает в себя разделение на медленные и быстрые моды.

Для этого в динамической системе выделяется линейная и нелинейная части

$$\dot{x} = f(x) = Ax + \bar{f}(x). \tag{6}$$

Линейная часть представляется диагональной матрицей A, в которой на диагонали стоят собственные значения системы:

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \bar{f}(x). \tag{7}$$

Спектр матрицы A представляется следующим рядом:

$$0 \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k \gg \lambda_{k+1} \geq \ldots \geq \lambda_n. \tag{8}$$

Выделяют вектор фазовых координат x_1, в который включают первые k состояний, и вектор фазовых координат x_2 — последние $(n-k)$ состояний. Галеркин предложил принять вектор $x_2 = 0$. Тогда оставшаяся часть системы описывается уравнением

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} x_1 + \bar{f}(x_1, 0). \tag{9}$$

Есть более сложные методы типа нелинейного метода Галеркина, сингулярные возмущения, центральные многообразия, инерционные многообразия и т.д.

В большинстве методов для нелинейных систем рассматривается сначала линейный подход, который затем обобщается на нелинейную систему. Основоположником идеи редукции линейных систем, в основе которой лежит теория линейной сбалансированной реализации, является Б. Мур [3]. Линейная система управления при этом представляется в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Fx + Gu; \\ &y = Hx; \\ &x(0) = x_0; \\ &x \in \Re^n, \quad u \in \Re^m, \quad y \in \Re^p, \end{aligned} \tag{10}$$

где $(F; G)$ — пара управляемости, $(F; H)$ — пара наблюдаемости и F — матрица Гурвица, т.е. каждое собственное значение матрицы F имеет строго отрицательную вещественную часть $\Re[\lambda_i] < 0$ для каждого собственного значения λ_i. Грамианы управляемости и наблюдаемости определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} W_c &= \int\limits_0^\infty e^{Ft} G G^{\text{т}} e^{F^{\text{т}} t} dt; \\ W_o &= \int\limits_0^\infty e^{F^{\text{т}} t} H H^{\text{т}} e^{Ft} dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Эти две матрицы могут рассматриваться как меры управляемости и наблюдаемости систем.

Поведение системы рассматривается в полном диапазоне времени от $-\infty$ до $+\infty$. Для описания используется карта Ханкеля — изображение состояний от прошлых входов к будущим выходам:

$$\mathcal{H}u(-\infty:0) \mapsto y(0:\infty),$$

причем вход влияет на текущее состояние $x(0)$

$$u(-\infty:0) \mapsto x(0).$$

Ставится вопрос: какая наименьшая размерность n необходима, чтобы реализовать данную карту Ханкеля $\mathcal{H}$?

Представление Мура заключается в том, что следует ограничиваться направлениям, которые легко возбудить, и игнорировать направления, где изменения не влияют на выход очень сильно. Чтобы оценить эту идею, он ввел функции управляемости ($L_c(x_0)$) и наблюдаемости ($L_o(x_0)$) системы. Функция управляемости определяет минимальную энергию (энергию прошлого), требуемую для достижения x_0 от 0 на бесконечном времени:

$$L_c(x_0) = \inf_{\substack{u\in L^2(-\infty,0)\\ x(-\infty)=0,\ x(0)=x_0}} \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} \|u(t)\|^2\, dt, \qquad (12)$$

где L^2 — индуцированная норма.

Управляемость системы означает, что $L_c(x_0)$ ограничена; если F — матрица Гурвица, то $L_c(x_0)$ положительно определена; если грамиан $L_c(x_0)$ большой, тогда требуется много входной энергии, чтобы возбудить систему в направлении x_0 и так, чтобы направление могло игнорироваться в редуцированной модели.

