УДК 519.62

А. Н. Морозов, А. В. Скрипкин

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СРЕДАХ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

Рассмотрен процесс теплопроводности в пространстве вне сферической микрочастицы и микронити. Показано, что параметры, характеризующие изменения температуры и теплового потока представляют собой немарковские процессы в том случае, если имеют место флуктуации соответствующих величин. Найдены статистические характеристики указанных флуктуаций, в том числе характеристические функции и спектральные плотности.

E-mail: amor@mx.bmstu.ru, skripkin@bmstu.ru

Ключевые слова: *теплопроводность, микрочастица, микротрубка, статистические характеристики.*

При изучении явлений теплопроводности в средах с микроструктурой часто приходится принимать во внимание случайные изменения физических величин (например, температуры на поверхности частицы или теплового потока), которые могут быть вызваны флуктуациями мощности тепловых источников, термодинамических потоков, коэффициентов теплопроводности и т. д. Описание процесса распространения тепла в этом случае обычно производят с помощью стохастических дифференциальных уравнений теплопроводности с определенными начальными и граничными условиями. Случайные процессы, описываемые такими уравнениями, имеют характер марковских, а для получения статистических характеристик флуктуаций физических величин может быть использована достаточно разработанная теория стохастических дифференциальных систем [1].

Однако такая модель случайных процессов часто является приближенной, т. е. она не учитывает, например, так называемые наследственные свойства реальных физических сред. Так, как было показано в работах [2, 3], более точное описание процессов броуновского движения, учитывающее увлечение броуновской частицей окружающих ее частиц вязкой среды или флуктуации кинетического коэффициента трения, приводит к немарковскому характеру флуктуаций импульса броуновской частицы.

В данной работе показано, что изучение явлений теплопроводности в средах с микроструктурой, содержащей микрочастицы и тонкие цилиндрические тела (микронити) требует применения стохастических интегральных уравнений, а флуктуации рассматриваемых физических величин в общем случае также будут являться немарковскими случайными процессами.

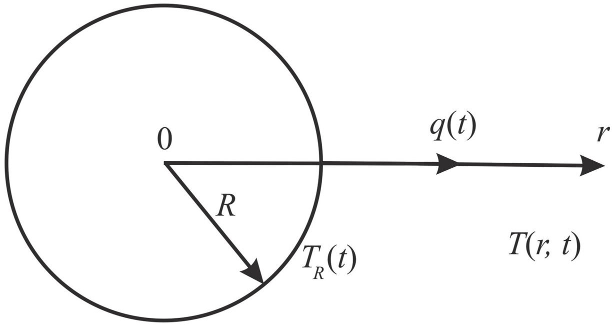

Рис. 1. Теплопроводность в среде вокруг сферической частицы

Постановка задачи (случай микрочастицы). Рассмотрим неподвижную сферическую частицу с радиусом R, температуропроводностью $\chi_м$ и объемной теплоемкостью c_V, в центр которой поместим начало сферической системы координат (рис. 1). Температуру поверхности частицы будем считать некоторой функцией времени $T_R(t)$. Среду вне сферической частицы (при $r > R$) считаем однородной с постоянными параметрами: плотностью ρ, теплопроводностью κ и температуропроводностью χ, причем $\chi << \chi_м$. Начальная температура во всем пространстве равна некоторой постоянной величине T_0. Изменением радиуса сферической частицы вследствие изменения температуры пренебрегаем. Ясно, что в рассматриваемом случае температура среды будет зависеть только от расстояния до центра сферы r и времени t. Уравнение теплопроводности тогда примет вид

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{\chi}{r}\frac{\partial^2 (rT(r,t))}{\partial r^2}, \quad (r > R) \tag{1}$$

с соответствующими граничным и начальным условиями

$$T(r,t)\big|_{r=R} = T_R(t), \tag{2}$$

$$T(r,t)\big|_{t=0} = T_0. \tag{3}$$

Для потока тепла $q_T(t)$ через поверхность сферической оболочки радиуса R справедливо общее соотношение

$$q_T(t) = -\kappa \left.\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R}. \tag{4}$$

Однако тот же поток $q_T(t)$ при учете его флуктуаций через поверхность оболочки радиуса R может быть определен с помощью выражения

$$q_T(t) = -\frac{c_V R}{3}\frac{dT_R(t)}{dt} + \xi_{q_T}(t), \tag{5}$$

где $\xi_{q_T}(t)$ – случайный тепловой поток (источник Ланжевена), свойства которого зависят от характера источника флуктуаций, причем $\langle \xi_{q_T}(t) \rangle = 0$. Отметим, что соотношение (5) справедливо для случая предполагаемой нами высокой тепловой проводимости частицы.

Во многих случаях можно считать, что поток $\xi_{q_T}(t)$ представляет собой белый шум с интенсивностью ν. Граничную частоту $\omega_{\text{гр}}$ такого шума можно оценить с помощью характеризующих задачу параметров: радиуса частицы R и коэффициента температуропроводности материала частицы $\chi_{\text{м}}$, согласно

$$\omega_{\text{гр}} \sim \frac{\chi_{\text{м}}}{R^2}. \tag{6}$$

Для медной частицы с коэффициентом температуропроводности $\chi_{\text{м}} = 10^{-4}$ м^2/с и радиусом 10 мкм для величины $\omega_{\text{гр}}$ получим значение порядка 10^6 с$^{-1}$.

