

В. В. К о р о в и н, А. В. П о п о в,
В. И. У с ю к и н

КВАТЕРНИОННЫЕ ПАРАМЕТРЫ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА В МОДЕЛИ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СВЯЗКИ

Рассмотрена задача пространственного движения космической тросовой связи. Связка моделируется цепочкой материальных точек (трос) и твердых тел (концевые объекты). Математическая модель включает в себя уравнения движения материальных точек и центров масс тел в геоцентрической инерциальной системе координат и уравнения вращения твердых тел относительно центра масс. Для описания ориентации твердого тела в пространстве использованы кватернионные параметры Родрига–Гамильтона, включающие случаи вырождения системы кинематических уравнений.

E-mail: korovinvv@mail.ru; bbee-popov@yandex.ru

Ключевые слова: космическая тросовая связь, динамика неуправляемого развращения, кватернионы, динамика концевых тел связи.

Рассмотрим задачу движения космической тросовой связи с концевыми твердыми телами, имеющими инерционные характеристики. Постановка подобных задач приведена в работах [1–3].

Трос моделируется цепочкой дискретных точечных масс, соединенных вязкоупругими связями, работающими только при положительной (растягивающей) деформации [1] (рис. 1). На концах троса находятся твердые тела. Точка соединения троса с твердым телом в общем случае не совпадает с центром масс тела. Обозначим связанную систему координат j -го тела $O_j X_j Y_j Z_j$. Здесь O_j — центр масс, оси системы координат являются главными центральными осями инерции тела. Положение точки подвеса твердого тела в его связанной системе координат будем считать неизменным, а концевое тело — абсолютным твердым.

Кроме того, введем неподвижную геоцентрическую (инерциальную) систему координат $Oxyz$ и подвижную (неинерциальную) систему координат $OXYZ$ [4].

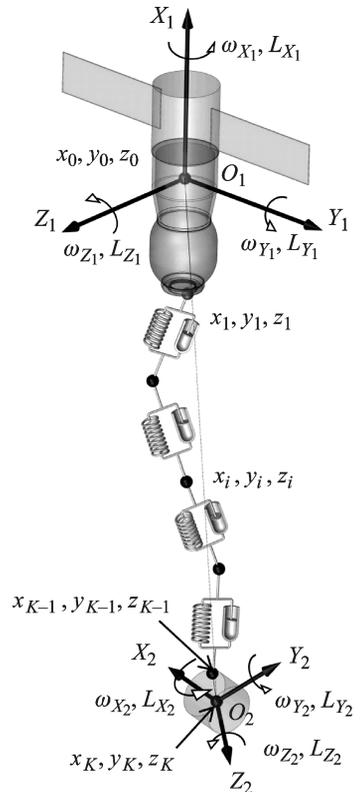


Рис. 1. Модель космической тросовой связи

Уравнения движения дискретных масс троса, а также конечных тел как материальных точек относительно геоцентрической инерциальной системы координат примем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -\frac{M_{\oplus} \cdot G m_i}{r_i^3} x_i + \left(\varepsilon_i + \alpha \frac{d\varepsilon_i}{dt} \right) EF \frac{x_{i+1} - x_i}{l_i} - \\
 &\quad - \left(\varepsilon_{i-1} + \alpha \frac{d\varepsilon_{i-1}}{dt} \right) EF \frac{x_i - x_{i-1}}{l_{i-1}}; \\
 m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -\frac{M_{\oplus} \cdot G m_i}{r_i^3} y_i + \left(\varepsilon_i + \alpha \frac{d\varepsilon_i}{dt} \right) EF \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i} - \\
 &\quad - \left(\varepsilon_{i-1} + \alpha \frac{d\varepsilon_{i-1}}{dt} \right) EF \frac{y_i - y_{i-1}}{l_{i-1}}; \\
 m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= -\frac{M_{\oplus} \cdot G m_i}{r_i^3} z_i + \left(\varepsilon_i + \alpha \frac{d\varepsilon_i}{dt} \right) EF \frac{z_{i+1} - z_i}{l_i} - \\
 &\quad - \left(\varepsilon_{i-1} + \alpha \frac{d\varepsilon_{i-1}}{dt} \right) EF \frac{z_i - z_{i-1}}{l_{i-1}},
 \end{aligned}$$

