УДК 530.145.1

А. К. Федоров, С. О. Юрченко

КВАТЕРНИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПИНОВЫХ ТОМОГРАММ

Рассматрено применение кватернионов для описания квантовых систем с дискретными переменными с помощью спиновых томограмм. Представлено определение спиновой томограммы при помощи кватерниона.

E-mail: alesha.fedorov@gmail.com, st.yurchenko@mail.ru

Ключевые слова: *квантовая томография, квантовая динамика, конденсированное состояние, кватернионы.*

Томограммы, использующиеся в квантовой механике для вероятностного описания состояний в фазовом пространстве, являются в настоящее время предметом обширных теоретических и экспериментальных исследований [1–4]. Томограммы — это неотрицательные функции распределения вероятностей, которые могут быть определены для непрерывных (симплектических, оптических томограмм) и дискретных переменных (спиновой томограммы, томограммы счета фотонов) [3, 4].

Квантовая томография непрерывных переменных. Пусть квантовое состояние описывается волновой функцией в координатном представлении $\psi(q)$. Тогда симплектическая томограмма $\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta)$ наблюдаемой ε, которая является линейной комбинацией квадратурных компонент координаты q и импульса p

$$\widehat{\varepsilon} = \mu\widehat{q} + \eta\widehat{p}$$

определяется через волновую функцию $\psi(q)$ следующим образом:

$$\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) = |\widehat{\mathcal{F}}_{\mu,\eta}[\psi(q)](\varepsilon)|^2,$$

где $\widehat{\mathcal{F}}_{\mu,\eta}$ — оператор дробного преобразования Фурье:

$$\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|}\left|\int \psi(q)\exp\left[\frac{i\mu}{2\eta}q^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta}q\right] dq\right|^2. \tag{1}$$

Параметры μ и η — это элементы матрицы $\mathcal{M}$ симплектической группы $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ (поворот в фазовом пространстве). Таким образом, μ и η — это параметры системы отсчета, в которой проводится измерение квантового состояния. Преобразование обобщенных координат и импульсов под действием матрицы $\mathcal{M}$ является каноническим и может быть представлено в виде:

$$\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \sigma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu & \eta\\ \eta' & \mu'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где q, p и ε,σ — обобщенные координаты и импульсы, μ, μ', η, η' — произвольные постоянные. Как и всякое каноническое преобразование, (2) сохраняет скобку Пуассона в классическом случае и коммутатор в квантовом случае.

Для матрицы $\mathcal{M}$ справедливо разложение Ивасавы, поскольку $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ является полупростой группой Ли:

$$\begin{pmatrix} \mu & \eta \\ \eta' & \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \tag{3}$$

параметры $\alpha \in (0; \infty)$, $\nu \in (-\infty; \infty)$, $\phi \in [-\pi; \pi]$.

Таким образом, частным случаем преобразования (2) является действие матриц вращения группы $\mathrm{SO}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

где $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — угол поворота. В случае поворота (2) фазового пространства на угол θ томограмма переменных ε и θ называют оптической.

Исходя из определения (1), томограмма $\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta)$ представляет собой положительную, нормированную и однородную с порядком -1 функцию:

$$\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) \geq 0, \quad \int \mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta)\, d\varepsilon = 1, \quad \mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) = |\lambda| \mathcal{T}(\lambda\varepsilon, \lambda\mu, \lambda\eta),$$

где λ — произвольная постоянная, не равная нулю.

Связь между кватернионами и матричным представлением полупростых групп Ли исследована в работе [5].

Квантовая томография дискретных переменных. В работе [4] представлен аппарат томографии для дискретных переменных — спиновой томографии. Рассмотрим матрицу плотности ρ, заданную в следующем виде:

$$\rho = \sum_k p_k \left|\psi_k\right\rangle \left\langle\psi_k\right|, \quad \sum_k p_k = 1, \tag{4}$$

где $p_k \in [0; 1]$. Матрица плотности ρ имеет положительный спектр.

Томограмма состояния (4) задается следующей формулой:

$$\mathcal{T}(m, U) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}(+1/2, U) \\ \mathcal{T}(-1/2, U) \end{pmatrix} = (U^+ \rho U)_{mm}, \tag{5}$$

унитарная матрица U имеет вид:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \exp[i(\varphi+\psi)/2] & \sin\theta/2 \exp[i(\varphi-\psi)/2] \\ -\sin\theta/2 \exp[-i(\varphi-\psi)/2] & \sin\theta/2 \exp[-i(\varphi+\psi)/2] \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где θ, φ, ψ — углы Эйлера.

Согласно [4], можно ввести некоторый вектор

$$\vec{n} = (\sin\theta, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

и задать томограмму как функцию на поверхности сферы. Исходя из сказанного выше, томограмма $\mathcal{T}(m, U)$ может быть определена следующим образом:

$$\mathcal{T}(m, U) = \mathcal{T}(m, \vec{n}).$$

Например, пусть задана матрица плотности ρ двухкубитного состояния, тогда томограмма:

$$\mathcal{T}(m_1, m_2, \vec{N}, \vec{n}) = (U^+\rho U)_{m_1,m_2,m_3,m_4},$$

где матрица U определяется тензорным произведением унитарных матриц

$$U = U_1 \otimes U_2,$$

а матрица U_i, в свою очередь, определяется по формуле (6). Векторы $\vec{n}$ и $\vec{N}$ определяются в терминах углов Эйлера φ_1, θ_1 и φ_2, θ_2 соответственно.

