

В. В. В е л ь т и щ е в

**УПРОЩЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
ГИБКОГО КАБЕЛЯ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ  
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ  
ТЕЛЕУПРАВЛЯЕМОГО ПОДВОДНОГО  
КОМПЛЕКСА**

*Рассмотрены особенности проектирования кабельных линий для телеуправляемых подводных систем. Обоснована возможность использования упрощенных математических моделей для анализа динамических характеристик кабельной линии переменной длины. Приведено описание одного из возможных подходов к построению такой модели.*

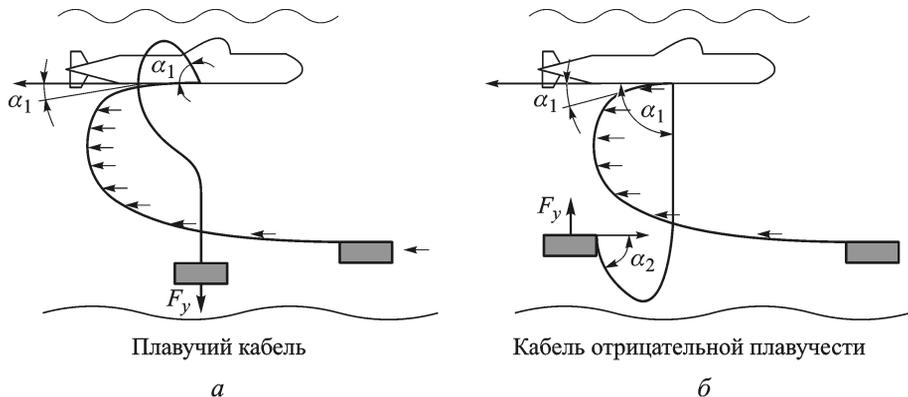
**E-mail: sm42@sm.bmstu.ru**

**Ключевые слова:** *необитаемый подводный аппарат, кабель, привязная система.*

Гибкий кабель, связывающий обитаемый подводный аппарат (НПА) с надводным или подводным судном обеспечения, является одним из важнейших компонентов телеуправляемого подводного комплекса. В процессе разработки подводных робототехнических средств такого класса возникает необходимость расчета статических конфигураций кабеля и оценки динамических параметров всей привязной системы “кабель–НПА”. Известные методы анализа статики и динамики кабельных линий формировались в процессе создания буксируемых подводных систем [1, 2]. Особенности и методы проектирования кабельных привязных систем телеуправляемых НПА (ТНПА) в научно-технической литературе освещены недостаточно, в частности, отсутствуют ориентированные на практическое использование формы математического представления кабеля переменной длины, учитывающие воздействие на него управляющих и внешних сил.

Ряд особенностей функционирования ТНПА определяет целесообразность, а иногда и необходимость, целенаправленного изменения длины кабеля, связывающего ТНПА и судно. В таких случаях кабель является не только компонентом общей динамической привязной системы, но и выступает в роли самостоятельного объекта управления. Наиболее ярко эти особенности проявляются в телеуправляемых комплексах, которые используются с борта подводного судна (подводной лодки).

Для решения проектных задач, связанных с созданием робототехнических комплексов такого типа, необходим соответствующий методический арсенал. Полные математические модели кабельных линий



**Рис. 1. Конфигурация кабельной привязной системы для НПА:**

*a* – плавучий кабель; *б* – кабель отрицательной плавучести

сложны и малопригодны для инженерных расчетов. Поэтому в реальной практике используют упрощенные схемы представления кабеля, вводят ряд допущений при описании действующих на него нагрузок и исключают из рассмотрения второстепенные факторы. Представляется целесообразным распространить такой подход и на формирование математической модели кабеля с изменяемой длиной.

Принципиальная схема использования телеуправляемого комплекса с борта подводного носителя изображена на рис. 1.

