

Б. С. Сарбаев, Ю. Ю. Ширшов,
К. П. Баслык

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ УГЛЕРОД-КАРБИДНОГО КОМПОЗИТА

Приведен расчет напряженно-деформированного состояния тонкой пластины из слоистого углерод-карбидного композиционного материала с ортогональным 2D армированием, позволяющий достаточно быстро предсказать механизм разрушения и рассчитать разрушающую нагрузку. Предложен вариант аналитического решения задачи. Показано, что решение, найденное с помощью метода конечных элементов, хорошо согласуется с аналитическим решением. Рассмотрен численный пример. Отмечено, что вследствие низкой прочности углерод-карбидного композита на межслойный сдвиг для тонкостенной пластины возможен механизм разрушения, обусловленный расслоением.

E-mail: bssarbayer@mail.ru

Ключевые слова: углерод-карбидный композиционный материал, тонкая пластина, напряженно-деформированное состояние, прочность, межслойный сдвиг, разрушение.

В тонкостенных элементах конструкций современных летательных аппаратов, испытывающих значительные тепловые и механические нагрузки, применяются углерод-карбидные композиционные материалы (УККМ). Как правило, они имеют слоистую структуру с ортогональным 2D армированием. В качестве наполнителя используется углеродная ткань, уложенная в несколько слоев. Слои соединены редкой поперечной прошивкой. В результате сложной термической обработки наполнителя, первоначально пропитанного полимерным связующим, получается карбидная матрица [1]. Особенностью УККМ является то, что теплофизические и физико-механические характеристики позволяют рассматривать его и как функциональный материал, обеспечивающий теплозащиту конструкции, и как конструкционный, способный выдерживать сравнительно высокие силовые нагрузки. Именно эти качества способствовали применению УККМ в современных высокоскоростных летательных аппаратах, перемещающихся в условиях земной атмосферы.

Рассматривая слоистый УККМ как конструкционный материал, следует отметить, что ему присуща анизотропия свойств, а также низкая жесткость и прочность при поперечном нагружении и межслойном сдвиге. При испытаниях и эксплуатации это может вызвать разрушение, обусловленное расслоением, даже сравнительно тонких конструктивных элементов. В связи с этим повышенные требования

предъявляются к способам расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций из УККМ. В настоящее время в прикладных расчетах безусловный приоритет имеет метод конечных элементов (МКЭ). При этом широкое распространение получил подход, при котором тонкостенный элемент конструкции рассматривается как трехмерное тело с применением соответствующих конечных элементов. Например, в случае тонкой оболочки вращения в работе [2] используется конечный элемент в виде кольцевого осесимметричного тела с треугольным поперечным сечением. В многочисленных современных работах при расчете тонкостенных объектов с помощью таких программных комплексов, как NASTRAN, ANSYS, часто используются трехмерные конечные элементы. В этом случае расчет тонкостенного деформируемого тела, по существу, рассматривается как решение трехмерной задачи теории упругости.

Следует отметить, что указанный подход эффективен при проведении поверочных расчетов конструкции. В то же время на этапе проектирования, когда требуется оперативно оценить напряжения и деформации, основные геометрические и массовые характеристики элемента конструкции, он неудобен в силу своей громоздкости. В этом случае по-прежнему востребованы относительно простые расчетные соотношения и вычислительные алгоритмы. Для их обоснования целесообразно иметь аналитические решения соответствующих задач. В случае проектирования тонкостенных плоских конструктивных элементов из УККМ для этой цели целесообразно использовать решения, следующие из уравнений теории изгиба тонких пластин, учитывающих деформации поперечного сдвига.

Известны многочисленные решения для тонких анизотропных пластин, полученные по классической теории, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява [3]. Не так многочисленны работы, в которых приведены аналитические решения задач на основе теорий, учитывающих деформации поперечного сдвига. Чаще всего рассматриваются решения и соответствующие расчетные зависимости, полученные для прямоугольной пластины с шарнирным опиранием по контуру [4, 5].

В настоящей статье предложен вариант решения задачи об изгибе тонкой ортотропной прямоугольной пластины, нагруженной равномерным поперечным давлением. Две противоположные стороны этой пластины шарнирно оперты, а две другие стороны заделаны. По сути это типовая расчетная схема для плоских тонкостенных элементов конструкций летательных аппаратов, изготовленных с применением композитов [4]. При решении используются уравнения теории тонких анизотропных пластин, учитывающие деформации поперечного сдвига. Аналитическое решение записывается в одинарных тригонометрических рядах. Физико-механические характеристики материала пластины соответствуют характеристикам УККМ. Предложенное

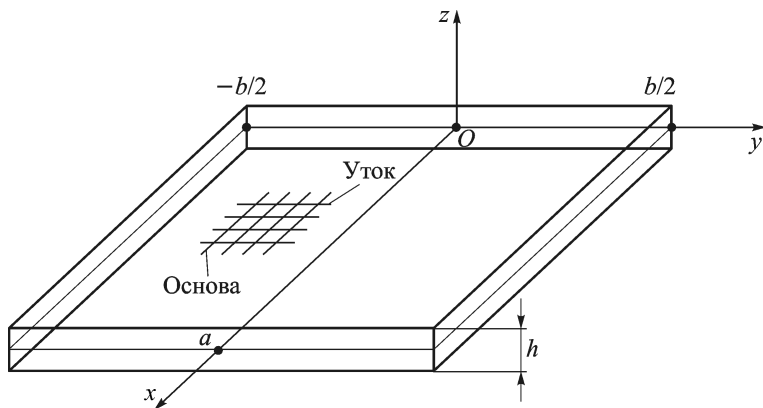


Рис. 1. Система координат и геометрические размеры пластины

решение, несмотря на сравнительную громоздкость, в сочетании с пакетом MathCad позволяет достаточно быстро оценить параметры напряженно-деформированного состояния пластины, предсказать механизм разрушения и рассчитать разрушающую нагрузку. Показано, что решение, найденное с помощью МКЭ, хорошо согласуется с полученным аналитическим решением.