Функция наблюдаемости $L_o(x_0)$ определяет энергию выхода (энергию будущего), генерируемую реализацией системы от ее начального состояния $x(t_0) = x_0$ и нулевого входа $u(t) = 0$ для $t \geq 0$, т.е.

$$L_o(x_0) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \|y(t)\|^2\, dt. \qquad (13)$$

Если F — матрица Гурвица, то $L_o(x_0)$ ограничена. Наблюдаемость системы означает, что $L_o(x_0)$ положительно определена. Если $L_o(x_0)$ мала, то изменения в направлении x_0 приводят к малым изменениям в выходной энергии, так что направление может быть проигнорировано в редуцируемой модели.

В линейном случае можно показать, что

$$L_c(x_0) = \frac{1}{2}x_0^{\mathrm{т}} W_c^{-1} x_0; \quad L_0(x_0) = \frac{1}{2}x_0^{\mathrm{т}} W_o x_0. \qquad (14)$$

Столбцы W_c охватывают управляемое подпространство, в то время как нуль-пространство W_o совпадает с ненаблюдаемым подпространством, поэтому W_c и W_o (или их оценки) — ключевые компоненты во многих технологиях редукции модели. Также известно, что W_c удовлетворяют и уравнениям Ляпунова

$$\begin{aligned} &FW_c + W_cF^{\text{т}} = -GG^{\text{т}};\\ &F^{\text{т}}W_o + W_oF = -H^{\text{т}}H. \end{aligned} \tag{15}$$

На сегодняшний день разработаны и реализованы алгоритмы прямого решения этих уравнений.

Идея балансировки состоит в том, чтобы найти представление, в котором наблюдаемые и управляемые подсистемы выровнены так, чтобы редукция, если возможно, состояла из устранения неуправляемых состояний, которые также являлись бы наименее наблюдаемыми. Более формально, мы хотели бы найти новую систему координат, такую, чтобы грамианы управляемости и наблюдаемости были диагональными и равными:

$$W_c = W_o = \Sigma = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}, \tag{16}$$

где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq, \ldots, \sigma_n \geq 0$.

Если пара $(F; G)$ управляема и пара $(F; H)$ наблюдаема, тогда существует преобразование такое, что пространство состояний, выраженное в преобразованных координатах (TFT^{-1}, TG, HT^{-1}), сбалансировано и $TW_cT^{\text{т}} = T^{\text{т}}W_oT^{-1} = \Sigma$. Если в ряду сингулярных значений имеется явный промежуток, т.е. имеется k, такой что $\sigma_k \gg \sigma_{k+1}$, именно в этом месте должно произойти усечение. Состояния, наиболее ответственные за управление отношениями вход-выход, это $(x_1, \ldots, x_k)$, в то время как вклад $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ незначителен.

Итак, рассмотренный подход может быть назван энергетическим.

Обобщение метода Мура на нелинейные системы впервые было предложено в работе [4].

Рассмотрим нелинейную систему следующего вида:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i;\\ &y = h(x);\\ &x(0) = x_0,\\ &x \in \Re^n, \quad u \in \Re^m, \quad y \in \Re^p. \end{aligned} \tag{17}$$

Нелинейная функция управления может быть также представлена в виде двух составляющих: линейной части и суммы нелинейных функций:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u) = F(x) + Gu + f^{[2]}(x, u) + \ldots;\\ &y = h(x) = Hx + h^{[2]}(x) + \ldots, \end{aligned} \tag{18}$$

где $[d]$ обозначает векторное поле, которое является полиномом степени d. Определение функций управляемости и наблюдаемости остается прежним. Если оптимальное управление определяется как $u = K(x)$, то связь оптимального управления и функции управляемости удовлетворяет уравнениям Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L_c}{\partial x}(x) f(x, K(x)) - \frac{1}{2} \left| K(x) \right|^2; \\ 0 &= \frac{\partial L_c}{\partial x}(x) \frac{\partial f}{\partial u}(x, K(x)) - K'(x). \end{aligned} \tag{19}$$

Функция наблюдаемости удовлетворяет уравнению Ляпунова, тогда

$$0 = \frac{\partial L_o}{\partial x}(x) f(x) + \frac{1}{2} h'(x) h(x). \tag{20}$$

В работе [4] приведена теорема, согласно которой существует окрестность W и преобразование координат $x = \varphi(z)$ на W, преобразующее функции энергии в форму

$$\begin{aligned} L_c(\varphi(z)) &= \frac{1}{2} z^{\text{т}} z; \\ L_o(\varphi(z)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \sigma_i(z_i)^2, \end{aligned} \tag{21}$$

где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq, \ldots, \sigma_n \geq 0$. Функции $\sigma(\,.\,)$ называются функциями сингулярных значений Ханкеля.