Величину интенсивности ν случайного теплового потока можно оценить по формуле

$$\nu \sim \frac{\kappa}{R^3} k_B T^2, \tag{7}$$

где k_B – постоянная Больцмана. Для рассматриваемой выше частицы, помещенной в воду, получим оценку $\nu \sim 10^{-3}$ Дж^2/м^{4}с.

Стохастическое интегральное уравнение. Решение поставленной задачи (1) – (3) будем искать с помощью введения вспомогательной функции $f(r, t)$, определяемой согласно

$$f(r, t) = rT(r, t). \tag{8}$$

В этом случае уравнения (1) – (3) запишем в виде

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial r^2} \quad (r > R), \tag{9}$$

$$f(r,t)\big|_{r=R} = RT_R(t), \tag{10}$$

$$f(r,t)\big|_{t=0} = T_0 r. \tag{11}$$

Последние выражения формально соответствуют одномерному уравнению теплопроводности для величины $f(r, t)$. Решение подобного рода задач представляет собой, как известно [4], сумму двух слагаемых. Первое слагаемое связано с наличием первоначального распределения температуры (и не зависит от соответствующих изменений температуры на границах), второе – обязано присутствием граничных функций температур или потоков. Из физических соображений ясно, что в рассматриваемой задаче, ввиду наличия термодинамического равновесия в начальный момент времени, неслучайная составляющая потока тепла через границу среды, вызванная начальным распределением температуры, будет иметь нулевое значение. Имея это в виду, решение задачи (9) – (11) запишем с помощью выражения

$$f(r,t)=\frac{R}{2\sqrt{\pi\chi}}\int_0^t\frac{r-R}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}\right]T_R(\tau)d\tau. \qquad (12)$$

Для получения уравнения, определяющего величину теплового потока $q_T(t)$, воспользуемся соотношением, следующим из (4) и (8):

$$\left.\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{R}{\kappa}q_T(t)+T_R(t), \qquad (13)$$

где производную $\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}$ определим из формулы (12). Получим

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}=\frac{R}{2\sqrt{\pi\chi}}\int_0^t\left[\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}-\frac{2(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)^{5/2}}\right]\exp\left[-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}\right]T_R(\tau)d\tau. \qquad (14)$$

Интегрирование по частям позволяет записать последнее выражение в виде

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}=-\frac{R}{\sqrt{\pi\chi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left[-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}\right]\frac{dT_R(\tau)}{d\tau}d\tau. \qquad (15)$$

Нахождение из формулы (15) величины $\left.\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R}$ и ее подстановка в (13) приводит к следующему соотношению:

$$q_T(t)=\frac{\kappa}{\sqrt{\pi\chi}}\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}+\frac{\sqrt{\pi\chi}}{R}\right)\frac{dT_R(\tau)}{d\tau}d\tau. \qquad (16)$$

Введем замены

$$Z(t)=\frac{dT_R(t)}{dt},\quad \tilde{\xi}_{q_T}=\frac{3}{c_V R}\xi_{q_T} \qquad (17)$$

и воспользуемся выражением (5), получим искомое соотношение, связывающее случайный тепловой поток $\xi_{q_T}(t)$ через границу сферической оболочки и производную температуры $T_R(t)$ на поверхности по времени, имеющее вид интегрального уравнения Вольтерры второго рода:

$$Z(t)+\frac{3\kappa}{c_V R\sqrt{\pi\chi}}\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}+\frac{\sqrt{\pi\chi}}{R}\right)Z(\tau)d\tau=\tilde{\xi}_{q_T}(t). \qquad (18)$$

Полученное уравнение (18), ядро которого представляет собой сумму слагаемого абелевого типа и постоянной величины, не может быть сведено к конечной системе стохастических дифференциальных уравнений [5]. Таким образом, случайные процессы $Z(t)$ и $q_T(t)$, а также флуктуации температуры $T_R(t)$, представляющей собой интеграл по времени от функции $Z(t)$, являются немарковскими [6].

Отметим, что уравнение, аналогичное (18), получено при описании броуновского движения сферической частицы в вязкой среде при учете увлечения ею окружающих частиц среды [2].

Заметим также, что выражение (18) справедливо при описании одномерного процесса теплопроводности в полупространстве над поверхностью плоского слоя конечной толщины. Действительно, рассмотрим сферическую оболочку радиуса R и толщины h, такой, что $h << R$. Теплоемкость C такой оболочки определяется равенством $C = c_V 4\pi R^2 h$. Вводя величину $c_S=\frac{C}{4\pi R^2}=c_V h$, представляющую теплоемкость оболочки, отнесенную к единице площади ее поверхности, вместо формулы (5) получим равенство $q_T(t)=-\frac{c_V 4\pi R^2 h}{4\pi R^2}\frac{dT_R(t)}{dt}+$ $+\xi_{q_T}(t)=-c_S\frac{dT_R(t)}{dt}+\xi_{q_T}(t)$. Тогда для интегрального стохастического уравнения, описывающего процесс распространения тепла в среде, ограниченной бесконечным плоским слоем, вместо соотношения (18) получим выражение

$$Z(t)+\frac{\kappa}{c_S\sqrt{\pi\chi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}Z(\tau)d\tau=\tilde{\xi}_{q_T}(t), \qquad (19)$$

где c_S – теплоемкость единицы площади рассматриваемого плоского слоя.