Пусть прямоугольная пластина нагружена равномерным поперечным давлением q . Ее геометрические размеры и выбранная система прямоугольных декартовых координат показаны на рис. 1. Для расчета будем использовать уравнения линейной теории изгиба ортотропной пластины, учитывающей деформации поперечного сдвига [4], следующего вида:

$$D_{11} \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{33}) \left(\frac{\partial^3 \theta_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \theta_x}{\partial x \partial y^2} \right) + D_{22} \frac{\partial^3 \theta_y}{\partial y^3} + q = 0;$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{1}{K_x} \left[D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} \right]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{1}{K_y} \left[D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right].$$

Здесь $w(x, y)$ – перемещение точек срединной поверхности пластины в направлении оси OZ ; θ_x, θ_y – углы поворота нормали к срединной поверхности относительно осей OY и OX соответственно; $D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{33}, K_x, K_y$ – жесткостные характеристики упругой однородной ортотропной пластины постоянной толщины h , вычисляемые по формулам

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{33} = \frac{G_{12} h^3}{12};$$

$$D_{12} = \frac{E_1 \nu_{21} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}; \quad K_x = G_{13} h; \quad K_y = G_{23} h.$$

В этих соотношениях E_1, E_2 — модули упругости материала в направлении основы и утка соответственно (см. рис. 1); G_{12} — модуль сдвига в плоскости XOY ; ν_{12}, ν_{21} — коэффициенты Пуассона; G_{13}, G_{23} — модули сдвига в плоскостях XOZ и YOZ соответственно.

Погонные изгибающие моменты M_x, M_y , крутящий момент M_{xy} , приложенные к срединной поверхности пластины, рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x &= D_{11} \kappa_x + D_{12} \kappa_y; \\ M_y &= D_{12} \kappa_x + D_{22} \kappa_y; \\ M_{xy} &= D_{33} \kappa_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad \kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}.$$

Кроме этого, для погонных перерезывающих сил Q_x и Q_y имеем зависимости

$$\begin{aligned} Q_x &= D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2}; \\ Q_y &= D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{33}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + D_{33} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Как видно, уравнения (1) образуют неоднородную систему трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех неизвестных функций $w(x, y), \theta_x(x, y), \theta_y(x, y)$. Для ее решения воспользуемся методом одинарных тригонометрических рядов. Искомые функции представим в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(y) \sin(\lambda_n x); \\ \theta_x(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{xn}(y) \cos(\lambda_n x); \\ \theta_y(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{yn}(y) \sin(\lambda_n x), \end{aligned} \quad (4)$$

причем $\lambda_n = \pi n/a$. Тогда из формул (2) для изгибающих моментов можно получить такие равенства:

$$M_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{xn}(y) \sin(\lambda_n x);$$

$$M_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{yn}(y) \sin(\lambda_n x); \quad (5)$$

$$M_{xy}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{xyn}(y) \cos(\lambda_n x),$$

где

$$M_{xn}(y) = -D_{11} \lambda_n \theta_{xn} + D_{12} \frac{d\theta_{yn}}{dy};$$

$$M_{yn}(y) = -D_{12} \lambda_n \theta_{xn} + D_{22} \frac{d\theta_{yn}}{dy};$$

$$M_{xyn}(y) = D_{33} \left(\frac{d\theta_{xn}}{dy} + \lambda_n \theta_{yn} \right).$$

Перерезывающие силы в соответствии с равенствами (3) вычисляются так

$$Q_x(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{xn}(y) \cos(\lambda_n x);$$

$$Q_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{yn}(y) \sin(\lambda_n x). \quad (6)$$

Здесь приняты обозначения

$$Q_{xn}(y) = -D_{11} \lambda_n^2 \theta_{xn} + (D_{12} + D_{33}) \lambda_n \frac{d\theta_{yn}}{dy} + D_{33} \frac{d^2 \theta_{xn}}{dy^2};$$

$$Q_{yn}(y) = D_{22} \frac{d^2 \theta_{yn}}{dy^2} - (D_{12} + D_{33}) \lambda_n \frac{d\theta_{xn}}{dy} - D_{33} \lambda_n^2 \theta_{yn}.$$

Внешнюю нагрузку также представим в виде тригонометрического ряда. Для случая постоянного давления будем иметь

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin(\lambda_n x),$$

где $q_n = 4q/(\pi n)$, $n = 1, 3, 5, \dots, 2k - 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Далее рассмотрим пластину, которая по краям $x = 0$ и $x = a$ шарнирно оперта, а по краям $y = \pm b/2$ заделана. Тогда можно записать