где m_i — масса i -й точки; x_i, y_i, z_i — ее геоцентрические координаты; $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ — геоцентрический радиус; M_{\oplus} и G — масса Земли и гравитационная постоянная; ε_i — деформация i -го участка троса; EF — жесткость троса на растяжение; α — коэффициент вязкого демпфирования в тросе; $\frac{d\varepsilon_i}{dt}$ — скорость деформирования, $l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$ — длина i -го участка троса.

Для описания углового движения твердых тел используются уравнения вращения в форме Эйлера [5]:

$$\begin{aligned}
 L_{X_j} &= A_j \frac{d\omega_{X_j}}{dt} + (C_j - B_j) \omega_{Y_j} \omega_{Z_j}; \\
 L_{Y_j} &= B_j \frac{d\omega_{Y_j}}{dt} + (A_j - C_j) \omega_{Z_j} \omega_{X_j}; \\
 L_{Z_j} &= C_j \frac{d\omega_{Z_j}}{dt} + (B_j - A_j) \omega_{X_j} \omega_{Y_j},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где A_j, B_j, C_j — главные центральные моменты инерции j -го тела; $L_{X_j}, L_{Y_j}, L_{Z_j}$ — проекции главного момента внешних сил на оси связанной системы координат; $\omega_{X_j}, \omega_{Y_j}, \omega_{Z_j}$ — проекции вектора угловой скорости вращения j -го твердого тела на оси связанной системы координат (см. рис. 1).

Кинематические уравнения, связывающие угловые скорости вращения твердого тела и углы Эйлера, определяющие его положение, имеют вид [5]

$$\omega_X = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$

$$\omega_Y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi;$$

$$\omega_Z = \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\varphi},$$

откуда получим

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_Y \cos \varphi + \omega_X \sin \varphi}{\sin \theta};$$

$$\dot{\theta} = \omega_X \cos \varphi - \omega_Y \sin \varphi;$$

$$\dot{\varphi} = \omega_Z - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\omega_Y \cos \varphi + \omega_X \sin \varphi).$$

Очевидно, что при $\theta \rightarrow 0$ получим $\dot{\psi} \rightarrow \infty$, $\dot{\varphi} \rightarrow \infty$. Происходит вырождение системы уравнений, что делает затруднительным использование таких выражений для численного интегрирования [6]. То же касается и углов Крылова. В последние годы для описания ориентации в трехмерном пространстве нашли применение кватернионные параметры Родрига–Гамильтона (кватернионы).

Кватернион — гиперкомплексное число вида $\lambda = \lambda_0 + \mathbf{i}\lambda_1 + \mathbf{j}\lambda_2 + \mathbf{k}\lambda_3$, геометрически реализуемое в четырехмерном пространстве [7]. Здесь $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — кватернионные параметры.

Поясним суть кватернионных параметров. По теореме Эйлера–Даламбера перевод твердого тела с одной закрепленной точкой из одного положения в другое может быть совершен за один поворот вокруг неподвижной мгновенной оси, проходящей через точку вращения (рис. 2)

Используя теорему о конечном перемещении твердого тела [8], запишем вектор конечного поворота: $\boldsymbol{\theta} = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\chi}{2} \mathbf{e} \right)$, где $\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \alpha' + \mathbf{j} \cos \beta' + \mathbf{k} \cos \gamma'$.