Общий вид решения (18) можно представить с помощью интегрального оператора

$$Z(t)=\tilde{\xi}_{q_T}(t)+\int_0^t K(t-\tau)\,\tilde{\xi}_{q_T}(\tau)d\tau, \qquad (20)$$

где $K(t-\tau)$ – резольвента для уравнения (18), которая может быть записана с помощью бесконечного ряда [7]:

$$K(t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t-\tau), \tag{21}$$

в котором

$$u_{n+1}(t-\tau)=-\int_{\tau}^{t}u_1(t-s)u_n(s-\tau)\,ds, \tag{22}$$

$$u_1(t-\tau)=\frac{3\kappa}{c_V R\sqrt{\pi\chi}}\left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}+\frac{\sqrt{\pi\chi}}{R}\right). \tag{23}$$

Расчет по формуле (22) показывает, что для не слишком больших значений $t-\tau$ ряд (21) с достаточной точностью может быть определен с помощью суммы первых его членов. На рис. 2 изображен график функции $K(t-\tau)$, для случая, когда сохранены первые десять слагаемых (все постоянные приняты за единицу). Хорошо видно, что график убывает с ростом параметра $t-\tau$. Аппроксимируя его степенной функцией, получим в приближении зависимость

$$K(t-\tau)=0{,}61(t-\tau)^{-0{,}57}. \tag{24}$$

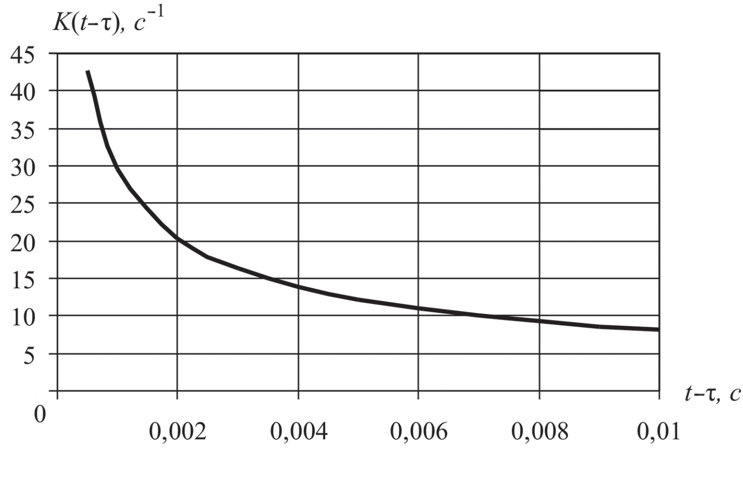

Рис. 2. Схематический вид функции K($t-\tau$)

В частном случае теплопроводности над плоскостью (при $R=\infty$) ряд (21) принимает такой вид [8]:

$$K(t-\tau)=\frac{1}{t-\tau}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\alpha_n(t-\tau)^{n/2}, \tag{25}$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\Gamma(n/2)}\left(\frac{3\kappa}{c_V R\sqrt{\chi}}\right)^n. \qquad (26)$$

В последнем выражении $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Статистические характеристики. С помощью метода, изложенного в работе [9], для одномерной $g_1(\lambda;\, t)$ и многомерной $g_L(\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_L;\, t_1,\, \ldots,\, t_L)$ характеристических функций случайного процесса $Z(t)$ справедливы соотношения

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[-\frac{9\nu\lambda^2}{2c_V^2R^2}\int_0^t K^2(t-\tau)d\tau\right], \qquad (27)$$

$$g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L) =$$
$$= \exp\left[-\frac{9\nu}{c_V^2R^2}\sum_{\substack{l,k=1,\\ k\le l}}^{L}\lambda_l\lambda_k\int_0^{t_k} K(t_l-\tau)K(t_k-\tau)d\tau\right]. \qquad (28)$$

Следует заметить, что в полученных выражениях (20), (27), (28), а также в последующих, предел интегрирования по времени ограничен фактически не значением t, а величиной $t - \delta t$, где δt – малый параметр, близкий к времени свободного пробега частиц среды. Это вызвано отсутствием физического влияния на флуктуации рассматриваемых величин тех процессов, которые происходят при $t - \tau < \delta t$.

Найденные формулы (27) и (28) позволяют определить моменты любого порядка для процесса $Z(t)$. В частности, для математического ожидания $\langle Z(t)\rangle$, момента второго порядка $\langle Z(t_1)Z(t_2)\rangle$ и дисперсии $\sigma^2(t) = \langle Z^2(t)\rangle$, получим

$$\left\langle Z(t)\right\rangle = \left.\frac{\partial g_1(\lambda;t)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0, \qquad (29)$$

$$\left\langle Z(t_1)Z(t_2)\right\rangle = \left.\frac{\partial^2 g_2(\lambda_1,\lambda_2;t_1,t_2)}{i\partial\lambda_1 i\partial\lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=0,\\ \lambda_2=0}} =$$
$$= \frac{9\nu}{c_V^2R^2}\int_0^{t_1} K(t_2-\tau)K(t_1-\tau)d\tau, \qquad (30)$$

$$\sigma^2(t) = \left\langle Z^2(t)\right\rangle = \left\langle Z(t)Z(t)\right\rangle = \frac{9\nu}{c_V^2R^2}\int_0^t K^2(t-\tau)d\tau. \qquad (31)$$

Уравнение (27) позволяет найти также одномерную плотность вероятности $p(Z)$ флуктуаций величины $Z(t)$ с помощью определения [1]

$$p(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda; t) e^{-i\lambda Z} d\lambda. \tag{32}$$

Получим

$$p(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2(t)}\right), \tag{33}$$

что соответствует нормальному распределению Гаусса. Из выражения (31) видно, что дисперсия величины $Z(t)$ растет с течением времени, из чего следует «размывание» плотности вероятности $p(Z)$ при увеличении t.