граничные условия

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x = a: \quad w = 0, \quad M_x = 0, \quad \theta_y = 0; \\ y = \pm \frac{b}{2}: \quad w = 0, \quad \theta_x = \theta_y = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Как следует из формул (4) и (5), граничные условия при $x = 0$, $x = a$ выполняются. Подставляя зависимости (4) в уравнения (1), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных функций $W_n(y)$, $\theta_{xn}(y)$, $\theta_{yn}(y)$:

$$\begin{aligned} D_{22} \frac{d^3 \theta_{yn}}{dy^3} - \\ - (D_{12} + 2D_{33}) \lambda_n \left(\lambda_n \frac{d\theta_{yn}}{dy} + \frac{d^2 \theta_{xn}}{dy^2} \right) + D_{11} \lambda_n^3 \theta_{xn} + q_n = 0; \\ - \frac{D_{33}}{K_x} \frac{d^2 \theta_{xn}}{dy^2} + \\ + \left(1 + \frac{D_{11}}{K_x} \lambda_n^2 \right) \theta_{xn} - \frac{D_{12} + D_{33}}{K_x} \lambda_n \frac{d\theta_{yn}}{dy} + \lambda_n W_n = 0; \\ - \frac{D_{33}}{K_y} \frac{d^2 \theta_{yn}}{dy^2} + \\ + \left(1 + \frac{D_{33}}{K_y} \lambda_n^2 \right) \theta_{yn} + \frac{D_{12} + D_{33}}{K_y} \lambda_n \frac{d\theta_{xn}}{dy} + \frac{dW_n}{dy} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее предполагаем, что пластина изготовлена из УККМ с ортогональным 2D армированием. В качестве наполнителя используется углеродная ткань, уложенная в несколько слоев, соединенных редкой поперечной прошивкой. При выполнении расчетов такой материал в первом приближении можно рассматривать как квазиизотропный. Для характеристик упругости примем следующие упрощающие соотношения:

$$E_1 = E_2 = E; \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu; \quad G_{13} = G_{23} = G. \quad (9)$$

Тогда можно записать $D_{11} = D_{22} = D$, $K_x = K_y = K$. С учетом равенств (9) преобразуем систему уравнений (1).

Продифференцировав один раз второе уравнение из системы (8) и решив его совместно с третьим уравнением этой же системы, после преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{D_4 - D}{K} \frac{d^2 \theta_{yn}}{dy^2} + \frac{D_{33}}{\lambda_n K} \frac{d^3 \theta_{xn}}{dy^3} + \\ + \left(1 + \frac{D_{33}}{K} \lambda_n^2 \right) \theta_{yn} + \left(\frac{D_4 - D}{K} \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} \right) \frac{d\theta_{xn}}{dy} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь приняты следующие обозначения: $D_3 = D_{12} + 2D_{33}$, $D_4 = D_{12} + D_{33}$.

Далее продифференцируем один раз первое уравнение из (1) при условии, что $q_n = \text{const}$. Получим

$$\frac{d\theta_{xn}}{dy} = -\frac{1}{\lambda_n^3} \frac{d^4\theta_{yn}}{dy^4} + \frac{D_3}{\lambda_n D} \left(\frac{d^2\theta_{yn}}{dy^2} + \frac{1}{\lambda_n} \frac{d^3\theta_{xn}}{dy^3} \right). \quad (11)$$

Уравнения (10) и (11) образуют следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{D_{33}}{\lambda_n K} \frac{d^3\theta_{xn}}{dy^3} + \left(\frac{D_4 - D}{K} \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} \right) \frac{d\theta_{xn}}{dy} &= \\ &= -\frac{D_4 - D}{K} \frac{d^2\theta_{yn}}{dy^2} - \left(1 + \frac{D_{33}}{K} \lambda_n^2 \right) \theta_{yn}; \quad (12) \\ \frac{D_3}{\lambda_n^2 D} \frac{d^3\theta_{xn}}{dy^3} - \frac{d\theta_{xn}}{dy} &= \frac{1}{\lambda_n^3} \frac{d^4\theta_{yn}}{dy^4} - \frac{D_3}{\lambda_n D} \frac{d^2\theta_{yn}}{dy^2}. \end{aligned}$$

Рассматривая систему (12) как систему линейных алгебраических уравнений относительно производных $\frac{d\theta_{xn}}{dy}$, $\frac{d^3\theta_{xn}}{dy^3}$, в итоге можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta_n \frac{d^3\theta_{xn}}{dy^3} &= -\frac{1}{\lambda_n^3} \left(\frac{D_4 - D}{K} \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} \right) \frac{d^4\theta_{yn}}{dy^4} + \frac{D_4 - D}{K} \frac{d^2\theta_{yn}}{dy^2} + \\ &+ \frac{D_3}{\lambda_n D} \left(\frac{D_4 - D}{K} \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} \right) \frac{d^2\theta_{yn}}{dy^2} + \left(1 + \frac{D_{33}}{K} \lambda_n^2 \right) \theta_{yn}; \quad (13) \\ \Delta_n \frac{d\theta_{xn}}{dy} &= \frac{D_{33}}{\lambda_n K} \left(\frac{1}{\lambda_n^3} \frac{d^4\theta_{yn}}{dy^4} - \frac{D_3}{\lambda_n D} \frac{d^2\theta_{yn}}{dy^2} \right) + \\ &+ \frac{D_3}{\lambda_n^2 D} \left[\frac{D_4 - D}{K} \frac{d^2\theta_{yn}}{dy^2} + \left(1 + \frac{D_{33}}{K} \lambda_n^2 \right) \theta_{yn} \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta_n = -\frac{D_{33}}{\lambda_n K} - \frac{D_4 - D}{\lambda_n K D} D_3 + \frac{D_3}{\lambda_n^3 D}.$$

