

С. О. Ю р ч е н к о

**ВЛИЯНИЕ СЛАБОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ПОЛЯ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ
ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА
КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД**

Рассмотрено влияние слабого электрического поля на профиль кноуидальных и уединенных волн на поверхности неглубокой проводящей тяжелой жидкости. Найдены решения для уединенных волн. Показано, что слабое электрическое поле существенно влияет на вид солитонного решения и может привести к изменению типа уравнения, описывающего нелинейную волну.

E-mail: st.yurchenko@mail.ru

Ключевые слова: нелинейная теория, электрогидродинамика, уравнение Кортевега – де Фриза – Бенджамина – Оно, неустойчивость, конденсированные среды.

Нелинейная теория волновых движений проводящих жидкостей, находящихся в электрическом поле, развита недостаточно. Нелинейные волновые образования на заряженной поверхности жидкости наблюдались экспериментально [1]. Вместе с тем результаты нелинейной теории, получаемые разными авторами, часто противоречат друг другу, например в работах [1–8] спектры линейных волн зачастую не совпадают с известными предельными случаями. В работах [1–4] нелинейные возмущения поверхности жидкости описываются уравнениями в частных производных, т. е. модели динамики локальны. Напротив, в работах [5–8] эволюция электрогидродинамических возмущений поверхности описывается интегрально-дифференциальными уравнениями, таким образом, нелокальными моделями динамики. По-видимому, главная причина указанных противоречий состоит в ошибках (в том числе методических) при выводе уравнений.

В [9] предложен способ вывода нелинейных эволюционных уравнений для возмущений заряженной поверхности тяжелой проводящей жидкости в электрическом поле. При этом оказалось, что в квадратичном приближении дисперсионные эффекты полностью определяются решением линейной задачи. В работе рассмотрено также влияние электрического поля только на синусоидальные волны и солитон Кортевега – де Фриза. Настоящая работа посвящена вопросам действия электрического поля на другие нелинейные стационарные волны.

Постановка задачи. Рассмотрим нелинейные возмущения поверхности горизонтального слоя жидкости в ортогональном к невозмущенной поверхности электрическом поле и поле сил тяжести

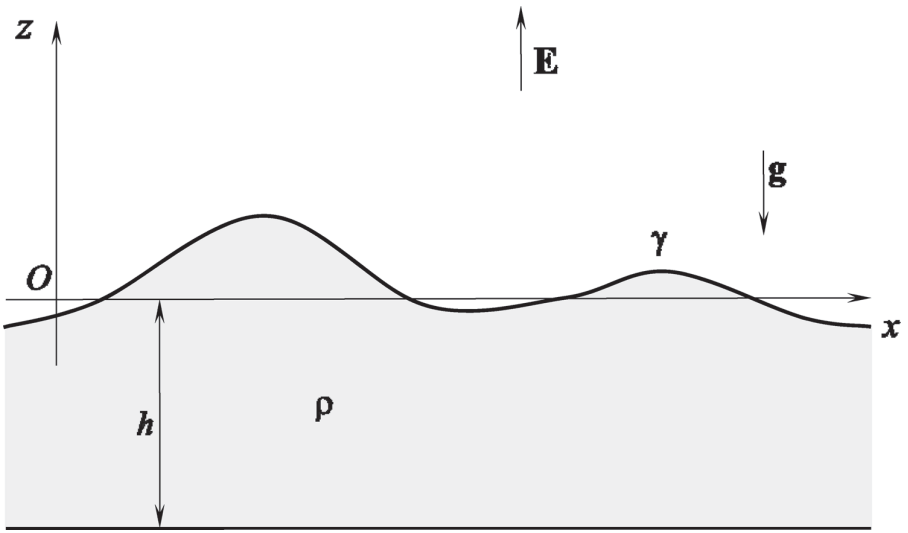


Рис. 1. К постановке задачи

(рис. 1); полупространство над жидкостью – вакуум. Жидкость предполагается несжимаемой, невязкой, идеально проводящей электрический ток, а движение жидкости – потенциально и в безразмерном виде описывается следующими уравнениями и граничными условиями:

$$z > \varepsilon\check{\zeta}: \quad \varphi_{zz} + \mu^2 \Delta_1 \varphi = 0;$$

$$\varepsilon\check{\zeta} \geq z \geq -1: \quad \psi_{zz} + \mu^2 \Delta_1 \psi = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \varphi_z = -1, \quad \nabla_1 \varphi = 0;$$