Привязная система такого комплекса может быть реализована с использованием плавучего кабеля или кабеля с отрицательной плавучестью (см. рис. 1). В качестве переходного случая можно рассматривать кабель нейтральной плавучести, который в различных гидрологических условиях попеременно приобретает небольшой запас положительной или отрицательной плавучести. В режиме совместного движения НПА и носителя или при работе аппарата в условиях подводного течения конфигурация гибкой линии в основном определяется гидродинамическим воздействием на кабель. Поэтому в таких режимах оба рассматриваемых варианта практически эквивалентны. Поведение кабеля при отсутствии набегающего потока воды определяется следующими параметрами: погонной плавучестью и вытравленной длиной кабеля; относительной позицией НПА и значением вертикальной силы  $F_y$ , создаваемой его движителями. При использовании кабеля с отрицательной плавучестью (рис. 1, *б*) на нижнем участке кабеля образуется петля, которая при малой дистанции НПА от дна может привести к зацепу за донные объекты. Еще более опасен случай образования петли на верхнем участке плавучего кабеля (рис. 1, *a*), так как возникает опасность запутывания кабеля в забортных устройствах носителя. Единственной возможностью снизить вероятность возникновения таких зацепов кабеля является введение в состав телеуправляемого комплекса системы регулирования длины кабеля. Результаты расчета

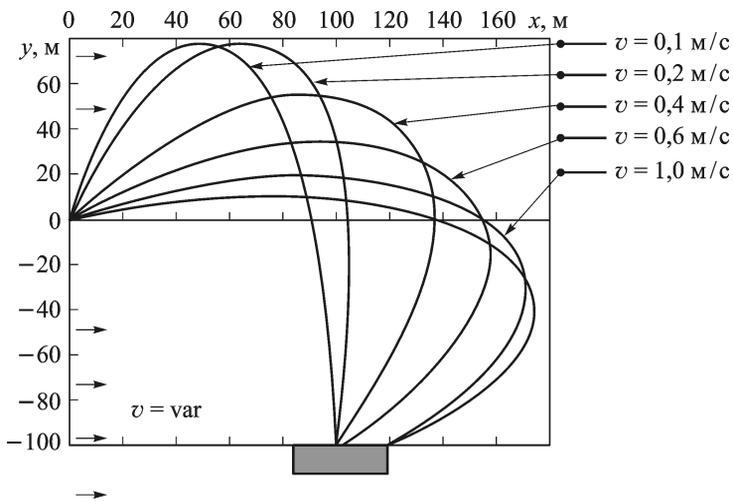


Рис. 2. Конфигурация кабеля ( $L_{\text{каб}} = 300$  м) при различных течениях

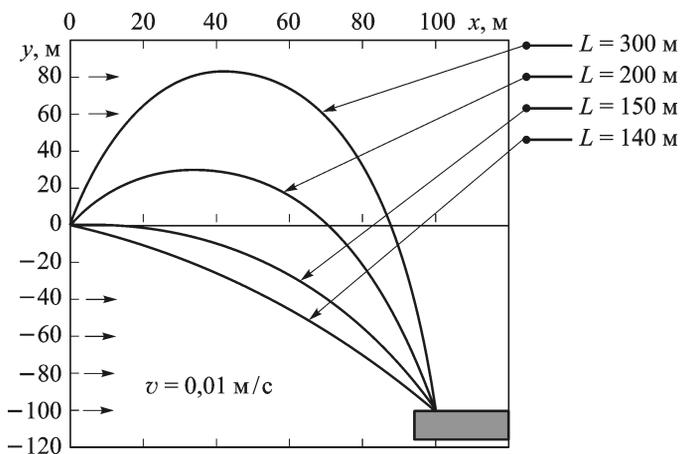


Рис. 3. Конфигурации кабеля переменной длины при  $v = 0,01$  м/с

плоских конфигураций для плавучего кабеля длиной 300 м при различных скоростях течения приведены на рис. 2. Возможность деформации этой геометрии в условиях малого течения за счет изменения длины кабеля иллюстрируется графиками, изображенными на рис. 3.