Условие нормировки для томограммы $\mathcal{T}(m, U)$ можно записать в следующем виде:

$$\sum_m \mathcal{T}(m, U) = 1, \quad \int \mathcal{T}(m, U)\, dU = 1,$$

где dU — мера Хаара на унитарной группе с нормировкой $\int dU = 1$.

Кватернионы и спиновая томография. Под кватернионами, как известно, понимается система $\mathbb{H}$ гиперкомплексных чисел, образующая над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ векторное пространство $L(\mathbb{R})$, причем размерность $\dim L = 4$. Рассмотрим единичный кватернион

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}.$$

Соотношение между углами Эйлера (θ, φ, ψ) и кватернионом $\mathbf{q}$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg}_2\left(2(q_0q_1 + q_2q_3), 1 - 2(q_1^2 + q_2^2)\right) \\ \arcsin\left(2(q_0q_2 - q_1q_3)\right) \\ \operatorname{arctg}_2\left(2(q_0q_3 + q_1q_2), 1 - 2(q_2^2 + q_3^2)\right) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg}_2\{\alpha(q_0, q_1, q_2, q_3)\} \\ \arcsin\{\beta(q_0, q_1, q_2, q_3)\} \\ \operatorname{arctg}_2\{\gamma(q_0, q_1, q_2, q_3)\} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где функция $\operatorname{arctg}_2(x, y)$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{arctg}_2(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & y \geq 0,\ x < 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & y < 0,\ x < 0; \\ +\dfrac{\pi}{2}, & y > 0,\ x = 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & y < 0,\ x = 0; \\ \text{undef}, & y = x = 0. \end{cases}$$

Элементы матрицы U, определенной согласно (6), описывают поворот в трехмерном пространстве. Для этого можно использовать не углы Эйлера, а кватернионы — инструмент, применение которого [6] позволяет комбинировать вращения пространства, а также избегать трудностей, связанных с невозможностью поворота вокруг одной оси независимо от вращения вокруг других осей.

С учетом (7), справедливо следующее выражение для матричных элементов U:

$$U_{11} = \cos\left(\tfrac{\arcsin(\beta(q_0,q_1,q_2,q_3))}{2}\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{i\left(\operatorname{arctg}_2\{\alpha(q_0,q_1,q_2,q_3)\} + \operatorname{arctg}_2\{\gamma(q_0,q_1,q_2,q_3)\}\right)}{2}\right], \quad (8)$$

$$U_{12} = \sin\left(\frac{\arcsin\left(\beta(q_0,q_1,q_2,q_3)\right)}{2}\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{i\left(\operatorname{arctg}_2\{\alpha(q_0,q_1,q_2,q_3)\} - \operatorname{arctg}_2\{\gamma(q_0,q_1,q_2,q_3)\}\right)}{2}\right], \quad (9)$$

$$U_{21} = -\sin\left(\frac{\arcsin(\beta(q_0,q_1,q_2,q_3))}{2}\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{i\left(\operatorname{arctg}_2\{\gamma(q_0,q_1,q_2,q_3)\} - \operatorname{arctg}_2\{\alpha(q_0,q_1,q_2,q_3)\}\right)}{2}\right], \quad (10)$$

$$U_{22} = \sin\left(\frac{\arcsin(\beta(q_0,q_1,q_2,q_3))}{2}\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{-i\left(\operatorname{arctg}_2\{\alpha(q_0,q_1,q_2,q_3)\} - \operatorname{arctg}_2\{\gamma(q_0,q_1,q_2,q_3)\}\right)}{2}\right]. \quad (11)$$

В работе продемонстрирована возможность использования кватернионов для вычисления томограммы дискретных переменных — спиновых томограмм. Спиновые томограммы активно применяются для анализа квантовых систем, например в причинном анализе запутанных состояний.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (*проекты № 12-08-31104 мол_а*, *12-08-33112 мол_а_вед*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beck M., Smithey D. T., Raymer M. G. Experimental Determination of Quantum-phase Distributions Using Optical Homodyne Tomography // Phys. Rev. A. — № 48. — 1993. — P. 890–893.
2. Smithey D. T., Beck M., Raymer M. G., Faridani A. Measurement of the Wigner Distribution and the Density Matrix of a Light Mode Using Optical Homodyne Tomography: Application to Squeezed States and the Vacuum // Phys. Rev. Lett. — № 70. — 1993. — P. 1244–1247.
3. Федоров А. К., Юрченко С. О. Симплектические томограммы в представлении фейнмановских интегралов по траекториям // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2012. — № 2. — С. 29–37.
4. Манько В. И., Манько О. В., Сафонов С. С. Описание спиноров с помощью функций распределения вероятностей // ТМФ. — 1998. — № 2. — С. 185–198.
5. Кисиль В. В. Индуцированные представления группы $SL_2(\mathbb{R})$ и гиперкомплексные числа // Гиперкомплексные числа в геометрической физике. — 2011. — Т. 15. — № 1. — С. 38–57.
6. Шамаров Н. Н. Применение нестандартных числовых систем в математической физике // Совр. матем. Фунд. направ. — 2007. — Т. 23. — С. 182–194.

Статья поступила в редакцию 30.05.2012