$$z = -1: \quad \psi_z = 0;$$

$$z = \varepsilon\check{\zeta}: \quad \varphi = 0;$$

$$\varepsilon\check{\zeta}_t - \mu^{-2} \psi_z + \varepsilon \nabla_1 \check{\zeta} \nabla_1 \psi = 0;$$

$$\psi_t + \frac{1}{2} \left(\mu^{-2} \psi_z^2 + |\nabla_1 \psi|^2 \right) + \xi - \frac{\gamma}{\rho g h^2} \frac{\varepsilon \mu^2 \Delta_1 \xi}{\left(1 + \varepsilon^2 \mu^2 |\nabla_1 \xi|^2 \right)^{3/2}} -$$

$$- \frac{E^2}{8\pi\rho g h} \left(\varphi_z^2 + \mu^2 |\nabla_1 \varphi|^2 \right) = \frac{p_0}{\rho g h},$$

где введены малые параметры задачи $\varepsilon = a/h$, $\mu = h/\lambda$. Здесь $\check{\zeta}$ – возмущение поверхности по вертикали от плоского уровня; h – толщина невозмущенного слоя; ρ – плотность жидкости; E – модуль напряженности невозмущенного электрического поля;

g – ускорение свободного падения; ψ, φ – потенциалы скорости и электрического поля; p_0 – статическое давление на поверхности жидкости в отсутствие волнового возмущения; γ – коэффициент поверхностного натяжения; ∇_1, Δ_1 – двумерные операторы Гамильтона и Лапласа, действующие в плоскости xy ; t, z – индексы, обозначающие частное дифференцирование по соответствующим переменным. Для приведения к безразмерному виду выбраны следующие единицы измерения:

$$[t] = \lambda/c_0, \quad [\psi] = \lambda c_0, \quad [\varphi] = Eh,$$

$$[\xi] = a, [z] = h, [x] = [y] = \lambda,$$

где a – амплитуда возмущения ξ ; λ – характерный горизонтальный размер возмущения; $c_0 = \sqrt{gh}$ – скорость длинных гравитационных волн малой амплитуды.

Вывод квадратично-нелинейных по амплитуде уравнений, описывающих распространение поверхностных волн в исследуемой системе проводится при помощи разложения величин φ, ψ в ряд по степеням параметра ε [9]. В приближении Буссинеска учитываются влияние квадратичной нелинейности и кубической дисперсии. Тогда электрическое поле влияет на дисперсионные компоненты, но не на слагаемые, не линейные по амплитуде. Эволюционное уравнение для волны, распространяющейся в положительном направлении [9], имеет вид

$$u_t + \left(\frac{3}{2}u + c_0\right)u_x + \beta u_{xxx} - \frac{\alpha}{\pi}L[u_x] = 0;$$

$$\alpha = \frac{2\pi\sigma^2 c_0}{\rho g}, \quad \beta = \frac{c_0}{6} \left(h^2 - \frac{3\gamma}{\rho g} + \frac{12\pi^2\sigma^4}{\rho^2 g^2} \right);$$

$$L[u(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |k| \int_{-\infty}^{\infty} u(x', t) \exp[ik(x - x')] dx' dk. \quad (1)$$

Таким образом, видно, что возмущения в исследуемой системе описываются нелокальными уравнениями. Причиной нелокальности служит электрическое поле: движение жидкости в каждой точке поверхности определяется результирующим полем, в которое вносят вклад точки всей заряженной поверхности.

Вырождение эволюционного уравнения. Нелинейное эволюционное уравнение (1) может быть преобразовано к более удобному для анализа виду. Для этого стоит отметить связь между линейным оператором $L[u]$ и оператором Гильберта $H[u]$, представленную в работе [10]:

$$L[u] = -2\pi H \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad H[u] = \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x', t) dx'}{x - x'},$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Тогда уравнение эволюции примет вид уравнения Кортевега – де Фриза – Бенджамина – Оно:

$$u_t + \left(c_0 + \frac{3}{2}u \right) u_x + \beta u_{xxx} + \alpha H[u_{xx}] = 0. \quad (2)$$

В приближении квадратичной дисперсии $\beta = 0$ уравнение (2) вырождается в уравнение Бенджамина – Оно [11]:

$$u_t + \left(c_0 + \frac{3}{2}u \right) u_x + \alpha H[u_{xx}] = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) впервые было выведено в приложении к эволюции волн на границе раздела двух глубоких жидкостей. Таким образом, прослеживается аналогия между влиянием поверхностного заряда и верхнего слоя жидкости в аналогичной системе (две несмешивающиеся жидкости в поле сил тяжести). Физически такая аналогия связана, прежде всего, со спектрами линейных волн. В случае заряженной поверхности одной жидкости и двух несмешивающихся тяжелых жидкостей конечной толщины в дисперсионной зависимости $\omega(k)$ появляется квадратичное слагаемое по волновому числу k . В силу пространственной изотропии задачи, квадратичное слагаемое приходится писать в виде $k|k|$, откуда при обратном преобразовании Фурье появляется оператор Гильберта.

