УДК 539.376

Т. А. Бутина, В. М. Дубровин

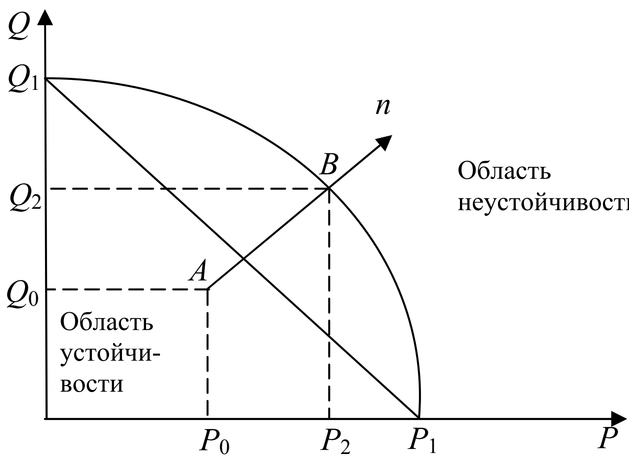
УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Исследована устойчивость цилиндрической оболочки при совместном действии внешней нагрузки двух видов, например осевой сжимающей силы P и распределенного по поверхности внешнего избыточного давления Q. Для оценки устойчивости оболочки выбран критерий устойчивости упругой системы с n степенями свободы, находящейся под действием нагрузок P и Q, и рассмотрено равновесие системы.

E-mail: butina_ta@mail.ru

Ключевые слова: *критическая нагрузка, граница зон устойчивости и неустойчивости, бифуркация, устойчивость в малом, устойчивость в большом.*

На плоскости с осями координат P и Q рассмотрим точку A с координатами P_0, Q_0 в области устойчивости, относящейся к основному состоянию (рассматривается устойчивость в малом), так, как показано на рисунке.



Область устойчивости системы

Полную энергию системы, соответствующую точке $A(P_0, Q_0)$, представим в виде

$$L = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i P_0 - \gamma_i Q_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} S_i q_i^2,$$

где q_i — обобщенные координаты, изменяющиеся при переходе от основного равновесного состояния к смежному.

Функция L и ее производные $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ равны нулю лишь при $q_i = 0$. Тогда воспользуемся теоремой Лежён-Дирихле: «Если в некотором (основном) состоянии консервативной системы потенциальная энергия минимальна по отношению к значениям энергии всех смежных (отклоненных) состояний системы, то основное состояние является положением устойчивого равновесия», и обращением Ляпунова этой теоремы: «Если в основном положении равновесия потенциальная энергия не является минимальной, а отсутствие минимума определяется членами второго порядка в разложении потенциальной энергии, то положение будет неустойчиво». Из условия равновесия основного состояния следует, согласно этим теоремам, что $\dfrac{\partial^z L}{\partial q_i^z} = S_i > 0$.

Будем изменять нагрузку, приложенную к системе, полагая

$$P = P_0 + kx; \quad Q = Q_0 + lx,$$

где k, l — направляющие косинусы луча A_n (см. рисунок).

Тогда в новом состоянии, в которое перешла система, полная энергия

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[S_i - x(k\beta_i + l\gamma_i)\right]q_i^2.$$

Обозначив $\beta_i k + \gamma_i l = r_i$, будем иметь

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(S_i - r_i x)q_i^2;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2} = S_i - r_i x.$$

Знак r_i определяется знаком параметров k и l. При $r > 0$ для некоторого значения x получим

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2} = S_i - r_i x = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Условие (1) соответствует потере устойчивости системы в смысле Лежён-Дирихле и Ляпунова. Следовательно, определится пара критических значений P_2 и Q_2, при которых выполняется условие (1). При дальнейшем возрастании x всегда будет выполняться соотношение

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2} = S_i - r_i x < 0. \tag{2}$$