Для анализа динамических характеристик кабеля изменяемой длины предлагается использовать его упрощенное представление (рис. 4) со следующими допущениями:

- рассматривается плоское движение кабельной линии;
- кабель представляется в виде трех стержней, связанных идеальными шарнирами, при этом первый стержень является телескопическим и его текущая длина равна  $(l - \Delta l)$ , а остальные два имеют неизменную длину  $l$ ;
- центры масс и объема каждого стержня находятся в его середине;

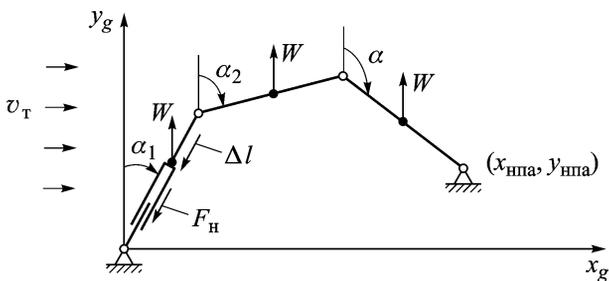


Рис. 4. Расчетная эквивалентная схема кабельной линии изменяемой длины

— подводное течение ( $v_T$ ) постоянно и действует в плоскости многозвенника;

— первый шарнир связан с подводным носителем, последний шарнир — с НПА, поэтому оба крайних шарнира неподвижны в рассматриваемой системе координат.

Последнее допущение полностью соответствуют двум типовым режимам использования НПА:

- совместного синхронного движения НПА и носителя;
- динамического позиционирования НПА у объекта работ.

С учетом принятых допущений эквивалентная механическая система будет иметь только две степени свободы, что существенно упрощает ее математическое представление. Для описания движения системы будем использовать уравнения Лагранжа. В качестве обобщенных координат системы выберем угол наклона первого стержня  $\alpha_1$ , отсчитываемый от вертикали, и изменение длины первого стержня  $\Delta l$ . Связь зависимых координат системы с обобщенными координатами определяется системой уравнений

$$x_{\text{нпа}} = l((1 - \Delta \bar{l}) \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3);$$

$$y_{\text{нпа}} = l((1 - \Delta \bar{l}) \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3),$$

где  $x_{\text{нпа}} = \text{const}$ ,  $y_{\text{нпа}} = \text{const}$  — координаты последнего шарнира, связанного с НПА;  $\Delta \bar{l} = \Delta l/l$  — относительное удлинение первого стержня.

Проводя линеаризацию уравнений путем их разложения в ряд Тейлора, можно получить приближенные линейные зависимости приращений координат:

$$\Delta \alpha_2 \approx a_2 \Delta \alpha_1 + b_2 \Delta \bar{l}; \quad \Delta \alpha_3 \approx a_3 \Delta \alpha_1 + b_3 \Delta \bar{l},$$

где

$$a_2 = \frac{\sin \alpha_{30} \cos \alpha_{10} - \cos \alpha_{30} \sin \alpha_{10}}{\sin \alpha_{20} \cos \alpha_{30} - \cos \alpha_{20} \sin \alpha_{30}};$$

$$b_2 = \frac{\sin \alpha_{30} \sin \alpha_{10} + \cos \alpha_{30} \cos \alpha_{10}}{\sin \alpha_{30} \cos \alpha_{20} - \cos \alpha_{30} \sin \alpha_{20}};$$

$$a_3 = \frac{\sin \alpha_{10} \cos \alpha_{20} - \cos \alpha_{10} \sin \alpha_{20}}{\sin \alpha_{20} \cos \alpha_{30} - \cos \alpha_{20} \sin \alpha_{30}};$$

$$b_3 = \frac{\sin \alpha_{20} \sin \alpha_{10} + \cos \alpha_{20} \cos \alpha_{10}}{\sin \alpha_{20} \cos \alpha_{20} - \cos \alpha_{20} \sin \alpha_{30}};$$

$\sin \alpha_{i0}, \cos \alpha_{i0}$  ( $i = 1 \dots 3$ ) – тригонометрические функции начальных углов ориентации звеньев.

Полная кинетическая энергия механической системы, состоящей из трех звеньев, определяется выражением

$$T_{\Sigma} = \frac{2}{3}(m + \lambda) \left[ (l - \Delta l)^3 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{3}{4} \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 l^2 (l - \Delta l) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{4} l^3 \dot{\alpha}_3^2 \right],$$

где  $m, \lambda$  – погонная масса кабеля и присоединенная масса воды, отнесенные к единице длины стержня.