Найдем теперь спектральные плотности флуктуаций величины $Z(t)$, температуры поверхности $T_R(t)$ и теплового потока $q_T(t)$. Для этого проведем преобразование Лапласа исходного интегрального уравнения (18). Имеем

$$\hat{Z}(p) + \frac{3\kappa}{c_V R\sqrt{\chi}} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{\chi}}{Rp} \right) \hat{Z}(p) = \hat{\xi}_{q_T}(p), \tag{34}$$

где символами со «шляпкой» обозначены образы соответствующих функций, p – фурье-образ переменной t.

С помощью определения спектральной плотности установившегося случайного процесса (при $t = \infty$), согласно которому

$$G_Z(\omega) = \left| \hat{Z}(i\omega) \right|^2, \tag{35}$$

а также при учете того факта, что спектральная плотность белого шума равна его интенсивности, для спектральной плотности флуктуаций $Z(t)$ получим

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega^2}{\frac{c_V^2 R^2 \omega^2}{9} + \frac{\sqrt{2}\kappa c_V R}{3\sqrt{\chi}} \omega^{3/2} + \frac{\kappa^2}{\chi}\omega + \frac{\sqrt{2}\kappa}{R\sqrt{\chi}} \omega^{1/2} + \frac{\kappa^2}{R^2}} \nu. \tag{36}$$

Из выражения (36), используя (17) и формулу (5), находим спектральные плотности флуктуаций $T_R(t)$ и $q_T(t)$:

$$G_{T_R}(\omega) = \frac{1}{\frac{c_V^2 R^2 \omega^2}{9} + \frac{\sqrt{2}\kappa c_V R}{3\sqrt{\chi}} \omega^{3/2} + \frac{\kappa^2}{\chi}\omega + \frac{\sqrt{2}\kappa}{R\sqrt{\chi}} \omega^{1/2} + \frac{\kappa^2}{R^2}} \nu, \tag{37}$$

$$G_{q_T}(\omega)=\left(1+\frac{\dfrac{c_V^2R^2\omega^2}{9}+\dfrac{\sqrt{2}\kappa c_V R}{3\sqrt{\chi}}\omega^{3/2}}{\dfrac{\kappa^2}{\chi}\omega+\dfrac{\sqrt{2}\kappa}{R\sqrt{\chi}}\omega^{1/2}+\dfrac{\kappa^2}{R^2}}\right)^{-1}\nu. \qquad (38)$$

На рис. 3 и 4 представлены зависимости (37) и (38) для различных значений радиуса R. При построении графиков параметр ν рассчитывался согласно выражению (7). Из рис. 3 видно, что с увеличением радиуса R графики спектральной плотности $G_{T_R}(\omega)$ флуктуаций температуры $T_R(t)$ располагаются ниже аналогичных графиков, соответствующих меньшим по размеру частицам. Последнее означает уменьшение дисперсии флуктуаций температуры сферической частицы с ростом ее радиуса. Спектральная плотность $G_{T_R}(\omega)$ в области низких частот оказывается обратно пропорциональной радиусу:

$$G_{T_R}(\omega)\Big|_{\omega\to 0}=\frac{R^2\nu}{\kappa^2}\sim\frac{k_BT^2}{\kappa R}. \qquad (39)$$

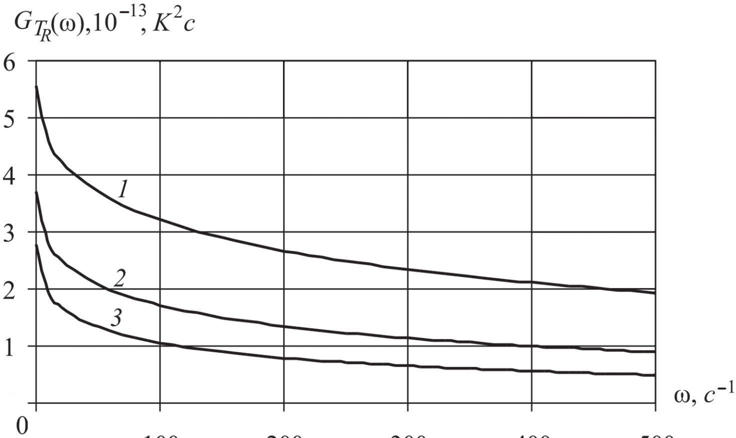

Рис. 3. Спектральная плотность флуктуаций температуры поверхности медной частицы $G_{T_R}(\omega)$ при R = 10 мкм (*1*), R = 12,5 мкм (*2*), R = 15 мкм (*3*)

Таким образом, рассмотрение процесса теплопроводности вне сферической поверхности и в полупространстве требует для описания флуктуаций соответствующих физических величин применения интегральных стохастических уравнений, а сами флуктуации в этом случае представляют собой немарковские случайные процессы. Полученные результаты имеют значение при описании случайных флуктуаций температуры микрочастиц в средах с малой теплопроводностью.