Дифференцируя дважды второе равенство системы (13) и сравнивая его с первым равенством этой же системы, после преобразований получаем однородное дифференциальное уравнение относительно угла поворота θ_{yn}

$$\begin{aligned} \frac{d^6\theta_{yn}}{dy^6} - \left(\frac{D_0}{D D_{33}} \lambda_n^2 + \frac{K}{D_{33}} \right) \frac{d^4\theta_{yn}}{dy^4} + \\ + \lambda_n^2 \frac{2D_3 K + D_0 \lambda_n^2}{D D_{33}} \frac{d^2\theta_{yn}}{dy^2} - \lambda_n^4 \left(\frac{K}{D_{33}} + \lambda_n^2 \right) \theta_{yn} &= 0, \quad (14) \end{aligned}$$

где $D_0 = D^2 - D_{12}^2 + D_{33}(D - 2D_{12})$.

Далее удобно ввести следующие величины:

$$m = \frac{D_0}{DD_{33}} = \frac{E}{G_{12}} + (1 - 2\nu), \quad f = \frac{D_3}{D} = \nu + \frac{2G_{12}(1 - \nu^2)}{E}, \quad \kappa^2 = K/D_{33}.$$

Отсюда следует, что

$$f = \frac{(m - 1)\nu + 2}{m - 1 + 2\nu}.$$

Тогда уравнение (14) можно представить как

$$\frac{d^6\theta_{yn}}{dy^6} - (\kappa^2 + m\lambda_n^2) \frac{d^4\theta_{yn}}{dy^4} + \lambda_n^2(2f\kappa^2 + m\lambda_n^2) \frac{d^2\theta_{yn}}{dy^2} - \lambda_n^4(\kappa^2 + \lambda_n^2)\theta_{yn} = 0 \quad (15)$$

и при этом показать, что

$$\Delta_n = -\frac{1}{\lambda_n} \left[\frac{1}{\kappa^2} + \frac{f(2 - m - \nu)}{\kappa^2(1 + \nu)} - \frac{f}{\lambda_n^2} \right].$$

Отметим, что для трансверсально изотропного тела, когда $G_{12} = E/[2(1 + \nu)]$, имеют место равенства $m = 3$, $f = 1$, $\Delta_n = \lambda_n^{-3}$.

Как обычно, решение уравнения (15) ищем в виде

$$\theta_{yn}(y) = A_n e^{\alpha_n y}. \quad (16)$$

После подстановки выражения (16) в уравнение (15) получим следующее характеристическое уравнение:

$$\alpha_n^6 - (\kappa^2 + m\lambda_n^2)\alpha_n^4 + \lambda_n^2(2f\kappa^2 + m\lambda_n^2)\alpha_n^2 - \lambda_n^4(\kappa^2 + \lambda_n^2) = 0. \quad (17)$$

Для трансверсально изотропного тела уравнение (17) принимает вид

$$(\alpha_n^2 - \lambda_n^2)^2 \left(\alpha_n^2 - \lambda_n^2 - \frac{K}{D_{33}} \right) = 0.$$

Корни этого уравнения можно записать так:

$$\alpha_n^{(1,2)} = \lambda_n, \quad \alpha_n^{(3,4)} = -\lambda_n, \quad \alpha_n^{(5)} = -\alpha_n^{(6)} = \sqrt{\lambda_n^2 + \kappa^2}.$$

Отметим, что в работе [6] на основании иного способа учета поперечных сдвигов были получены корни, которые в принятых обозначениях имеют вид

$$\alpha_n^{(1,2)} = \lambda_n, \quad \alpha_n^{(3,4)} = -\lambda_n, \quad \alpha_n^{(5)} = -\alpha_n^{(6)} = \sqrt{\lambda_n^2 + 5\kappa^2/6}.$$

Решив алгебраическое уравнение (17) и получив выражение для $\theta_{yn}(y)$, далее по второй формуле из (13) находим производную $\frac{d\theta_{xn}}{dy}$. Продифференцировав один раз полученное выражение, определяем производную $\frac{d^2\theta_{xn}}{dy^2}$. Затем, воспользовавшись первым равенством системы уравнений (8), получаем выражение для угла поворота $\theta_{xn}(y)$.

Тогда из второй формулы системы (8) следует формула для прогиба $W_n(y)$.