Аналогично линейному случаю состояния системы могут сортироваться в порядке важности, сортируя функции сингулярных значений, и редукция может происходить путем удаления наименее важных состояний.

В упомянутой структуре для балансировки нелинейных систем необходимо решить уравнения в частных производных и вычислить замену координат $x = \varphi(z)$, однако для решения этих проблем нет систематических методов или инструментов.

Подходы к решению задач нелинейной редукции. Методы решения основной задачи можно разделить на несколько групп. К первой группе относятся различные приближенные решения, основанные на расширениях ряда. Такой подход, в частности, использовал Кренер [5]. Разложение функций управляемости и наблюдаемости в ряд Тейлора позволяет в определенной мере преодолеть неединственность функций сингулярных значений и входных нормальных координат для нелинейной системы. Метод алгоритмизирован, что позволяет использовать его на практике. Ко второй группе относятся статистические методы, основанные на возбуждении системы с белым гауссовым шумом [6] и на вычислении балансировочного преобразования, использующего алгоритм дифференциальной топологии.

Комбинированный метод, основанный на эмпирической балансировке нелинейных систем и репродуцировании ядра гильбертова пространства (Reproducing Kernel Hilbert Spaces, RKHS), предложен в работе [7]. Алгоритм содержит расчет эмпирических грамианов на основе моделирования системы при импульсном воздействии. Далее применяется технология анализа основных компонент (PCA или POD), которая распространяет линейный подход на пространство будущих выходов системы большой размерности. Затем рассматривается карта редукции модели. Алгоритм весьма сложен, однако подробно разработан, что придает ему практическую направленность, особенно в исследованиях замкнутых систем управления.

Редукция нелинейных моделей движущихся объектов. Редукция моделей и синтез регулятора полного и пониженного порядков для линейных моделей были описаны в работах [8, 9].

Теперь рассмотрим задачу в нелинейной постановке. Источники нелинейности показаны в моделях [9]. Даже если исполнительный привод работает идеально, т.е. отсутствуют люфты, максимально снижены эффекты от трения, то всегда останется такой фактор, как ограничение управляющего напряжения. Для учета влияния нелинейностей широко применяется метод гармонической линеаризации.

Другим источником нелинейностей для движущихся объектов является зависимость аэродинамических сил и моментов от параметров движения:

$$\begin{aligned}
&X = X_0 + X^{\alpha^2}\alpha^2 + X^{\alpha\delta_\text{в}}\alpha\delta_\text{в} + X^{\delta_\text{в}^2}\delta_\text{в}^2 + X^{\beta\delta_\text{н}}\beta\delta_\text{н} + X^{\delta_\text{н}^2}\delta_\text{н}^2;\\
&Y = Y_0 + Y^{\alpha}\alpha + Y^{\delta_\text{в}}\delta_\text{в};\\
&Z = Z^{\beta}\beta + Z^{\delta_\text{н}}\delta_\text{н};\\
&M_x = M_{x0} + M_x^{\beta}\beta + M_x^{\omega_x}\omega_x + M_x^{\omega_y}\omega_y + M_x^{\alpha\beta}\alpha\beta + M_x^{\alpha\omega_y}\alpha\omega_y +\\
&\qquad + M_x^{\beta\omega_z}\beta\omega_z + M_x^{\delta_\text{н}}\delta_\text{н} + M_x^{\delta_\text{э}}\delta_\text{э} + M_x^{\beta\delta_\text{в}}\beta\delta_\text{в} + M_x^{\alpha\delta_\text{н}}\alpha\delta_\text{н};\\
&M_y = M_y^{\beta}\beta + M_y^{\omega_x}\omega_x + M_y^{\omega_y}\omega_y + M_y^{\dot\beta}\dot\beta + M_y^{\delta_\text{н}}\delta_\text{н} + M_y^{\dot\delta_\text{н}}\dot\delta_\text{н};\\
&M_z = M_{z0} + M_z^{\alpha}\alpha + M_z^{\omega_z}\omega_z + M_z^{\dot\alpha}\dot\alpha + M_z^{\delta_\text{в}}\delta_\text{в} + M_z^{\dot\delta_\text{в}}\dot\delta_\text{в}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Как видно из соотношений (22), явные нелинейности связаны с наличием произведений углов, а также произведений углов и угловых скоростей.