Вводя связь зависимых и обобщенных скоростей в форме

$$\dot{\alpha}_2 = a_2 \dot{\alpha}_1 + \frac{b_2}{l} (\dot{\Delta} l) \quad \text{и} \quad \dot{\alpha}_3 = a_3 \dot{\alpha}_1 + \frac{b_3}{l} (\dot{\Delta} l),$$

можно преобразовать выражение для кинетической энергии к виду

$$T_{\Sigma} = \frac{2}{3}(m + \lambda) \left[ \left( (l - \Delta l)^3 + \frac{3}{4} a_2 l^2 (l - \Delta l) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{4} l^3 a_3^2 \right) \dot{\alpha}_1^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{3}{4} (l - \Delta l)^2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) b_2 + \frac{1}{2} l^2 a_3 b_3 \right) \dot{\alpha}_1 (\dot{\Delta} l) + \frac{1}{4} b_3^2 l (\dot{\Delta} l)^2 \right].$$

Уравнения Лагранжа для выбранных обобщенных координат имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \alpha_1} = Q_{\alpha}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial (\dot{\Delta} l)} \right) - \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \Delta l} = Q_l,$$

где  $Q_{\alpha}, Q_l$  – обобщенные силы, действующие на механическую систему.

При описании гидродинамических сил необходимо учесть возможность возникновения ламинарных режимов обтекания стержней. Аппроксимируя экспериментальные данные по определению гидродинамического коэффициента для кругового стержня [3], можно получить упрощенную функцию вида  $c_n \approx c_{nt} + 20/\text{Re}$ , где  $c_{nt} = 1 = \text{const}$  – значение гидродинамического коэффициента при турбулентных режимах обтекания;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса. Тогда элементарное гидродинамическое воздействие, приложенное к стержню, можно представить в виде суммы линейной и квадратичной составляющих:  $R_{\text{гд}} = 0,5 c_{nt} \rho l D v^2 \text{sign } v + 10 \rho \nu l v$ , где  $v$  – скорость набегающего потока;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости воды,  $D$  – диаметр стержня. Такое описание гидродинамического воздействия применяется для сил, обусловленных собственным движением звеньев системы, не зависящих от скорости подводного течения.

Значение обобщенной силы  $Q_\alpha$  определяется суммой активных сил, приложенных к звеньям и совершающих работу на элементарном приращении  $\delta\alpha_1$ :

$$Q_\alpha = \frac{1}{4}(l - \Delta l)^2(c_{nt}\rho D(v_T \cos \alpha_1)^2 - 2W_n \sin \alpha_1 - \frac{1}{2}c_{nt}\rho D(l - \Delta l)^2\dot{\alpha}_1^2 \text{sign } \dot{\alpha}_1 - 10\rho\nu((l - \Delta l)\dot{\alpha}_1) + \frac{1}{2}l^2 \sum_{i=2}^3 a_i(c_n\rho D(v_T \cos \alpha_i)^2 - 2W_n \sin \alpha_i - \frac{1}{2}c_{nt}\rho D l^2 \dot{\alpha}_i^2 \text{sign } \dot{\alpha}_i - 10\rho\nu l \dot{\alpha}_i),$$

где  $W_n$  — плавучесть, отнесенная к единице длины стержня.

Обобщенная сила  $Q_l$  определяется выражением

$$Q_l = F_n - \frac{1}{2}(l - \Delta l)(c_\tau\rho\pi D((v_T \sin \alpha_1)^2 + (\dot{\Delta}l)^2 \text{sign } \dot{\Delta}l) + W_n \cos \alpha_1) + \frac{1}{2}l \sum_{i=2}^3 b_i(c_{nt}\rho D(v_T \cos \alpha_i)^2 - 2W_n \sin \alpha_i - \frac{1}{2}c_n\rho D l^2 \dot{\alpha}_i^2 \text{sign } \dot{\alpha}_i - 10\rho\nu l \dot{\alpha}_i).$$

Здесь  $c_\tau$  — касательный гидродинамический коэффициент,  $F_n$  — управляющая сила натяжения, приложенная к концу первого стержня.