Применив изложенный порядок расчета для рассматриваемой квазиизотропной пластины из УККМ, после преобразований будем иметь следующие выражения:

$$\theta_{xn}(y) = a_{11n} \frac{d^5 \theta_{yn}}{dy^5} + a_{12n} \frac{d^3 \theta_{yn}}{dy^3} + a_{13n} \frac{d\theta_{yn}}{dy} + a_{10n}; \quad (18)$$

$$W_n(y) = b_{11n} \frac{d^5 \theta_{yn}}{dy^5} + b_{12n} \frac{d^3 \theta_{yn}}{dy^3} + b_{13n} \frac{d\theta_{yn}}{dy} + b_{10n}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta_{yn}(y) = & A_{1n} e^{\alpha_{n1}y} + A_{2n} e^{\alpha_{n2}y} + A_{3n} e^{\alpha_{n3}y} + \\ & + A_{4n} e^{\alpha_{n4}y} + A_{5n} e^{\alpha_{n5}y} + A_{6n} e^{\alpha_{n6}y}, \quad (20) \end{aligned}$$

где

$$a_{11n} = \frac{n}{\lambda_n^4 \delta_n};$$

$$a_{12n} = \frac{1}{\lambda_n^3} \left[\frac{n^2 \lambda_n}{\delta_n} \left(\frac{2 - m - \nu}{1 + \nu} - n \right) - 1 \right];$$

$$a_{13n} = \frac{n}{\lambda_n} \left[\frac{n(\kappa^2 + \lambda_n^2)}{\lambda_n \delta_n} + 1 \right];$$

$$a_{10n} = -\frac{q_n}{\lambda_n^3 D};$$

$$b_{11n} = \frac{1}{\lambda_n^3 \delta_n} \left[\frac{1}{\kappa^2} - \frac{n}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{m - 1 + 2\nu}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\lambda_n^2}{\kappa^2} \right) \right];$$

$$\begin{aligned} b_{12n} = & \frac{1}{\lambda_n \delta_n} \left\{ \left(\frac{2 - m - \nu}{1 + \nu} - n \right) \frac{n}{\kappa^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda_n^3} \left[\left(\frac{2 - m - \nu}{1 + \nu} - n \right) n^2 \lambda_n - \delta_n \right] \left(1 + \frac{m - 1 + 2\nu}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\lambda_n^2}{\kappa^2} \right) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{13n} = & \left\{ \frac{n(\kappa^2 + \lambda_n^2)}{\lambda_n \delta_n \kappa^2} + \frac{\nu^2 + (m - 1)\nu + 1}{(1 - \nu^2)\kappa^2} - \right. \\ & \left. - \frac{n}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{m - 1 + 2\nu}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\lambda_n^2}{\kappa^2} \right) \left[\frac{n(\kappa^2 + \lambda_n^2)}{\lambda_n \delta_n} + 1 \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$b_{10n} = \left(1 + \frac{m - 1 + 2\nu}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\lambda_n^2}{\kappa^2} \right) \frac{q_n}{\lambda_n^4 D};$$

$$\delta_n = \kappa^2 \lambda_n^2 \Delta_n;$$

$$\Delta_n = -\frac{3-m}{\lambda_n \kappa^2} \cdot \frac{\nu^2 + (m-1)\nu + 1}{(1+\nu)(m-1+2\nu)} + \frac{f}{\lambda_n^3}.$$

Здесь α_{ni} — корни характеристического уравнения (17). Константы A_{in} определяются из граничных условий для амплитудных функций, которые на основании равенств (4) и условий (7) принимают вид

$$y = \pm \frac{b}{2} : \quad W_n = 0, \quad \theta_{xn} = \theta_{yn} = 0. \quad (21)$$

Корни характеристического уравнения (17) можно получить с помощью формул Кардано. Для этого запишем его следующим образом:

$$x_n^3 - I_{1n}x_n^2 + I_{2n}x_n - I_{3n} = 0, \quad (22)$$

где $x_n = \alpha_n^2$, $I_{1n} = \kappa^2 + m\lambda_n^2 > 0$, $I_{2n} = 2f\kappa^2 + m\lambda_n^2 > 0$, $I_{3n} = \kappa^2 + \lambda_n^2 > 0$. Как обычно, при использовании подстановки $z_n = x_n + I_{1n}/3$ из уравнения (22) следует неполное кубическое уравнение $z_n^3 + p_n z_n + q_n = 0$, где в принятых обозначениях имеем

$$3p_n = m(3-m)\lambda_n^4 + 2\kappa^2(3f-m)\lambda_n^2 - \kappa^4;$$

$$27q_n = (-2m^3 + 9m^2 - 27)\lambda_n^6 +$$

$$+ \kappa^2(18fm + 9m - 6m^2 - 27)\lambda_n^4 + 6\kappa^4(3f-m)\lambda_n^2 - 2\kappa^6.$$

В зависимости от значения дискриминанта $Q_n = p_n^3/27 + p_n^2/4$ получим либо три действительных корня, либо один действительный и два комплексно сопряженных корня.