Неявные нелинейности связаны со сложными зависимостями производных сил и моментов от числа Маха $\text{M} = v/a$, где v — скорость объекта, a — скорость звука, зависящая от высоты полета.

Рассмотрим модель системы стабилизации, учитывая ограничения (аналогично рис. 32 из [9]). Линеаризованные уравнения приведены в работе [2]. Для них выполнялась редукция, результаты которой представлены в работе [9].

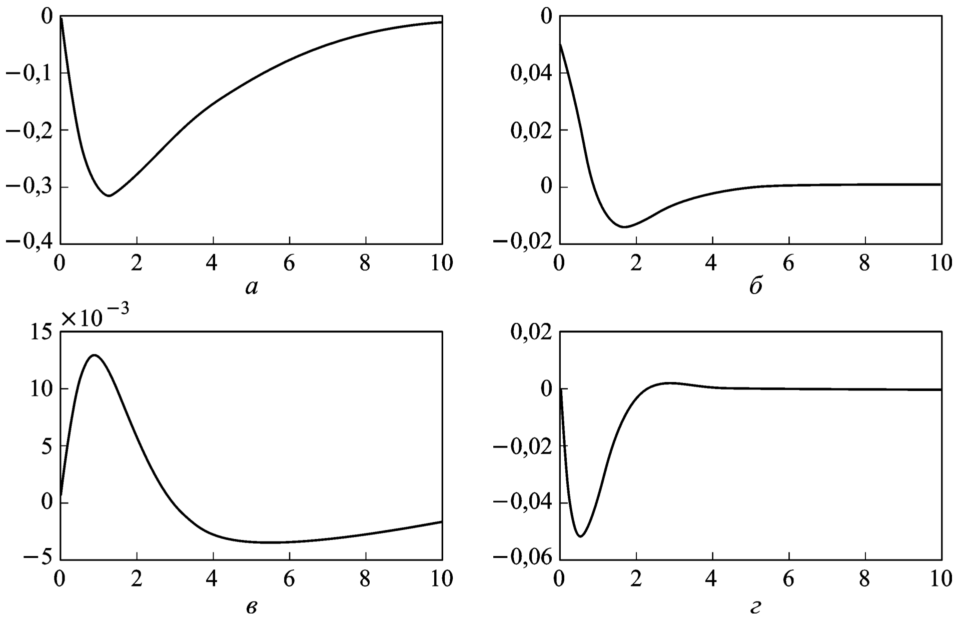

Рис. 1. Моделирование линеаризованной полной системы:
а–г — $y = 1$; 2; 3 и 4 соответственно

Синтез полной системы привел к следующим коэффициентам регулятора:

$$\mathrm{FLQR} = [4{,}7227e{-}02; -7{,}4615e{-}01; -1{,}6662e{+}00; -1{,}0119e{+}00].$$

Результаты моделирования приведены на рис. 1.

Включим в модель нелинейный элемент типа насыщения.. Моделирование полной системы в пространстве состояний с наличием нелинейного элемента приведено на рис. 2.

Моделирование редуцированной модели без нелинейного элемента с использованием найденных в полной модели коэффициентов регулятора приведено на рис. 3. Сравнивая рис. 1 и 3, выявили, что простое применение редукции модели без сопутствующего синтеза приводит к нежелательному изменению переходных процессов в системе.