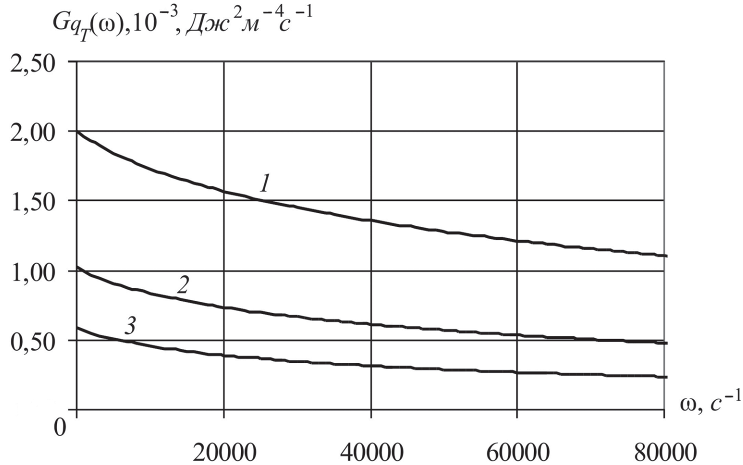

Рис. 4. Спектральная плотность флуктуаций теплового потока через поверхность медной частицы $G_{q_T}(\omega)$ при R = 10 мкм (*1*), R = 12,5 мкм (*2*), R = 15 мкм (*3*)

Постановка задачи (цилиндрический случай). Рассмотрим бесконечно протяженное цилиндрическое тело радиусом R, изготовленное из хорошо проводящего материала с объемной теплоемкостью C_V и температуропроводностью χ_c, находящееся в неограниченной теплопроводящей среде с теплопроводностью κ и температуропроводностью χ (рис. 5). Будем считать, что температура поверхности цилиндра в данный момент времени всюду одинакова и является некоторой функцией времени $T(R, t) = T_R(t)$. Заметим, что в случае реальных сред такое условие соответствует цилиндрическим телам не очень большого радиуса R при рассмотрении явления теплопроводности на расстояниях, меньших или порядка R от поверхности цилиндра. Будем также считать, что в начальный момент времени температура во всем пространстве, включая температуру материала цилиндра, была одинакова и равна нулю.

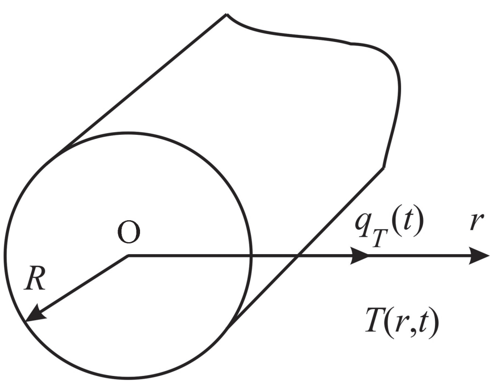

Рис. 5. Теплопроводность в пространстве, окружающем цилиндрическую поверхность

В рамках сделанных предположений температура среды вне цилиндра зависит только от расстояния до его оси симметрии и подчиняется дифференциальному уравнению теплопроводности вида

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \chi\left(\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right). \quad (40)$$

Начальные и граничные условия задаются соответственно выражениями

$$T(r,t)\big|_{t=0} = 0, \quad (41)$$

$$T(r,t)\big|_{r=R} = T_R(t). \quad (42)$$

Тепловой поток через поверхность цилиндрического тела $q_T(t)$ определяется общим соотношением

$$q_T(t) = -\kappa \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=R} + \xi_{q_T}(t), \quad (43)$$

где функция $\xi_{q_T}(t)$ представляет собой случайный тепловой поток, обусловленный указанными ранее причинами, статистические свойства которого определяются характером источника флуктуаций. Также он может быть определен согласно уравнению

$$q_T(t) = -\frac{C_V R}{2}\frac{dT_R(t)}{dt}. \quad (44)$$

Следует отметить, что выражение (44) справедливо для случая предполагаемого нами наличия высокой тепловой проводимости материала цилиндра по сравнению с проводимостью среды, т. е. при условии $\chi << \chi_{\text{с}}$.

Функция $\xi_{q_T}(t)$ во многих случаях может быть представлена в виде белого шума с интенсивностью ν, ограниченного сверху некоторой предельной частотой $\omega_{\max}$, которую с точностью до постоянной можно оценить с помощью формулы

$$\omega_{\max} \sim \frac{\chi_{\text{с}}}{R^2}. \quad (45)$$

Для оценки величины $\omega_{\max}$ будем считать цилиндр изготовленным из меди (для которой коэффициент температуропроводности $\chi_{\text{с}} = 10^{-4}$ м^2/с) и имеющим радиус $R = 10$ мкм. Получим, что $\omega_{\max} \sim 10^6$ с$^{-1}$. Таким образом, белый шум, характерный для флуктуаций теплового потока через цилиндрическую поверхность, оказывается широкополосным по спектру.

Можно также оценить величину интенсивности ν сверху. Действительно, если $\varepsilon = kT_0/2$ – энергия частицы среды, приходящаяся на одну кинетическую степень свободы, $l = \sqrt[3]{m/\rho}$ – среднее расстояние между частицами, $\delta t = l\sqrt{\varepsilon / m}$ – характерное время, по порядку величины равное времени свободного движения, где m и ρ – масса частиц среды и ее плотность, k – постоянная Больцмана, то значение ν сверху определяется формулой

$$\nu \sim \frac{\varepsilon^2}{l^4 \delta t}. \tag{46}$$

При температуре $T_0 = 300$ K для меди оценка, представленная в выражении (46), приводит к величине интенсивности $\nu \sim 10^3$ Дж^2/(м$^4 \cdot$ с).