Численный анализ показывает, что для широкого класса квазиизотропных пластин, изготовленных из УККМ с ортогональным 2D армированием, в интервале $1 < n < n^*$, где $n^* \approx 50$, имеем $Q_n > 0$. Следовательно, в этом случае для неполного кубического уравнения будем иметь один действительный и два комплексно сопряженных корня. При этом корни уравнения (17) запишем так:

$$\alpha_{1n} = \omega_n; \quad \alpha_{2n} = -\omega_n; \quad \alpha_{3n} = \rho_n + i\eta_n;$$

$$\alpha_{4n} = \rho_n - i\eta_n; \quad \alpha_{5n} = -\rho_n - i\eta_n; \quad \alpha_{6n} = -\rho_n + i\eta_n.$$

В этом случае общее решение (20) для однородного уравнения (15) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_{yn}(y) = & A_{1n}sh(\omega_n y) + A_{2n}ch(\omega_n y) + A_{3n}\Phi_{1n}(y) + \\ & + A_{4n}\Phi_{2n}(y) + A_{5n}\Phi_{3n}(y) + A_{6n}\Phi_{4n}(y). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_{1n}(y) = sh(\rho_n y) \sin(\eta_n y); \quad \Phi_{2n}(y) = sh(\rho_n y) \cos(\eta_n y); \\ \Phi_{3n}(y) = ch(\rho_n y) \cos(\eta_n y); \quad \Phi_{4n}(y) = ch(\rho_n y) \sin(\eta_n y). \end{aligned} \quad (24)$$

Используя равенства (18)–(20), (23), (24), для искомым величин можно получить зависимости

$$\begin{aligned} \theta_{xn}(y) = & C_n[A_{1n} \operatorname{ch}(\omega_n y) + A_{2n} \operatorname{sh}(\omega_n y)] + A_{3n}[s_n \Phi_{4n}(y) + t_n \Phi_{2n}(y)] + \\ & + A_{4n}[s_n \Phi_{3n}(y) - t_n \Phi_{1n}(y)] + A_{5n}[s_n \Phi_{2n}(y) - t_n \Phi_{4n}(y)] + \\ & + A_{6n}[s_n \Phi_{1n}(y) + t_n \Phi_{3n}(y)] + a_{10n}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} W_n(y) = & D_n[A_{1n} \operatorname{ch}(\omega_n y) + A_{2n} \operatorname{sh}(\omega_n y)] + A_{3n}[p_n \Phi_{4n}(y) + r_n \Phi_{2n}(y)] + \\ & + A_{4n}[p_n \Phi_{3n}(y) - r_n \Phi_{1n}(y)] + A_{5n}[p_n \Phi_{2n}(y) - r_n \Phi_{4n}(y)] + \\ & + A_{6n}[p_n \Phi_{1n}(y) + r_n \Phi_{3n}(y)] + b_{10n}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} s_n &= \rho_n[a_{11n}(\rho_n^4 - 10\rho_n^2\eta_n^2 + 5\eta_n^4) + a_{12n}(\rho_n^2 - 3\eta_n^2) + a_{13n}]; \\ t_n &= \eta_n[a_{11n}(\eta_n^4 - 10\rho_n^2\eta_n^2 + 5\rho_n^4) - a_{12n}(\eta_n^2 - 3\rho_n^2) + a_{13n}]; \\ C_n &= (a_{11n}\omega_n^4 + a_{12n}\omega_n^2 + a_{13n})\omega_n, \\ p_n &= \rho_n[b_{11n}(\rho_n^4 - 10\rho_n^2\eta_n^2 + 5\eta_n^4) + b_{12n}(\rho_n^2 - 3\eta_n^2) + b_{13n}]; \\ r_n &= \eta_n[b_{11n}(\eta_n^4 - 10\rho_n^2\eta_n^2 + 5\rho_n^4) - b_{12n}(\eta_n^2 - 3\rho_n^2) + b_{13n}]; \\ D_n &= (b_{11n}\omega_n^4 + b_{12n}\omega_n^2 + b_{13n})\omega_n. \end{aligned}$$

Константы интегрирования определим из условия симметрии задачи и граничных условий. В системе координат, показанной на рис. 1, функция $\theta_{yn}(y)$ должна быть нечетной, а функции амплитудных перемещений $W_n(y)$ и углов поворота нормали $\theta_{xn}(y)$ – четными. Тогда из формул (23) и (24) следует, что $A_{2n} = A_{3n} = A_{5n} = 0$. В итоге имеем

$$\theta_{yn}(y) = A_{1n} \operatorname{sh}(\omega_n y) + A_{4n} \Phi_{2n}(y) + A_{6n} \Phi_{4n}(y). \quad (27)$$

Зависимости (25) и (26) упростятся и примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \theta_{xn}(y) = & C_n A_{1n} \operatorname{ch}(\omega_n y) + A_{4n}[s_n \Phi_{3n}(y) - t_n \Phi_{1n}(y)] + \\ & + A_{6n}[s_n \Phi_{1n}(y) + t_n \Phi_{3n}(y)] + a_{10n}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} W_n(y) = & D_n A_{1n} \operatorname{ch}(\omega_n y) + A_{4n}[p_n \Phi_{3n}(y) - r_n \Phi_{1n}(y)] + \\ & + A_{6n}[p_n \Phi_{1n}(y) + r_n \Phi_{3n}(y)] + b_{10n}. \end{aligned} \quad (29)$$

Оставшиеся три константы находим из граничных условий (21) при $y = b/2$. Таким образом, получим систему линейных алгебраических