Уравнение Бенджамина – Оно (3) имеет точное решение в виде стационарной уединенной волны [11]. После перехода к бегущей переменной $z = x - c_0 t + Vt$ и однократного интегрирования уравнение (3) принимает вид

$$\alpha H[u_z] + \frac{3}{4}u^2 + Vu + A = 0.$$

При условии $A = 0$ (для уединенной волны) и с учетом особенностей преобразования Гильберта находим решение в виде «рационального» солитона:

$$u = \frac{4a}{4 + \alpha a^2 z^2}, \quad V = \frac{2a}{3\alpha}, \quad (4)$$

где a – амплитуда нелинейной волны.

Как и ожидалось, скорость движения солитона увеличивается с ростом амплитуды. На больших расстояниях возмущение убывает как

$$u \sim 1/z^2,$$

т. е. намного медленнее, чем в случае солитонного решения уравнения Кортевега – де Фриза [11], для которого справедлива асимптотика

$$u \sim \exp(-z).$$

Последнее означает, что уединенная нелинейная волна с квадратичным спектром менее локализована в пространстве, чем в случае кубической дисперсии. Зависимость скорости солитонов, однако, линейна по амплитуде, что связано с квадратичным порядком нелинейности эволюционного уравнения.

Существование солитона при отсутствии верхней жидкости обусловлено взаимодействием электрических и капиллярных эффектов. Солитонные решения, соответствующие полному кубическому спектру, являются электрокапиллярными, поэтому солитон вида (4) можно считать вырожденным электрокапиллярным. Значение параметра электрического поля α определяется, исходя из необходимого условия вырождения кубического спектра $\beta = 0$, а потому зависит от параметров, характеризующих систему:

$$\alpha = c_0 \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g} - \frac{h^2}{3}}.$$

Асимптотическое разложение Пуанкаре для периодических волн. Вернемся к нелинейному эволюционному уравнению (2). Обратимся к бегущей переменной $z = x - (c_0 + V)t$, однократное интегрирование приводит к уравнению стационарных волн

$$\beta u'' + \frac{3}{4}u^2 - Vu + A + \alpha H[u'] = 0. \quad (5)$$

В результате перехода к безразмерным переменным $z \rightarrow z\sqrt{\beta/V}$, $u \rightarrow 2Vu$, $\alpha/\sqrt{\beta V} \rightarrow \alpha$, уравнение (5) приобретает вид

$$u'' + \frac{3}{2}u^2 - u + A + \alpha H[u'] = 0. \quad (6)$$

При $A \neq 0$, $\alpha = 0$ решения уравнения (6) – кноидальные волны, выражающиеся в эллиптических функциях Якоби. Вопрос о решениях уравнения (6) при произвольных α в настоящее время остается открытым, хотя уравнение типа Кортевега – де Фриза – Бенджамина – Оно уже было получено в работах [6, 9].

При малых α обнаруживается интересная внутренняя структура исходного уравнения (5). Так, в случае слабого электрического поля $\alpha \ll 1$ и решение (6) ищут в виде асимптотического ряда:

$$u(z) = \psi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \psi_n(z). \quad (7)$$

Подстановка решения вида (7) в уравнение (6) приводит к бесконечной системе неоднородных уравнений Шрёдингера:

$$\begin{aligned} \psi_0'' + \frac{3}{2} \psi_0^2 - \psi_0 + A &= 0; \\ \psi_n'' + (3\psi_0 - 1)\psi_n &= -G_n(z), \quad n \geq 1; \\ G_1(z) &= \text{H}[\psi_0'], \quad G_n(z) = \text{H}[\psi_{n-1}'] + \sum_{k=1}^{n-1} \psi_k \psi_{n-k}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Каждое уравнение Шрёдингера можно проинтегрировать, откуда для искомым функций $\psi_n(z)$ находим

$$\psi_n(z) = \psi_0' \int \left(\int \psi_0' G_n(z) dz \right) (\psi_0')^{-2} dz. \quad (9)$$

Периоды функций ψ_0' и $G_n(z)$ являются кратными, откуда при повторном интегрировании возникают секулярные слагаемые. Все решения (9) становятся неустойчивыми при $z \rightarrow \infty$.