Стохастическое интегральное уравнение. Можно показать, что если в некоторый момент времени τ на каждой единице длины рассматриваемой цилиндрической поверхности мгновенно выделилось тепло $Q(\tau)$, то температуру среды при $r > R$ в момент времени t можно определить с помощью выражения [4]

$$T(r,t) = \frac{\chi}{\kappa} Q(\tau) G(r, R, t-\tau), \tag{47}$$

где $G(r, R, t-\tau)$ – функция влияния мгновенного цилиндрического источника тепла (функция Грина), определяемая согласно следующей формуле:

$$G(r,R,t-\tau) = \frac{1}{4\pi\chi(t-\tau)} \exp\left(-\frac{r^2+R^2}{4\chi(t-\tau)}\right) I_0\left(\frac{Rr}{2\chi(t-\tau)}\right), \tag{48}$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Отметим, что $Q(\tau)\delta(t-\tau) = 2\pi R q_T(t)$. Тогда в случае произвольного теплового потока через поверхность цилиндра $q_T(t)$, температура на расстоянии r от оси симметрии цилиндра будет определяться с помощью интеграла

$$T(r,t) = \frac{R}{2\kappa} \int_0^t \frac{q_T(\tau)}{t-\tau} \exp\left(-\frac{r^2+R^2}{4\chi(t-\tau)}\right) I_0\left(\frac{Rr}{2\chi(t-\tau)}\right) d\tau. \tag{49}$$

Найдем производную $\dfrac{\partial T(r,t)}{\partial r}$, воспользовавшись выражением (49) и тем, что $\dfrac{\partial I_0(z)}{\partial z} = I_1(z)$. Получим

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \frac{R}{4\chi\kappa} \int_0^t \frac{q_T(\tau)}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{r^2+R^2}{4\chi(t-\tau)}\right) \times$$
$$\times \left[R I_1\left(\frac{Rr}{2\chi(t-\tau)}\right) - r I_0\left(\frac{Rr}{2\chi(t-\tau)}\right) \right] d\tau. \tag{50}$$

Из полученного соотношения (50), при учете формул (43) и (44), находим

$$\frac{C_V R}{2}\int_0^t K(t-\tau)Z(\tau)d\tau = \xi_{q_T}(t), \tag{51}$$

где введены обозначения для скорости изменения температуры поверхности цилиндра

$$Z(t) = \frac{dT_R(t)}{dt} \tag{52}$$

и ядра интегрального уравнения (51)

$$K(t-\tau) = \delta(t-\tau) + \frac{R^2}{4\chi(t-\tau)^2}\exp\left(-\frac{R^2}{2\chi(t-\tau)}\right)\times$$
$$\times\left[I_1\left(\frac{R^2}{2\chi(t-\tau)}\right) - I_0\left(\frac{R^2}{2\chi(t-\tau)}\right)\right]. \tag{53}$$

Таким образом, процесс распространения тепла в пространстве, окружающем цилиндрическую поверхность радиуса R, при наличии случайного теплового потока через нее, описывается стохастическим интегральным уравнением Вольтерры второго рода (51), что означает немарковский характер флуктуаций величины $Z(t)$, следовательно, и флуктуаций температуры поверхности цилиндра $T_R(t)$ и потока $q_T(t)$.

Заметим, что при больших значениях радиуса R выражение (53) может быть записано с помощью приближенной формулы [10]

$$K(t-\tau) = \delta(t-\tau) + \frac{\sqrt{\chi}}{R\sqrt{\pi(t-\tau)}}, \tag{54}$$

при подстановке которой в уравнение (51) вместо соотношения (53) получим интегральное уравнение вида

$$\frac{C_V R}{2}Z(t) + \frac{\kappa}{\sqrt{\pi\chi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}Z(\tau)d\tau = \xi_{q_T}(t), \tag{55}$$

представленное в [11] применительно к явлению теплопроводности в полупространстве над плоской поверхностью. Действительно, рассмотрим цилиндрическую оболочку радиуса R и толщины h, такой, что $h \ll R$. Тогда взамен уравнения (5) получим выражение $q_T(t) = -C_V h\dfrac{dT_R(t)}{dt} + \xi_{q_T}(t)$. Принимая во внимание то, что произведение $C_V h$ представляет собой теплоемкость единицы поверхности такой оболочки C_S, то вместо величины $\frac{C_V R}{2}$ в (55) следует подставить значение C_S, что и приводит к рассмотренному в [11] интегральному уравнению, описывающему теплопроводность в полупространстве, ограниченном плоской поверхностью.

Отметим также, что в том случае, если основным источником теплопроводности является теплоперенос, то верхний предел интегрирования в уравнении (51) следует считать равным $t - \delta t$, где δt – малый параметр по порядку величины равный времени свободного движения частиц теплопроводящей среды.

Случай белого шума флуктуаций теплового потока через цилиндрическую поверхность малого радиуса. Рассмотрим теплопроводность в среде, окружающей цилиндрическую оболочку, в случае, когда параметр $\frac{R^2}{\chi} << 1$, что, как видно из выражения (45), соответствует случаю очень большой граничной частоты спектра флуктуаций теплового потока через цилиндрическую поверхность (белый шум). Положив также $t - \tau > \delta t$, после разложения модифицированных функций Бесселя и экспоненты в ряд и удержания первых слагаемых разложения, получим

$$Z(t) - \frac{R^2}{4\chi} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} Z(\tau) d\tau = \frac{2}{C_V R} \xi_{q_T}(t). \tag{56}$$

Решение интегрального уравнения Вольтерры второго рода (56) в общем случае [7] можно записать в виде

$$Z(t) = \frac{2}{C_V R} \int_0^t \left[\delta(t-\tau) + F(t-\tau) \right] \xi_{q_T}(\tau) d\tau, \tag{57}$$