Это означает, что переход через точку B с координатами P_2, Q_2 приводит систему в область неустойчивого положения. Предположим, что условия (1) и (2) выполняются для всех точек B_i, лежащих на некоторой линии, которая отделяет устойчивую область от неустойчивой. Тогда, если двигаться вдоль луча A_n от точки A, после перехода через точку B нельзя уже вернуться в область устойчивости, определяемую условием

$$S_i - r_i x < 0.$$

Аналогичный вывод можно получить для любой граничной точки B_i. Если $r_i < 0$, всегда $\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2} > 0$ и, следовательно, система находится в состоянии устойчивости. Таким образом, по области устойчивости в произвольном направлении можно либо пересечь только один раз границу этой области, либо не пересекать ее совсем. Это может быть лишь в случае, если граница области обращена выпуклостью в сторону области неустойчивости. Уравнение линии, отделяющей область устойчивости от области неустойчивости, в общем случае можно представить в виде

$$\left(\frac{P}{P_1}\right)^m + \left(\frac{P}{Q_1}\right)^n = 1, \tag{3}$$

где m, n — параметры линии.

Учитывая это, при P_1 и Q_1, соответствующих раздельному приложению нагрузки, можно приближенно установить значения критических нагрузок при комбинированном нагружении. Тогда прямая P_1Q_1 дает либо точное, либо приближенное (с запасом устойчивости) значение критических нагрузок при их совместном приложении. В этом случае уравнение прямой

$$\frac{P}{P_1} + \frac{Q}{Q_1} = 1$$

описывает множество всех значений критических нагрузок при совместном приложении двух видов нагрузок.

Указанный подход к оценке критических нагрузок для цилиндрической оболочки можно распространить на случай большего числа различных видов нагружения. Так, при совместном действии трех нагрузок P, Q, R вместо линии (3) получим поверхность

$$\left(\frac{P}{P_1}\right)^m + \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^n + \left(\frac{R}{R_1}\right)^l = 1,$$

где m, n, l — параметры поверхности; P_1, Q_1, R_1 — значения критических нагрузок при их раздельном приложении.

Тогда плоскость

$$\frac{P}{P_1} + \frac{Q}{Q_1} + \frac{R}{R_1} = 1$$

дает либо точное, либо приближенное (с запасом устойчивости) значение критических нагрузок P, Q, R при их совместном приложении. При n различных видов нагрузок получается n-мерная поверхность, отделяющая область устойчивости от области неустойчивости. В общем случае уравнение этой поверхности

$$\left(\frac{P}{P_1}\right)^{n_1} + \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^{n_2} + \ldots + \left(\frac{R}{R_1}\right)^{n_n} = 1,$$

а гиперплоскость $\frac{P}{P_1} + \frac{Q}{Q_1} + \ldots + \frac{R}{R_1} = 1$ дает либо точное, либо приближенное (с запасом устойчивости) значение критических нагрузок $P, Q, \ldots, R$ при их совместном приложении.

В предположении линейной зависимости исходного состояния оболочки от нагрузки имеет место следующая теорема [2]: «Граничная поверхность не может быть обращена выпуклостью к области устойчивости». Отсюда следует, что любой луч, проведенный из области устойчивости, либо вовсе не пересекает граничную поверхность, либо пересекает ее не более одного раза. Если же провести отрезок, соединяющий две точки граничной поверхности, то этот отрезок или будет полностью лежать в области устойчивости, или будет составлять часть граничной поверхности. Из этой теоремы следует условие

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1, \qquad (4)$$

где C_i — отношение нагрузок к их экспериментальным или теоретическим критическим значениям при раздельном действии нагрузок.

Эта оценка с запасом устойчивости в некоторых случаях является заниженной. Так, при совместном действии осевой сжимающей нагрузки и избыточного внешнего давления на цилиндрическую оболочку средней длины $L_{об}$ уравнение равновесия имеет вид [2]

$$K_2^2 D(\lambda^2+n^2)^2+\gamma^4 Eh(\lambda^2+n^2)^{-2}+T_1\lambda^2+T_2 n^2-2S^0\lambda n=0, \qquad (5)$$

где K_2 — главная кривизна оболочки в окружном направлении; $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — жесткость оболочки на изгиб (E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки); $\lambda=\dfrac{mnR_2}{L_{\text{об}}}$ — длина полуволны в окружном направлении; h, R_2 — толщина и радиус оболочки; m, n — число полуволн в окружном и продольном направлениях; T_1, T_2, S^0 — погонные нормальные и сдвигающие усилия.