Солитонное решение получается, как видно, путем подстановки в (8) и (9) невозмущенного профиля $\psi_0 \sim \text{sech}^2(z/2)$. При этом решение (9) сходится: ψ_0' при больших z ведет себя как $\exp[-z]$, а интеграл расходится $\sim z$. Таким образом, при $z \rightarrow \infty$ возмущение солитонного решения ведет себя $\sim z \exp[-z]$, а множители слагаемых $\sim \alpha^n$ в случае солитонного решения – сходятся как $z^n \exp[-z]$. В случае периодического решения ψ_0 при $z \rightarrow \infty$ интегралы становятся осциллирующими, а по модулю расходятся $\sim z$.

Вблизи нуля ряд (7) с членами (9) представляет собой асимптотическое разложение Пуанкаре и может использоваться для оценок возмущений, вызываемых полем в точках вблизи вершин профиля нелинейной волны.

Кноидальные волны в слабом электрическом поле. Разложение (7) неприменимо для анализа профиля нелинейных волн в электрических полях из-за расходимости интегралов (9). Как известно, устранить секулярные слагаемые можно интегрированием уравнений стационарных волн при помощи метода Линдштедта – Пуанкаре, разлагая в ряд по α возмущение и вводя поправку на горизонтальный масштаб возмущения:

$$z = z' \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \omega_n, \quad u(z) = \psi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \psi_n(z). \quad (10)$$

Подстановка решения (10) в (6) приводит к уравнениям

$$\psi_0'' + \frac{3}{2}\psi_0'^2 - \psi_0 + A = 0, \quad \psi_n'' - \frac{\psi_0'''}{\psi_0'}\psi_n = -G_n(z), \quad (11)$$

где возмущающие функции в правой части теперь определяются сложнее, чем (8). Например, первая и вторая поправка имеют вид

$$G_1(z) = H[\psi_0'] - 2\omega_1 \frac{\psi_0'''}{\psi_0'},$$

$$G_2(z) = -(\omega_1^2 + 2\omega_2)\psi_0'' - 2\omega_1 \frac{\psi_0'''}{\psi_0'}\psi_0' + \frac{3}{2}\psi_0'^2 + H[\omega_1\psi_0' + \psi_0''].$$

Коэффициенты разложения ω_n подбираются таким образом, чтобы скомпенсировать секулярные слагаемые. Решение по-прежнему определяется формулами (9) с новыми выражениями для G_n .

Невозмущенное уравнение Кортевега – де Фриза можно представить [12] как

$$u_0 = \frac{2a}{s^2} \operatorname{dn}^2\left(\frac{\sqrt{2a}}{2s}z, s\right) + b_3, \quad a = \frac{b_1 - b_2}{2}, \quad s = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3}},$$

где b_1, b_2, b_3 – действительные корни кубического уравнения

$$u_0^3 - u_0^2 + Au_0 + B = 0$$

в порядке убывания, s – модуль эллиптической функции Якоби $\operatorname{dn}(z, s)$, a – амплитуда нелинейной волны. Для расчетов оказывается удобным использовать известное тригонометрическое разложение эллиптической функции Якоби [13]:

$$\operatorname{dn}(z, s) = \frac{\pi}{2K(s)} + \frac{2\pi}{K(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos\left(\frac{\pi n z}{K(s)}\right), \quad (12)$$

$$q = \exp(-\pi K(s')/K(s)), \quad s' = \sqrt{1-s^2},$$

где $K(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода; s' – сопряженный модуль. Модуль s , как известно, может служить мерой нелинейности волны: предел $s \ll 1$ соответствует тригонометрическим функциям, а $s \rightarrow 1$ – гиперболическим функциям. Использование разложения (12) позволяет находить преобразование Гильберта $H[u_0']$ с любой наперед заданной точностью в виде тригонометрического ряда [12].