где резольвента $F(t - \tau)$ определяется реккурентным соотношением

$$F(t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t-\tau). \tag{58}$$

Здесь

$$F_1(t-\tau) = \frac{R^2}{4\chi} \frac{1}{(t-\tau)^2}, \tag{59}$$

$$F_n(t-\tau) = \int_{\tau+\delta t}^{t-\delta t} F_1(t-s) F_{n-1}(s-\tau) ds, \quad n > 1. \tag{60}$$

Указанное выше условие $\frac{R^2}{\chi} << 1$ делает ряд (58) быстросходящимся. При условии $\frac{R^2}{\chi} << \delta t$ (цилиндрические поверхности малого радиуса, или тонкие нити), вторым и последующими слагаемыми ряда (58) можно пренебречь по сравнению с первым, и окончательно получим

$$F(t-\tau) = \frac{R^2}{4\chi}\frac{1}{(t-\tau)^2}. \tag{61}$$

Статистические характеристики. Исходное интегральное уравнение (57) для случая резольвенты $F(t - \tau)$ вида (61) позволяет найти любые статистические характеристики процесса $Z(t)$, если воспользоваться разработанным в [9] методом описания немарковских случайных процессов, задаваемых линейными интегральными преобразованиями. Так, для одномерной $g_1(\lambda; t)$ и многомерных $g_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_L; t_1, \ldots, t_L)$ характеристических функций процесса $Z(t)$ при условии, что случайный тепловой поток $\xi_{q_T}(t)$ представляет собой белый шум интенсивности v, получим

$$g_1(\lambda;t) = \exp\left[-\frac{1}{24}\frac{R^2 v\lambda^2}{\chi^2 C_V^2}\left(\frac{1}{\delta t^3} - \frac{1}{t^3}\right)\right], \tag{62}$$

$$g_L(\lambda_1,\ldots,\lambda_L;t_1,\ldots,t_L) =$$
$$= \exp\left[-\frac{1}{24}\frac{R^2 v}{\chi^2 C_V^2}\sum_{\substack{k,l=1,\\ k<l}}^{L}\frac{\lambda_l\lambda_k}{(t_l-t_k)^2}\left[\frac{1}{\delta t} + \frac{t_k^2 - t_l^2 + t_l t_k}{t_l t_k (t_l - t_k)} + \frac{2}{t_l - t_k}\ln\frac{t_l\delta t}{t_k(t_l - t_k)}\right]\right]. \tag{63}$$

Графики функций $g_1(\lambda; t)$, задаваемых уравнением (62), изображены на рис. 6 для разных значений t. Здесь и далее в качестве примеров использованы медные цилиндрические тела малого радиуса, помещенные в воду ($R = 10^{-8}$ м, $v = 10^3$ Дж^2/(м$^4 \cdot$с), $\chi = 2 \cdot 10^{-7}$ м^2/с, $C_V = 1{,}3 \cdot 10^3$ Дж/(К$\cdot$м^3)).

Выражения для характеристических функций (62) и (63) позволяют найти любые статистические характеристики процесса $Z(t)$. Для математического ожидания $\langle Z(t)\rangle$ и дисперсии $D_Z(t)$ процесса $Z(t)$ из (62) получим

$$\langle Z(t)\rangle = \left.\frac{\partial g_1(\lambda;t)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0, \tag{64}$$

$$D_Z(t) = \left\langle Z^2(t) \right\rangle = -\left.\frac{\partial g_1(\lambda;t)}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=0} = \frac{R^2\nu}{24\chi^2 C_V^2}\left(\frac{1}{\delta t^3} - \frac{1}{t^3}\right). \tag{65}$$

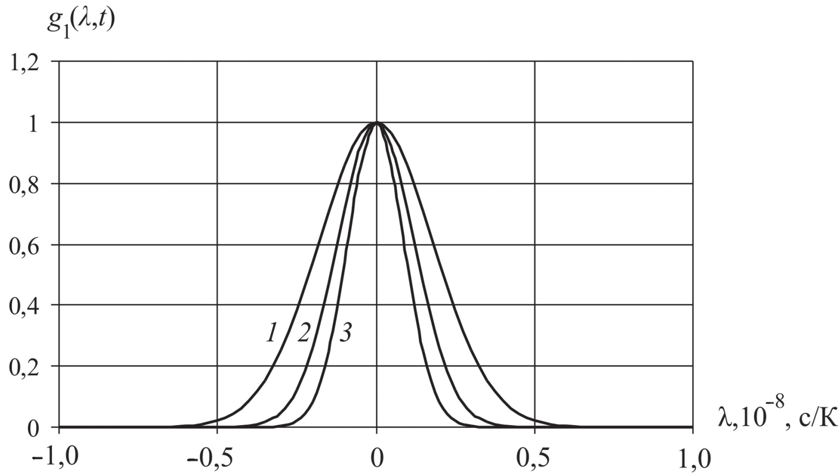

Рис. 6. Графики функций $g_1(\lambda; t)$ для значений $t = 10^{-7}$ с (*1*), $t = 10^{-6}$ с (*2*), $t = \infty$ (*3*)

Из (26) видно, что установившийся процесс теплопроводности ($t \to \infty$) сопровождается постоянным значением дисперсии $D_Z(t)$ скорости изменения температуры цилиндрической поверхности $Z(t)$:

$$D_Z(t)\Big|_{t\to\infty} = \frac{R^2\nu}{24\chi^2 C_V^2 \delta t^3}. \tag{66}$$