Синтез редуцированной модели без нелинейного элемента дал результаты $\mathrm{FLQRrp1} = [-8{,}5415e{-}04; -1{,}2303e{+}00]$ (рис. 4).

Для редуцированной модели с нелинейным элементом результаты моделирования приведены на рис. 5.

На едином графике (рис. 6) собрана информация о моделировании для угловой скорости в следующей последовательности: *1* — полная линейная модель; *2* — полная нелинейная модель; *3* — редуцированная линейная модель; *4* — редуцированная нелинейная модель.

Важный вывод, следующий из анализа приведенных данных, заключается в необходимости совместного решения задач редукции и оптимального управления.

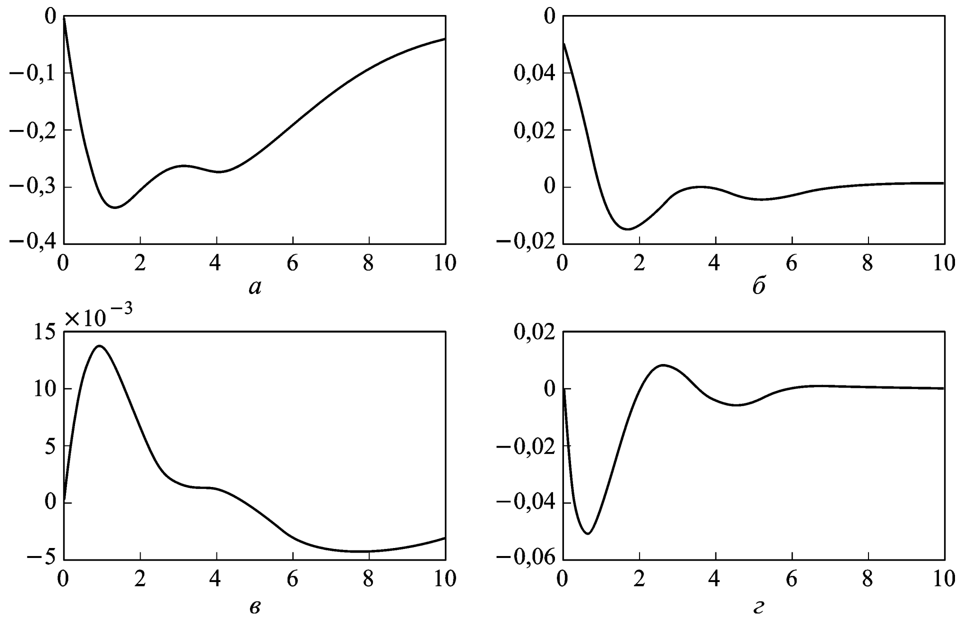

Рис. 2. Моделирование полной системы с наличием нелинейного элемента (*а*. . . *г* — см. рис. 1)