уравнений относительно констант A_{1n}, A_{4n}, A_{6n} :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} g_n A_{1n} + \Phi_{2n}(\bar{b}) A_{4n} + \Phi_{4n}(\bar{b}) A_{6n} &= 0; \\ C_n \operatorname{ch} g_n A_{1n} + \lambda_{12n} A_{4n} + \lambda_{14n} A_{6n} &= -a_{10n}; \\ D_n \operatorname{ch} g_n A_{1n} + \beta_{12n} A_{4n} + \beta_{14n} A_{6n} &= -b_{10n}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{12n} &= s_n \Phi_{3n}(\bar{b}) - t_n \Phi_{1n}(\bar{b}); \quad \lambda_{14n} = s_n \Phi_{1n}(\bar{b}) + t_n \Phi_{3n}(\bar{b}); \\ \beta_{12n} &= p_n \Phi_{3n}(\bar{b}) - r_n \Phi_{1n}(\bar{b}); \quad \beta_{14n} = p_n \Phi_{1n}(\bar{b}) + r_n \Phi_{3n}(\bar{b}); \\ \bar{b} &= b/2; \quad g_n = \bar{b} \omega_n. \end{aligned}$$

Вычисления по формулам (27)–(29), а также решение характеристического уравнения (17) и системы уравнений (30) удобно выполнять с помощью пакета MathCad. При этом следует учитывать, что ряды (4)–(6) достаточно быстро сходятся [4]. В практических расчетах можно использовать только первую гармонику.

Рассмотрим пример. Пусть характеристики УККМ таковы, что выполняются соотношения $E/G_{12} = 11,931$; $G/G_{12} = 0,057$; $\nu = 0,1$. Для внешней нагрузки зададим $q/G_{12} = 0,00517 \cdot 10^{-3}$. Для геометрических параметров примем $\bar{b} = b/a = 1,591$; $\bar{h} = h/a = 0,014$. Далее использованы следующие обозначения: $\bar{w} = w/a$; $\bar{x} = x/a$; $\bar{y} = y/a$; $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/G_{12}$ ($i \rightarrow x, y, xz, yz$). При анализе учитывался только первый член тригонометрического ряда. На рис. 2 изображены эпюры прогибов пластины $\bar{w}(\bar{x}, \bar{y})$, а на рис. 3 — эпюры нормальных напряжений, действующих вдоль осей симметрии пластины. Эпюры поперечных касательных напряжений на краях пластины показаны на рис. 4. Используя полученные результаты, можно определить координаты точек пластины, в которых напряжения принимают экстремальные значения.

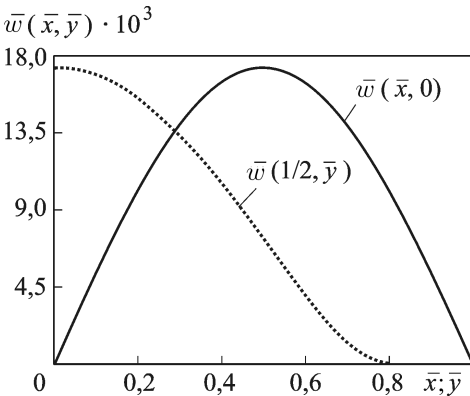


Рис. 2. Эпюра прогибов пластины $w(x, 0)$ и $w(a/2, y)$

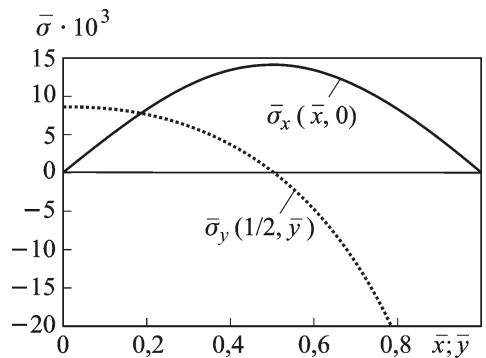


Рис. 3. Эпюры нормальных напряжений $\sigma_y(a/2, y)$ и $\sigma_x(x, 0)$

В табл. 1 указаны координаты таких точек. Через y_3 обозначен корень уравнения $\frac{dM_{xyn}(y)}{dy} = 0$.

Представленное решение для квазиизотропной пластины полезно сопоставить с решением по МКЭ. Для этой цели был использован плоский треугольный шестиузловой конечный элемент [5]. В этом элементе, основные соотношения которого построены на основе смешанного вариационного принципа, учитываются деформации поперечного сдвига. В табл. 2 сравниваются результаты расчета, полученные изложенным аналитическим способом и с помощью МКЭ. Как следует из этой таблицы, совпадение результатов удовлетворительное.

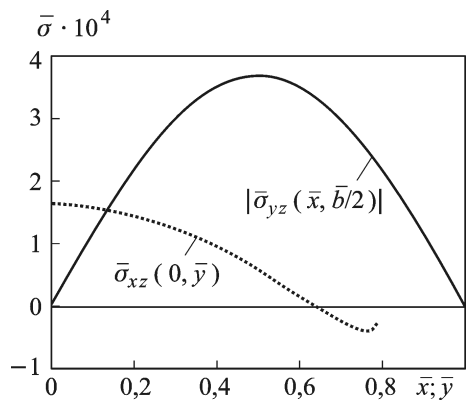


Рис. 4. Эпюры поперечных касательных напряжений $\sigma_{xz}(0, y)$ и $|\sigma_{yz}(x, b/2)|$