Кватернионы — это гиперкомплексные числа, при описании которых используют форму записи с проекциями вектора конечного поворота на оси связанной системы координат и углом поворота [8]:

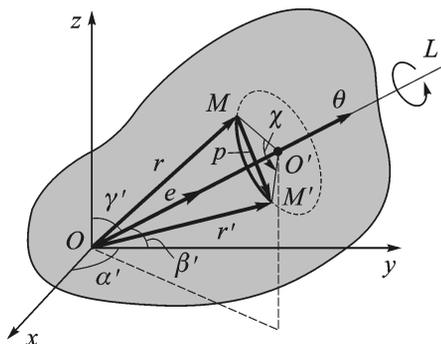


Рис. 2. К определению кватерниона

$$\lambda_0 = \cos \frac{\chi}{2};$$

$$\lambda_1 = \cos \alpha' \sin \frac{\chi}{2};$$

$$\lambda_2 = \cos \beta' \sin \frac{\chi}{2};$$

$$\lambda_3 = \cos \gamma' \sin \frac{\chi}{2}.$$

Условие нормировки [9]

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \quad (2)$$

Особенностью используемого алгоритма является определение вектора силы натяжения троса \overline{T}_j в связанной системе координат j -го тела $O_j X_j Y_j Z_j$, путем перевода координат дискретной точки троса, следующей за точкой подвеса, из геоцентрической неподвижной системы координат в связанную.

Составляющие момента L_{X_j} , L_{Y_j} , L_{Z_j} вычисляются через известное значение силы натяжения троса и ее проекций (\overline{T}_j) в связанной системе координат твердого тела и координаты (радиус-вектор) точки подвеса X_j, Y_j, Z_j (\overline{r}_j): $\overline{L}_j = \overline{r}_j \times \overline{T}_j$ или

$$\begin{pmatrix} L_{X_j} \\ L_{Y_j} \\ L_{Z_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{Z_j} Y_j - T_{Y_j} Z_j \\ T_{X_j} Z_j - T_{Z_j} X_j \\ T_{Y_j} X_j - T_{X_j} Y_j \end{pmatrix}.$$

Уравнения динамики Эйлера дополняются кинематическими уравнениями, связывающими угловую скорость вращения твердого тела с кватернионными параметрами [8]:

$$\begin{aligned} \omega_X &= 2 \left(\lambda_0 \dot{\lambda}_1 + \lambda_3 \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \dot{\lambda}_3 - \lambda_1 \dot{\lambda}_0 \right); \\ \omega_Y &= 2 \left(-\lambda_3 \dot{\lambda}_1 + \lambda_0 \dot{\lambda}_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_3 - \lambda_2 \dot{\lambda}_0 \right); \\ \omega_Z &= 2 \left(\lambda_2 \dot{\lambda}_1 - \lambda_1 \dot{\lambda}_2 + \lambda_0 \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \dot{\lambda}_0 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Из системы уравнений (3) и условия нормировки (2) находим значения первых производных кватернионных параметров через значения угловых скоростей в связанной системе координат:

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_0 &= -\frac{\omega_X \lambda_1 + \omega_Y \lambda_2 + \omega_Z \lambda_3}{2}; \\
 \dot{\lambda}_1 &= \frac{\omega_X \lambda_0 - \omega_Y \lambda_3 + \omega_Z \lambda_2}{2}; \\
 \dot{\lambda}_2 &= \frac{\omega_Y \lambda_0 + \omega_X \lambda_3 - \omega_Z \lambda_1}{2}; \\
 \dot{\lambda}_3 &= \frac{\omega_Y \lambda_1 - \omega_X \lambda_2 + \omega_Z \lambda_0}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Таким образом, система уравнений (1) и система (4) позволяют решить задачу движения тросовой связки с твердыми телами, используя кватернионные параметры для описания кинематики движения. Здесь потребуется матрица поворота для перехода из геоцентрической инерциальной системы координат в связанную систему координат твердого тела, записанная через кватернионы [9]:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_2 \\ 0 & 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3 & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1 \\ 0 & 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2 & 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_1 & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{pmatrix} \times \\
 &\qquad \qquad \qquad \times \begin{pmatrix} 0 \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Связь между кватернионными параметрами и углами Эйлера имеет следующий вид [8]:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}; \\
 \lambda_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}; \\
 \lambda_2 &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}; \\
 \lambda_3 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2},
 \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_3}{\lambda_0} + \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2}{\lambda_1};$$

$$\theta = 2 \arccos \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_0^2};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_3}{\lambda_0} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Для удобства ввода и чтения данных о положении твердого тела будем использовать полярную систему координат, начало которой находится в центре масс тела, а оси совпадают с осями подвижной неинерциальной системы координат $OXYZ$ принятой ранее. Полярная система координат получается из углов Эйлера принятием угла