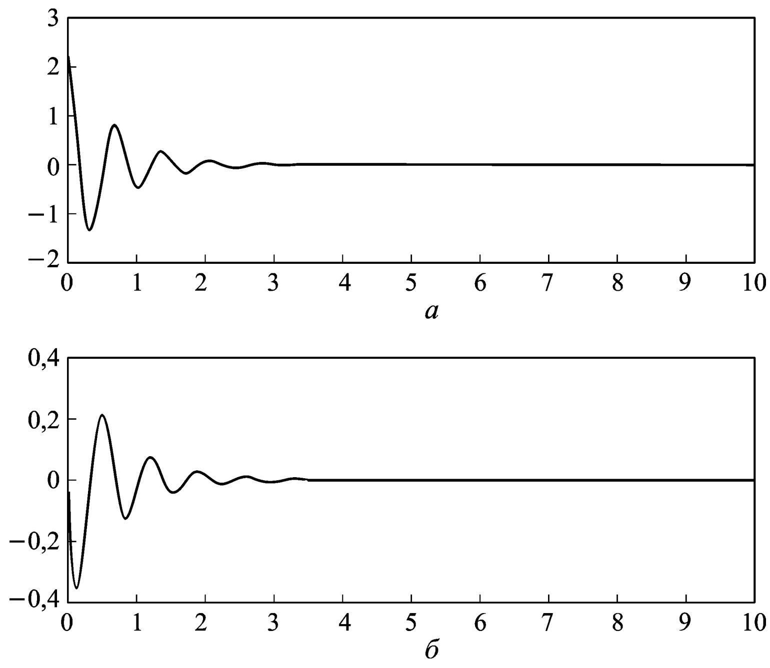

Рис. 3. Моделирование редуцированной линейной модели с использованием, найденных в полной модели коэффициентов регулятора:
$а - y = 1$; $б - y = 2$

Для систем управления важным является не просто редукция систем. Центральной задачей является формирование оптимального алгоритма управления. Оптимальные по квадратичному критерию ка-

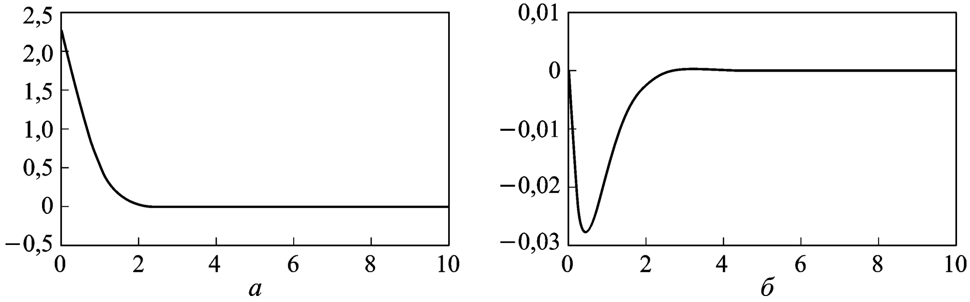

Рис. 4. Моделирование редуцированной линейной модели с специальным синтезом:
$a - y = 1$; $б - y = 2$