Окончательно система уравнений Лагранжа имеет вид

$$A_1\ddot{\alpha}_1 + B_1(\ddot{\Delta}l) + E\dot{\alpha}_1^2 + F\dot{\alpha}_1(\dot{\Delta}l) = Q_\alpha;$$

$$B_1\ddot{\alpha}_1 + D(\ddot{\Delta}l) + H\dot{\alpha}_1^2 + G\dot{\alpha}_1(\dot{\Delta}l) = Q_l,$$

где

$$A_1 = \frac{4}{3}(m + \lambda)l^3((l - \Delta l)^3 + \frac{3}{4}a_2(l - \Delta l) \cos(\alpha_{20} - \alpha_{10}) + \frac{1}{4}l^3 a_3^2),$$

$$B_1 = \frac{1}{3}(m + \lambda)l^2\left(\frac{3}{2}b_2(1 - \Delta\bar{l})^2 \cos(\alpha_{20} - \alpha_{10}) + a_3 b_3\right),$$

$$E = \frac{1}{2}(m + \lambda)(l - \Delta l) \sin(\alpha_{20} - \alpha_{10})a_2 l^2,$$

$$F = \frac{1}{2}(m + \lambda)(l - \Delta l)^2 \sin(\alpha_{20} - \alpha_{10})b_2,$$

$$H = -2(m + \lambda)((l - \Delta l)^2 + \frac{1}{4}a_2 l^2 \cos(\alpha_{20} - \alpha_{10})),$$

$$G = \frac{1}{3}(m + \lambda)(l - \Delta l)b_2 \cos(\alpha_{20} - \alpha_{10}).$$

В некоторых случаях полученные уравнения движения механической системы можно упростить. Пренебрегая в первом приближении

влиянием  $\Delta l$  на инерционные свойства первого стержня и значения переносной скорости второго звена, систему уравнений Лагранжа можно привести к более простому виду:

$$A\ddot{\alpha}_1 + B(\ddot{\Delta}l) = Q_\alpha;$$

$$B\ddot{\alpha}_1 + D(\ddot{\Delta}l) = Q_l,$$

где

$$A = \frac{4}{3}(m + \lambda)l^3 \left(1 + \frac{3}{4}a_2 \cos(\alpha_{20} - \alpha_{10}) + \frac{1}{4}a_3^2\right),$$

$$B = \frac{1}{3}(m + \lambda)l^2 \left(\frac{3}{2}b_2 \cos(\alpha_{20} - \alpha_{10}) + a_3 b_3\right), \quad D = \frac{1}{3}(m + \lambda)lb_3^2.$$

Предложенная и апробированная автором математическая модель кабеля изменяемой длины, несмотря на ее относительную простоту, сохраняет все основные физические закономерности и позволяет решить такие важные проектные задачи, как:

- определение динамических характеристик кабельной линии переменной длины как объекта управления;
- анализ влияния отдельных конструктивных параметров на динамику кабельной линии;
- моделирование различных алгоритмов управления длиной кабельной линии.

Следует отметить, что предложенная модель имеет ряд ограничений. В частности, в качестве начальных условий должна быть определена начальная конфигурация стержневой системы в виде значений углов  $\alpha_{10}$ ,  $\alpha_{20}$ ,  $\alpha_{30}$ . Поскольку в методе использованы линеаризованные соотношения кинематических параметров, то погрешность моделирования будет возрастать при увеличении приращений координат относительно их начальных значений. Для оценки относительной погрешности моделирования можно использовать расчетное значение смещения НПА относительно заданных координат  $x_{\text{нпа}}$ ,  $y_{\text{нпа}}$ , т.е.

$dr = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} / \sqrt{x_{\text{нпа}}^2 + y_{\text{нпа}}^2}$ . Графики оценки относительных погрешностей моделирования  $dr = f(\Delta\alpha_1)$  при  $\Delta\bar{l} = 0$  и  $dr = f(\Delta\bar{l})$  при  $\Delta\alpha_1 = 0$  приведены на рис. 5, а и б соответственно.