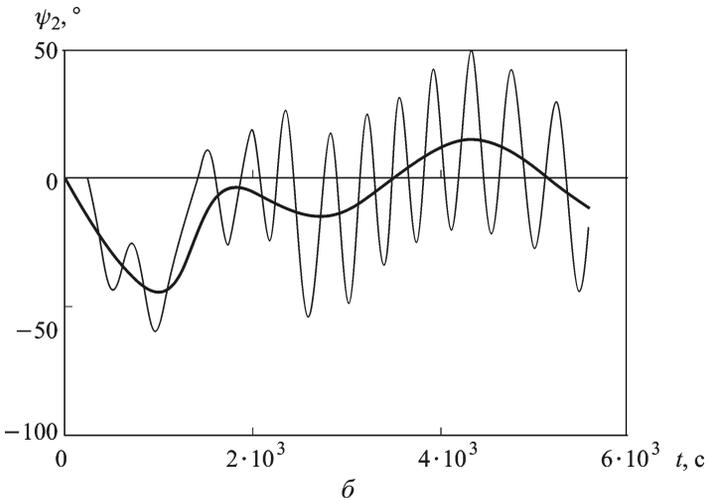
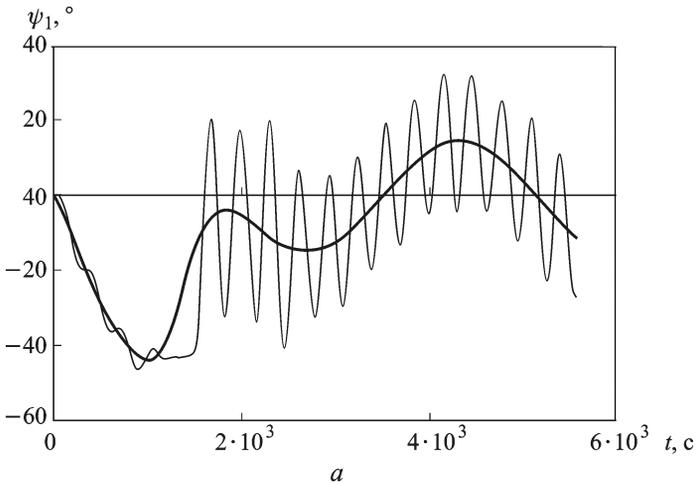


Рис. 3. Изменение угла ψ верхнего (а) и нижнего (б) концевых тел. Черной кривой показано изменение положения линии визирования концевых тел в плоскости орбиты