Таблица 1

Координаты точек пластины, в которых напряжения максимальны

Координата	Напряжение				
	σ_x	σ_y	σ_{xy}	σ_{xz}	σ_{yz}
x	$a/2$	$a/2$	$a/2$	0	$a/2$
y	0	$b/2$	y_3	0	$b/2$

Таблица 2

Сравнение результатов аналитических и численных расчетов

Решения	Параметры			
	$\bar{w}(0,5;0)$	$\theta_x(0,982;0)$	$\theta_y(0,5;0,502)$	$\bar{\sigma}_y(0,5;0)$
Аналитическое	0,0174	0,0525	0,0314	$8,685 \cdot 10^{-3}$
МКЭ	0,0172	0,0539	0,0313	$8,823 \cdot 10^{-3}$
Решения	Параметры			
	$\bar{\sigma}_x(0,5;0)$	$\bar{\sigma}_{xz}(0,982;0)$	$\bar{\sigma}_{yz}(0,5;0,779)$	
Аналитическое	0,0143	$-1,657 \cdot 10^{-4}$	$-3,551 \cdot 10^{-4}$	
МКЭ	0,0139	$-1,439 \cdot 10^{-4}$	$-3,359 \cdot 10^{-4}$	

Достоинством предложенного решения является то, что с его помощью можно сравнительно просто оценить разрушающую нагрузку q^* . Пусть рассматриваемый УККМ подчиняется критерию максимальных напряжений. При этом заданы пределы прочности при растяжении и

сжатии вдоль основы F_{+1} и F_{-1} , прочности при растяжении и сжатии вдоль утка F_{+2} и F_{-2} , предел прочности при сдвиге в плоскости армирования F_{12} , пределы прочности при межслойном сдвиге F_{13} и F_{23} . Для определенности примем следующие соотношения между характеристиками материала:

$$\frac{F_{+1}}{F_{12}} = 6,07; \quad \frac{F_{-1}}{F_{12}} = 4,29; \quad \frac{F_{+2}}{F_{12}} = 5,0; \quad \frac{F_{-2}}{F_{12}} = 4,29;$$

$$\frac{F_{13}}{F_{12}} = \frac{F_{23}}{F_{12}} = 0,14; \quad \frac{F_{12}}{G_{12}} = 4,83 \cdot 10^{-3}.$$

На основании данных табл. 1 можно сделать вывод о том, что при $F_{-1} < F_{+1}$ и $F_{-2} < F_{+2}$ возможны пять механизмов разрушения пластины: 1) разрушение от сжатия вдоль основы в точке $x = a/2, y = 0$; 2) разрушение от сжатия вдоль утка в точке $x = a/2, y = b/2$; 3) разрушение от сдвига в плоскости пластины в точке $x = a/2, y = y_s$; 4) разрушение от межслойного сдвига в плоскости XOZ в точке $x = 0, y = 0$; 5) разрушение от межслойного сдвига в плоскости YOZ в точке $x = a/2, y = b/2$. Обозначим через $\bar{q}_i^* = q_i^*/q$ ($i \rightarrow x, y, xy, xz, yz$) разрушающую нагрузку, соответствующую указанным механизмам разрушения. В табл. 3 для разных толщин приведены рассчитанные значения этой величины.

Таблица 3

Значения разрушающей нагрузки

h/a	\bar{q}_x^*	\bar{q}_y^*	\bar{q}_{xy}^*	\bar{q}_{xz}^*	\bar{q}_{yz}^*
0,0136	1,447	1,001	3,667	4,0	1,877
0,0272	5,667	4,333	15,0	8,0	4,0

Как следует из табл. 3, при $h/a = 0,0136$ разрушение пластины произойдет от сжатия вдоль утка в точке $x = a/2, y = b/2$ при $\bar{q}_y^* \approx 1,001q$. При $h/a = 0,0272$ разрушение обусловлено межслойным сдвигом в плоскости YOZ в этой же точке при нагрузке $\bar{q}_{yz}^* \approx 4q$.

Рассмотренный численный пример свидетельствует об актуальности адекватного расчета на прочность тонкостенных элементов конструкций из УККМ. При этом надо учитывать, что в зоне приложения сосредоточенной нагрузки, в точках закрепления, на краях изделия межслойные напряжения могут изменяться по толщине по сложному закону, отличного от параболического, с выраженной концентрацией напряжений [2, 7]. Окончательное заключение о прочности тонкостенного конструктивного элемента из УККМ можно получить после проведения поверочного расчета с применением экспериментально обоснованного критерия прочности и корректно измеренных прочностных характеристик композита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щ у р и к А. Г. Искусственные углеродные материалы. – Пермь, 2009. – 342 с.
2. Н о с а т е н к о П. Я. Численное решение пространственных задач механики слоистых анизотропных оболочек из композитных материалов / В сб. Механика в авиации и космонавтике; Под ред. С.В. Челомея. – М.: Машиностроение, 1995. – С. 110–127.
3. Л е х н и ц к и й С. Г. Анизотропные пластинки. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1947. – 355 с.
4. В а с и л ь е в В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 269 с.
5. П о п о в Б. Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. – 294 с.
6. А м б а р ц у м я н С. А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 268 с.
7. М е ж с л о й н ы е эффекты в композитных материалах: Сб. статей под ред. Н. Пэйгано. – М.: Мир, 1993. – 346 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2012