Анализ характеристик кабельной линии с использованием предложенной модели осуществляется традиционными методами, в частности оцениваются ее частотные свойства. В качестве примера на рис. 6 приведены амплитудно-фазовые частотные характеристики кабеля изменяемой длины  $L(j\omega) = \left| \frac{\alpha_1(j\omega)}{F_H(j\omega)} \right|$  и  $\varphi(j\omega) = \arg \frac{\alpha_1(j\omega)}{F_H(j\omega)}$  при различных значениях удельной плавучести.

Практическая ценность предлагаемой модели состоит в том, что она адекватно отражает реальную физику протекания динамических

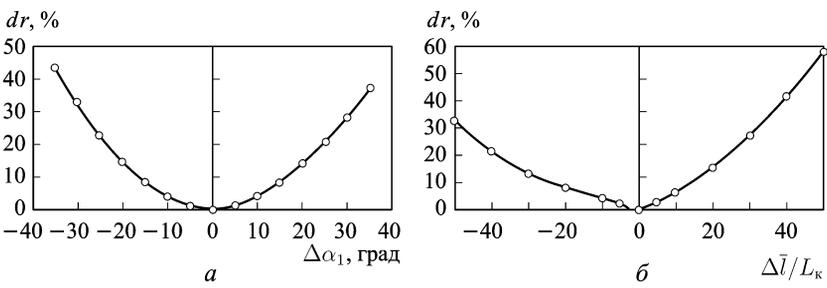


Рис. 5. Оценка погрешностей моделирования

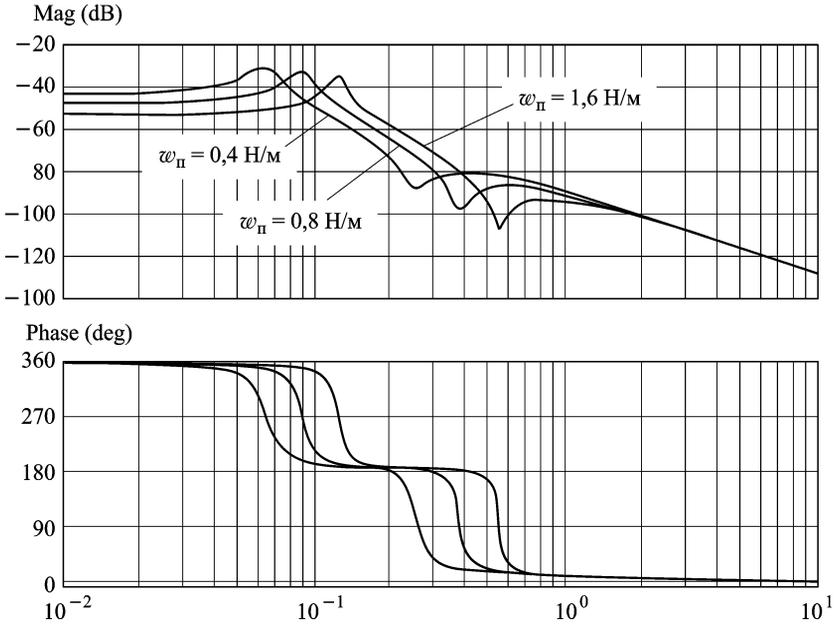


Рис. 6. Амплитудно-фазовые частотные характеристики кабеля изменяемой длины при различных значениях удельной плавучести

процессов в привязной системе и позволяет с достаточной для инженерных расчетов точностью определить ее важнейшие проектные параметры. На основе этого математического представления кабеля можно выполнить синтез различных алгоритмов управления длиной кабеля  $L_k$ . Практически реализуемы два способа управления: управление с измерением угла схода кабеля  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ ; управление по данным о текущей позиции НПА относительно подводного носителя.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов Н. И., Крейнделъ С. А., Лев И. Г. Привязные подводные системы. – М.: Нисневич: ЦНИИ “Гидроприбор”; СПб., 2005. – 304 с.
2. Динамика подводных буксируемых систем / В.И. Поддубный и др. – СПб.: Судостроение, 1995. – 200 с.
3. Девнин С. И. Аэрогидромеханика плохо обтекаемых конструкций. Справочник. – Л.: Судостроение, 1983. – 331 с.

Статья поступила в редакцию 23.03.2012