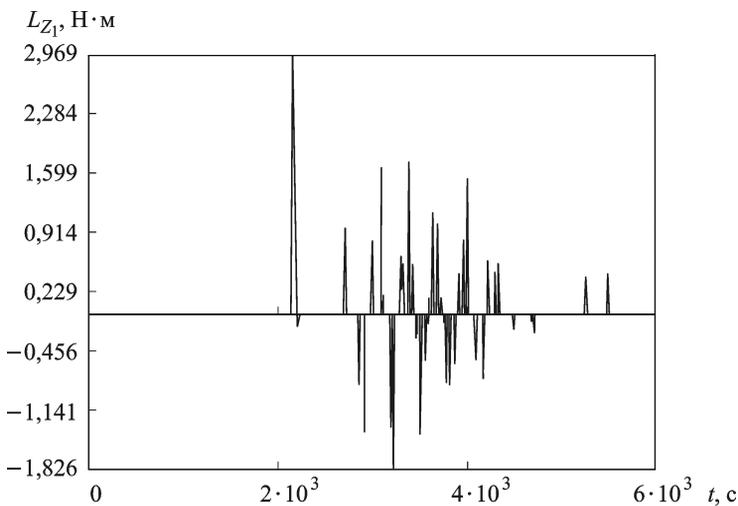


Рис. 4. Изменение момента сил на верхнем концевом теле

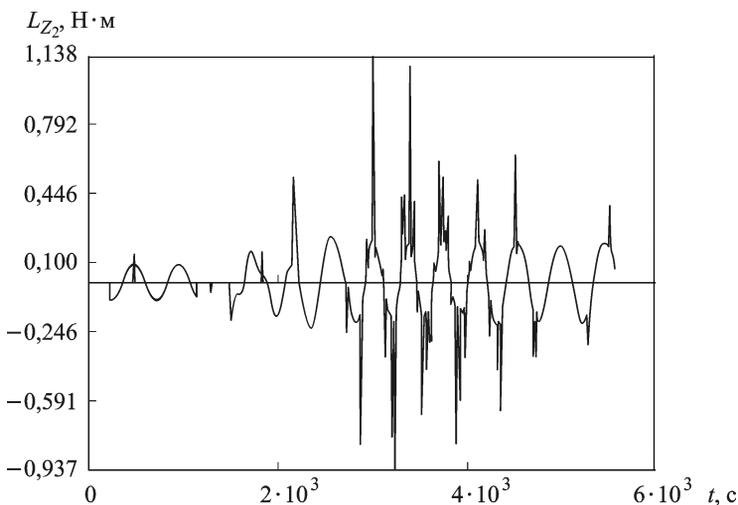


Рис. 5. Момент сил на нижнем концевом теле

$\theta = 90^\circ$. Тогда угол поворота в плоскости OXY (совпадает с плоскостью орбиты) равен углу прецессии ψ , а угол отклонения из плоскости орбиты в плоскости OXZ совпадает с углом собственного вращения φ .

Разработанная математическая модель использована для исследования развертывания космической тросовой связки. На рис. 3–5 приведены некоторые результаты расчетов для связки длиной 5 км с концевыми телами массой 6000 и 25 кг на круговой околоземной орбите высотой 400 км. Начальный угол развертывания $\psi = 0^\circ$, начальная скорость 6 м/с. На рис. 3 изображены графики изменения угла отклонения твердых тел ψ в плоскости орбиты. Главные моменты сил, действующие на концевые твердые тела, показаны на рис. 4 и 5. Полученные

данные позволяют сделать вывод о характере движения концевых тел при развертывании связки и свидетельствуют об отсутствии закручивания концевых тел относительно центра масс. Созданный численный алгоритм позволяет выполнять параметрический анализ и оптимизацию характеристик тросовой связки и начальных условий развертывания с целью выполнения ограничений на угловое движение концевых тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б е л е ц к и й В. В., Л е в и н Е. М. Динамика космических тросовых систем. – М.: Наука, 1990. – 336 с.
2. У с ю к и н В. И. Строительная механика конструкций космической техники: Учебник для студентов вузов. – М.: Машиностроение, 1988. – 392 с.
3. С у с л о в Г. К. Теоретическая механика: Учебник для университетов. – М.: ОГИЗ гос. изд-во техн.-теор. литературы, 1946. – 667 с.
4. С о л о д о в А. В. Инженерный справочник по космической технике. – М.: Воениздат, 1969. – С. 87–92.
5. К у р с теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; Под общ. ред. К.С. Колесникова. 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.
6. Р а у ш е н б а х Б. В., Т о к а р ь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. – М.: Наука, 1974. – С. 137–141.
7. М а т е м а т и ч е с к а я энциклопедия. Т. 1–5. – М.: Сов. энциклопедия, 1977–1985.
8. Б о р и с о в А. В., М а м а е в И. С. Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – С. 42–44.
9. Ч е л н о к о в Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. – М.: Наука, 2006. – 512 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2012