Для кноидальной волны справедливо приближенное разложение

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}[z, s] &\approx 1 - 8q \sin^2 \left[\frac{\pi z}{2K} \right], \quad q \ll 1; \\ \psi_0(z) &= a \operatorname{dn}^2[z, s]. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение представляется в следующем виде:

$$\psi_1(z) = \psi'_0 \int \left(\int \psi'_0 G_1(z) dz + A \right) (\psi'_0)^{-2} dz, \quad (14)$$

где константа A определяется из условия $\psi'|_{z=K} = 0$:

$$\begin{aligned} A &= -\lim_{z \rightarrow K} \frac{\psi_0'' w_1 + w_2}{\psi_0'' w_1 + 1}, \\ w_1(z) &= \psi'_0 \int \left(\int \psi'_0 G_1(z) dz \right) (\psi'_0)^{-2} dz, \quad w_2(z) = \psi'_0 \int (\psi'_0)^{-2} dz. \end{aligned}$$

Вычисления с учетом (13) приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= B \tilde{\psi}_1 = \\ &= -B \left[(1 - 8q - 16q^2) \cos \left[\frac{\pi \tau}{K} \right] - 2q(1 - 4q) \left(3 - \cos \left[\frac{2\pi \tau}{K} \right] \right) \right], \\ z &= \tau \left(1 + \alpha \omega_1 + O(\alpha^2) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Найденные константы равны:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{K}{8\pi}, \quad A = \frac{\pi(1 - 16q + 96q^2 - 256q^3 + 352q^4)}{3K}, \\ B &= \frac{Ka(1 - 4q)}{24\pi q}. \end{aligned}$$

Функция $\psi_1(\tau)$ для кноидальных волн с различными модулями s представлена на рис. 2.

В пределе слабонелинейных волн $s \rightarrow 0$ амплитудный коэффициент решения (15) стремится к бесконечности. Последнее означает, что даже слабое электрическое поле оказывает существенное влияние на синусоидальные волны, что полностью согласуется с выводами [9].

Пространственный эффект влияния слабого электрического поля состоит в «расплывании» возмущений по горизонтали и связан с тем, что $\omega_1 > 0$. Длина кноидальной волны в слабом электрическом поле

$$\lambda = 2sK(s) \sqrt{\frac{2\beta}{aV} \left(1 + \frac{\alpha K(s)}{8\pi \sqrt{\beta V}} \right)}.$$

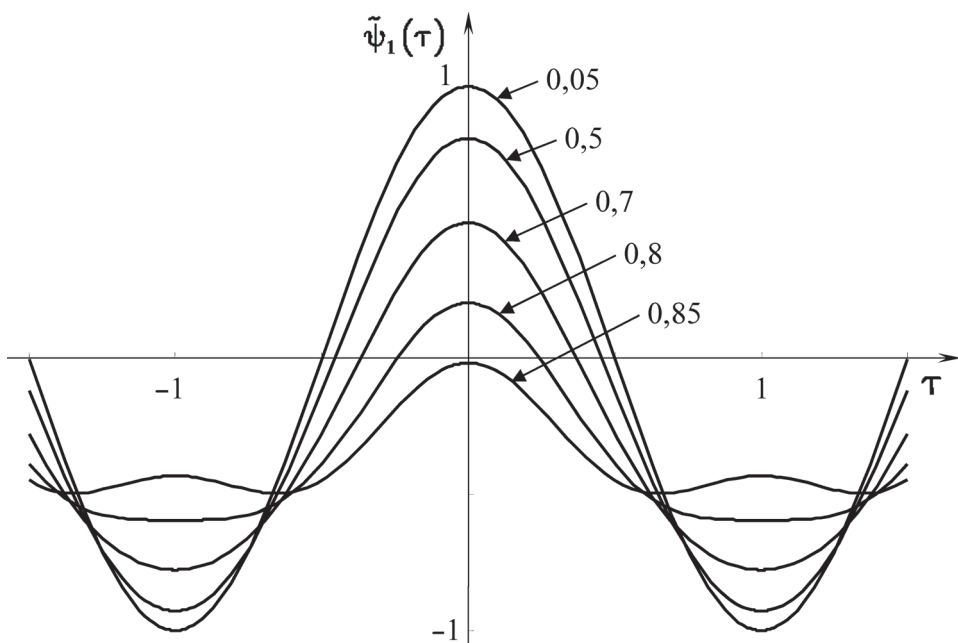


Рис. 2. Вид функций $\tilde{\psi}_1(\tau)$ при различных значениях модуля s (цифры у кривых)

Возмущенное решение определяется выражением

$$\begin{aligned}
 u(\tau) &= \psi_0(\tau) + \alpha\tilde{\psi}_1(\tau) + O(\alpha^2) \approx \\
 &\approx a(\operatorname{dn}^2[\tau, s] + \varepsilon\tilde{\psi}_1(\tau)) = a\tilde{u}(\tau), \\
 \varepsilon &= \frac{\alpha K(1-4q)}{24\pi q\sqrt{\beta V}}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Выражение (16) для $\tilde{u}(\tau)$ справедливо при $\beta > 0$, если $\beta < 0$, из исходного уравнения (5) получаем

$$\tilde{u}(\tau) = -\operatorname{dn}^2[\tau, s] + \varepsilon\tilde{\psi}_1(\tau). \tag{17}$$