Уравнение (5) можно записать следующим образом:

$$\frac{R_2 Q}{Eh}=\frac{\lambda^2}{n^2}\left[\frac{T_2^2}{Eh}+\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+n^2)^2}+\frac{h^2}{12R_2^2(1-\nu^2)}\frac{(\lambda^2+n^2)^2}{\lambda^2}\right]. \qquad (6)$$

Введем обозначения: $R_{\text{c}}=-\dfrac{T_1}{T_{\text{в}}}$, где $T_{\text{в}}$ — верхнее критическое значение осевой силы; $Q_2=\dfrac{QR_1}{T_{\text{в}}}$; $\chi=\dfrac{1}{\lambda}\sqrt{\dfrac{1-\nu^2}{\alpha_1}}$; $\alpha_1=\dfrac{h^2}{12R_2^2}$; $\alpha_2=\dfrac{2}{\chi}$; $Z_1=\mu\alpha_2$; $\mu=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{n^2}{\lambda^2}\right)$.

Тогда уравнение (6) примет вид

$$Q_2=\frac{\alpha_2}{2Z_1-\alpha_2}\left[\frac{1}{2}\left(Z_1^2+\frac{1}{Z_1^2}\right)-R_{\text{c}}\right], \qquad (7)$$

откуда

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2}=\frac{2Z_1}{(2Z_1-\alpha_2)^2}=\left[\frac{1}{2}\left(Z_1^2+\frac{1}{Z_1^2}\right)-R_{\text{c}}\right].$$

Функция

$$\varphi(Z_1)=\frac{1}{2}\left(Z_1^2+\frac{1}{Z_1^2}\right)$$

имеет минимальное значение, равное единице.

Параметр R_c изменяется в пределах [–1, 1]. Следовательно, производная $\dfrac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} \geq 0.$ При этом равенство нулю производной может иметь место только при $R_c = 1$. В этом случае оболочка теряет устойчивость при действии лишь одного продольного усилия $N = -T_1$. Исключим этот частный случай, так как рассматривается совместное действие на оболочку двух видов нагрузки; при этом $\dfrac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} \geq \varphi.$ Это означает, что функция $Q_2(\alpha_2)$ монотонно возрастает и имеет минимум при $m = 1$.

Из условия минимума функции Q_2 по переменной Z_1 получим уравнение для определения μ:

$$(\alpha_2\mu)^4 = -3 + \frac{2}{\mu - 1} - \varepsilon\mu^2\left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right), \tag{8}$$

где $\varepsilon = \dfrac{8R_c}{\chi^2}$.

Уравнения (7) и (8) определяют границу устойчивости оболочки. При $\mu \gg 1$ можно получить простые приближенные формулы для Q_2. Пренебрегая в формуле (8) величинами порядка $\dfrac{1}{\mu - 1}$ по сравнению с единицей, будем иметь

$$\mu = \frac{\sqrt{\theta}}{\alpha_2},$$

где $\theta = -R_c + \sqrt{R_c^2 + 3}.$

Подставив μ в уравнение (7), получим

$$Q_2 = \frac{1}{2\left(\chi\sqrt{\theta} - 1\right)}\left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2R_c\right). \tag{9}$$

Для оболочек средней длины $\chi \gg 1.$ Тогда

$$Q_2 = \frac{1}{2\chi\sqrt{\theta}}\left(\theta + \frac{1}{\theta} - 2R_c\right). \tag{10}$$

Выводы. Полученные соотношения позволяют определить область устойчивости оболочек при совместном действии осевой силы и внешнего избыточного давления. При действии циклической нагрузки область устойчивости цилиндрической оболочки получена в работе [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформированных систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
2. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
3. Алгазин О. Д., Бутина Т. А., Дубровин В. М. Нелинейная динамическая устойчивость цилиндрической оболочки при циклическом нагружении. – М., 2011. – 20 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 256-В2011.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.

.