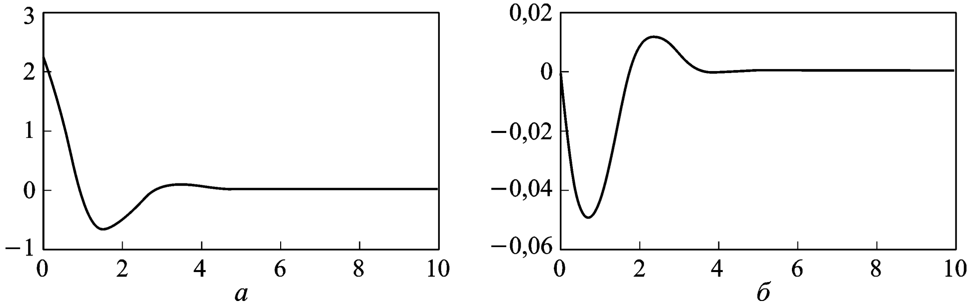

Рис. 5. Моделирование нелинейной редуцированной модели:
$a - y = 1$; $б - y = 2$

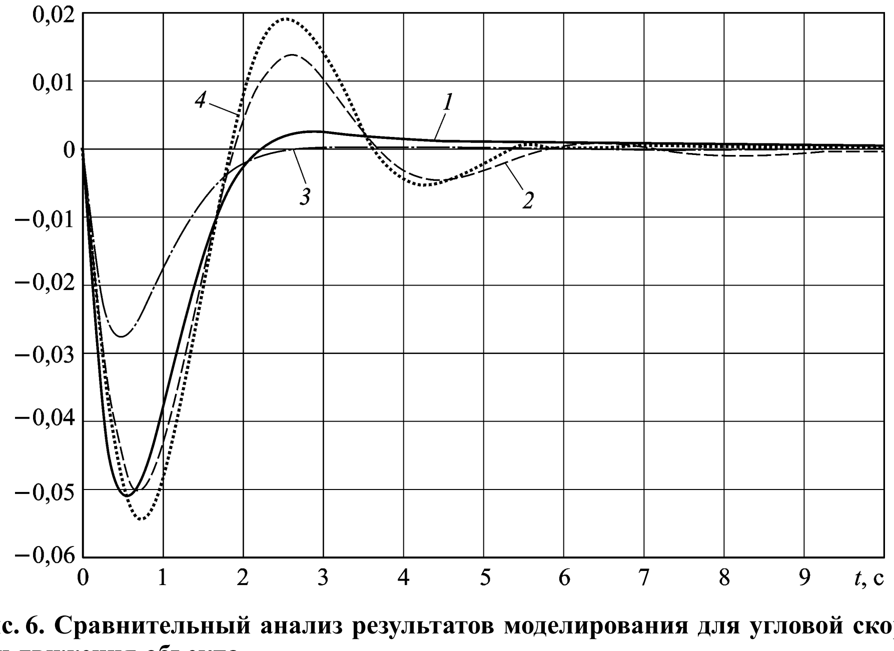

Рис. 6. Сравнительный анализ результатов моделирования для угловой скорости движения объекта

чества линейные системы успешно синтезируются [8], обеспечивая требуемые динамические характеристики, в том числе для многоканальных систем и внешних воздействий. Однако наличие нелинейных элементов и упругих звеньев затрудняет достижение высокой точности таких систем. Решение многих задач оптимизации нелинейных систем приводит к необходимости решения уравнения Гамильтона–Якоби, которое является таким же важным, как и решение уравнения Риккати в теории линейных оптимальных систем. Для нелинейной системы вида

$$x_i'(t) = f(x_i(t)) + B_i u_i(x_i(t))$$

минимизация квадратичного функционала вида

$$J(u) = \int\limits_0^\infty (x^{\text{т}} Q x + u^{\text{т}} R u) dt$$

достигается за счет применения алгоритма управления

$$u_o(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^{\text{т}} V_x(x),$$

где функция Ляпунова $V(x)$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Эти же уравнения лежат в основе методов редукции нелинейных систем. Поэтому представляется целесообразным объединить поиск оптимальных решений и редукции нелинейных систем, что будет рассмотрено в следующих работах.

Выводы. Модели, формируемые на базе редукции линейных систем, не в полной мере отражают свойства исследуемой системы, хотя для систем со слабо выраженной нелинейностью могут давать приемлемые результаты. Для формирования более достоверных результатов рекомендуется применять как расширения энергетических подходов Мура, так и эмпирические методы расчета грамианов управляемости и наблюдаемости нелинейных систем.

Наиболее эффективные технологии должны включать в себя не только процедуры редукции моделей, но и параллельный синтез редуцированных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р о м а н о в а И. К. Современные методы редукции систем и их применение к задачам анализа и синтеза систем управления. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Спец. вып. “Специальная робототехника и мехатроника”. – 2011. – С. 142–152.
2. Р о м а н о в а И. К. Управление в технических системах. Ч.1. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.
3. M o o r e B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction // IEEE Tran. Automat Control, 1981. – Vol. 26. No. 1. – P. 17–32.

4. S c h e r p e n J. Balancing for nonlinear systems. Ph.D. thesis, University of Twente. 1994.
5. K r e n e r A. The important state coordinates of a nonlinear system. University of California. 2009.
6. N e w m a n A. J. and K r i s h n a p r a s a d P. S. Computing balanced realizations for nonlinear systems // Proc. of the Math. 2000. Theory of Networks and Systems (MTNS).
7. B o u v r i e J a k e, B o u m e d i e n e H a m z i. Balanced reduction of nonlinear control systems in reproducing kernel Hilbert space. Department of Mathematics Duke University. 2010.
8. Р о м а н о в а И. К. Управление в технических системах. Ч. 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.
9. Р о м а н о в а И. К. Управление в технических системах. Ч. 3. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.

Статья поступила в редакцию 23.03.2012