На рис. 3–6 приведены профили нелинейных волн с различными модулями и возмущениями, рассчитанными согласно (16) и (17). Видно, что электрическое поле приводит к заострению профиля нелинейной волны в случае $\beta > 0$. Нелинейная волна с модулем $s = 0,8$ (см. рис. 6) подвергается такому влиянию несколько меньше, чем волна с модулем $s = 0,5$ (см. рис. 3).

В случае $\beta < 0$ слабое электрическое поле, наоборот, оказывает сглаживающее воздействие на нелинейные волны. Так, на рис. 5 отчетливо видно, что при $s = 0,5$ с увеличением параметра ε меняется амплитуда нелинейной волны, после чего на месте минимумов

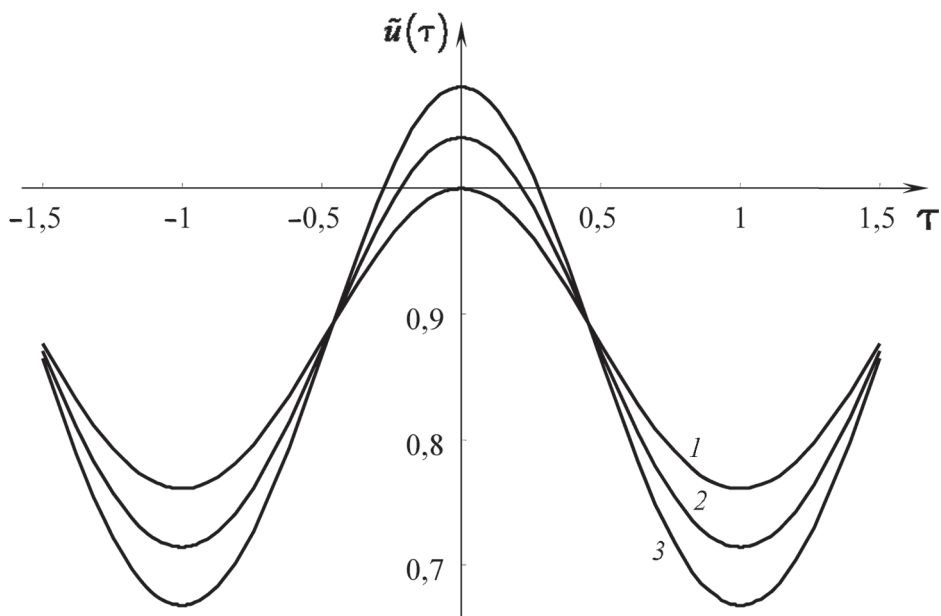


Рис. 3. Профили волн с модулем $s = 0,5$ представлены кривыми (1–3) с соответствующими значениями параметра $\varepsilon = 0; 0,05; 0,1$ ($\beta > 0$)

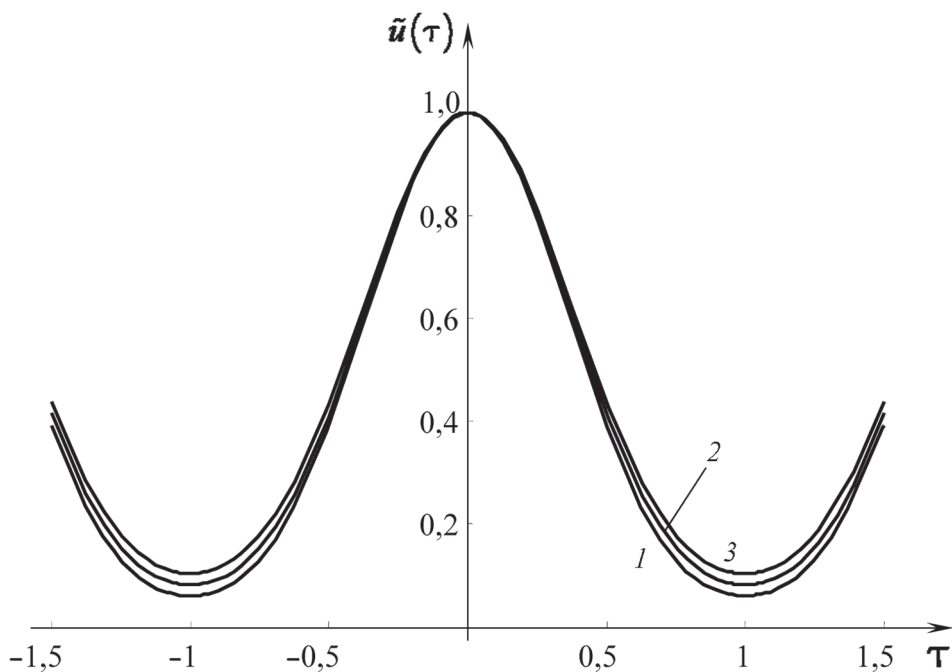


Рис. 4. Профили волн с модулем $s = 0,85$ представлены кривыми (1–3) с соответствующими значениями параметра $\varepsilon = 0; 0,05; 0,1$ ($\beta > 0$)

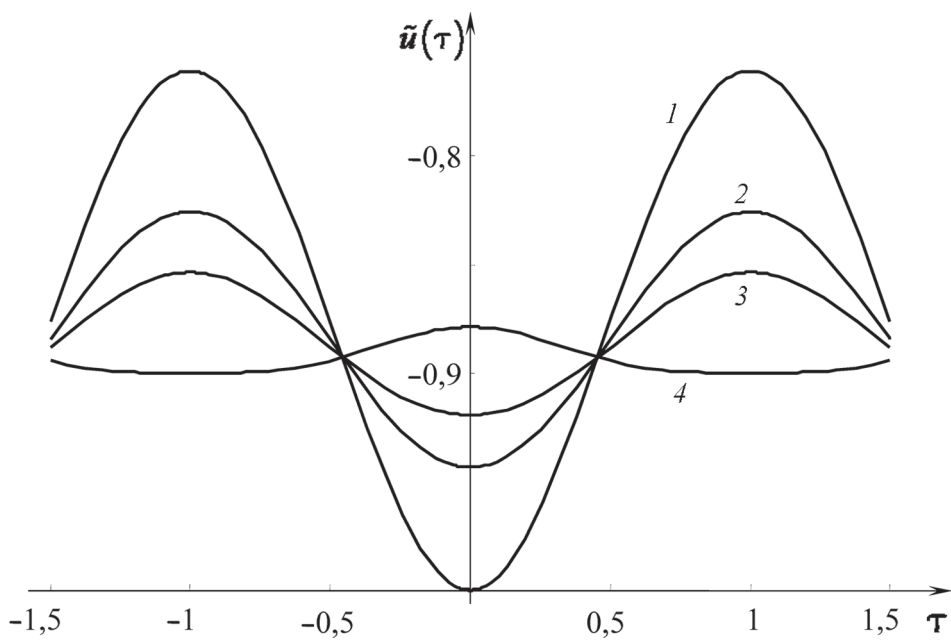


Рис. 5. Профили волн с модулем $s = 0,5$ представлены кривыми (1–4) с соответствующими значениями параметра $\varepsilon = 0; 0,07; 0,1; 0,15$ ($\beta < 0$)

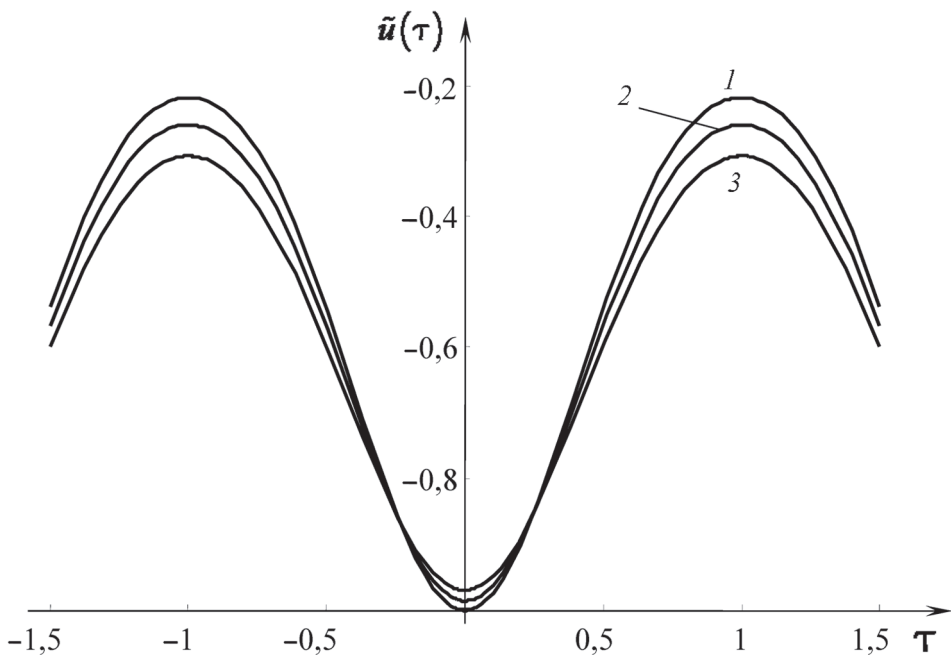


Рис. 6. Профили волн с модулем $s = 0,8$ представлены кривыми (1–3) с соответствующими значениями параметра $\varepsilon = 0; 0,07; 0,15$ ($\beta < 0$)

исходного профиля может появиться максимум возмущенного профиля. Нелинейные волны с модулем $s = 0,8$ менее подвержены влиянию электрического поля, но характер влияния поля остается прежним – профиль волны сглаживается.

Здесь еще следует отметить, что кривая на рис. 2, отвечающая возмущению волны с модулем $s = 0,85$, напоминает форму возмущения, найденную для солитонного решения [9], которому отвечает предел $s \rightarrow 1$. Решение (9) совпадает с возмущенным решением для солитона Кортевега – де Фриза в указанном предельном случае, так как является более общим.

Выводы. Показано, что электрическое поле существенно влияет на вид нелинейных стационарных волн. При разложении по параметру электрического поля поиск профиля стационарной волны сводится к решению уравнений Кортевега – де Фриза и Шрёдингера.

Разложение стационарных решений эволюционного уравнения в ряд по параметру поля α представляет собой асимптотическое разложение Пуанкаре. Выведенное разложение расходится на удаленном расстоянии от начала координат, но позволяет оценить характер влияния электрического поля с наперед заданной степенью точности. Для кноидальных волн показано, что электрическое поле приводит к сглаживанию нелинейной волны. Особенно чувствительны к действию слабого электрического поля слабонелинейные волны.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-08-31104 мол_a, 12-08-33112 мол_a_вед).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ж а к и н А. И. Нелинейные волны на поверхности заряженной жидкости. Неустойчивость, ветвление и нелинейные равновесные формы заряженной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1984. – № 3. – С. 94–102.
2. E a s w a r a n C. Solitary waves on a conducting fluid layer // Phys. Fluids. – 1988. – Vol. 31. – № 11. – P. 3442, 3443.
3. G o n z a l e s A., C a s t e l l a n o s A. Kortweg-de Vries-Burgers equation for surface waves in nonideal conducting liquids // Phys. Rev. E. – 1994. – Vol. 49. – № 4. – P. 2935–2940.
4. G o n z a l e s A., C a s t e l l a n o s A. Nonlinear electrohydrodynamic waves on films falling down an inclined plane // Phys. Rev. E. – 1996. – Vol. 53. – № 4. – P. 3573–3578.
5. T i l l e y B., P e t r o p o u l o s P., P a p a g e o r g i o u D. Dynamics and rupture of planar electrified liquid sheets // Phys. Fluids. – 2001. – Vol. 13. – № 12. – P. 3547–3563.
6. A new application of the Korteweg-de Vries Benjamin-Ono equation in interfacial electrohydrodynamics / H. Gleeson, P. Hammerton, D. Papageorgiou et al. // Phys. Fluids. – 2007. – Vol. 19. – № 3. – 031703. – P. 3.

7. Effect of an electric field on film flow down a corrugated wall at zero Reynolds number / D. Tseluiko, M. Blyth, D. Papageorgiou et al. // *Phys. of Fluids*. – 2008. – Vol. 20. – № 4. – 042103, 19 p.
8. El-Sayed M. Nonlinear analysis and solitary waves for two superposed streaming electrified fluids of uniform depths with rigid boundaries // *Arch. Appl. Mech.* – 2008. – № 78. – P. 663–685.
9. Алиев И. Н., Юрченко С. О. О нелинейных волнах, распространяющихся на поверхности идеальной проводящей жидкости в электрическом поле // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2009. – № 5. – С. 139–150.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: В 3-х т. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. – М.: Наука. – 1970. – Т. 2. – 328 с.
11. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи: пер. с англ. – М.: Мир. – 1987. – 479 с.
12. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Наука. – 1973. – 175 с.
13. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Э. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). – М.: Наука. – 1964. – 344 с.

Статья поступила в редакцию 30.05.2012