Для корреляционной функции $K(t_1, t_2) = \langle Z(t_1)Z(t_2)\rangle$ при помощи двумерной характеристической функции $g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)$, определяемой из (63), получим

$$K(t_1, t_2) = -\left.\frac{\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}\right|_{\substack{\lambda_1=0,\\ \lambda_2=0}} =$$

$$= \frac{1}{48}\frac{R^2\nu}{\chi^2 C_V^2}\frac{1}{(t_2 - t_1)^2}\left[\frac{1}{\delta t} + \frac{t_1^2 - t_2^2 + t_1 t_2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} + \frac{2}{t_2 - t_1}\ln\frac{t_2 \delta t}{t_1 (t_2 - t_1)}\right]. \tag{67}$$

Из зависимости (67) следует, что при $t_1 \to \infty$, $t_2 \to \infty$ (установившийся процесс теплопроводности) корреляционная функция $K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau)$ принимает вид

$$K(\tau) = \frac{1}{48}\frac{R^2\nu}{\chi^2 C_V^2}\frac{1}{\tau^2}\left[\frac{1}{\delta t} + \frac{1}{\tau} + \frac{2}{\tau}\ln\frac{\delta t}{\tau}\right]. \tag{68}$$

Графики функций $K(t-\tau, t)$, задаваемых соотношением (67), изображены на рис. 7 для различных значений параметра t.

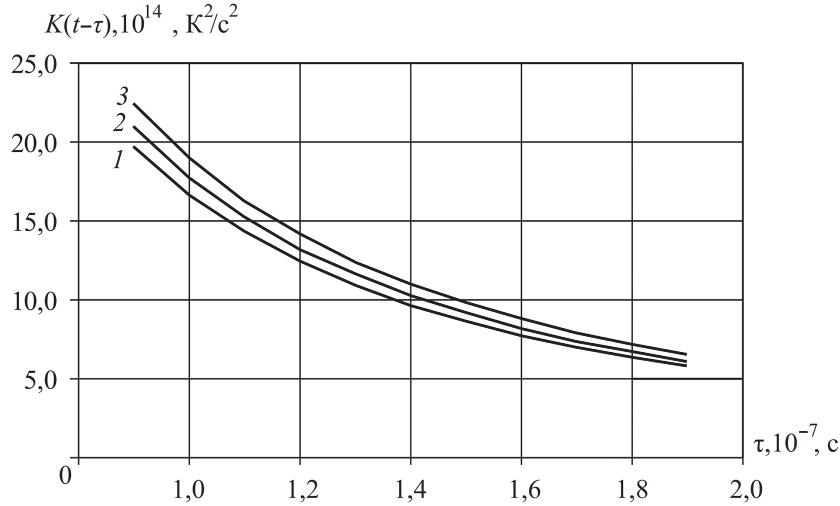

Рис. 7. Графики функций $K(t-\tau, t)$ для значений $t = 10^{-7}$ с (*1*), $t = 10^{-6}$ с (*2*), $t = 1$ с (*3*)

Найденная корреляционная функция (28) позволяет найти одностороннюю спектральную плотность процесса $Z(t)$:

$$G_Z(\omega,t) = 2\int_0^t K(t-\tau,t)\cos\omega\tau d\tau. \tag{69}$$

На рис. 8 представлен результат численного вычисления односторонней спектральной плотности $G_Z(\omega, t)$ с помощью формулы (69) для различных значений времени t. В частном случае малых значений ω и не очень больших t из (67) и (68) при учете условия $\delta t \ll t$ получим

$$G_Z(\omega,t)\Big|_{\omega\to 0} = 2\int_0^t K(t-\tau,t)\left(1-\frac{\omega^2\tau^2}{2}\right)d\tau =$$
$$= \frac{1}{48}\frac{R^2\nu}{\chi^2 C_V^2}\frac{t}{\delta t}\left(\frac{4}{t\delta t}-\omega^2\right). \tag{70}$$

Согласно определению для одномерной функции плотности вероятности $p(Z;t)$ запишем

$$p(Z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda;t)\exp(-i\lambda Z)d\lambda =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi D(t)}}\exp\left(-\frac{Z^2}{2D(t)}\right). \tag{71}$$

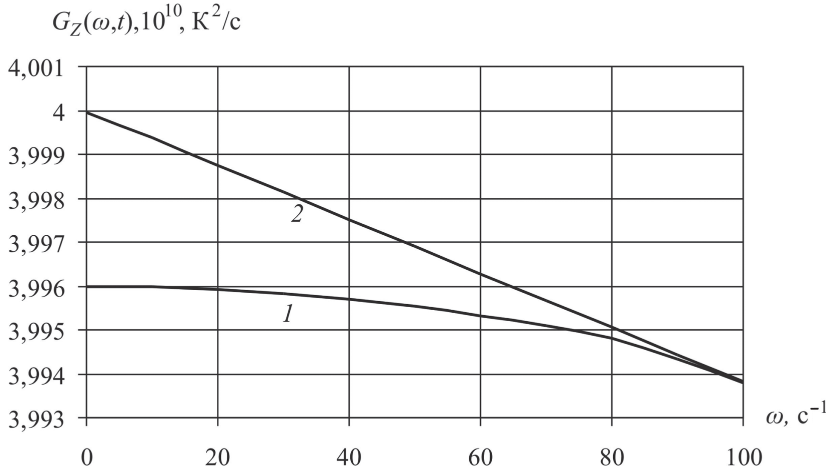

Рис. 8. Графики односторонней спектральной плотности $G_z(\omega, t)$ для значений времени $t = 0{,}01$ с (*1*) и $t = 1$ с (*2*)

График на рис. 9 отображает зависимость (71) для различных t. Хорошо видно, что с течением времени график плотности вероятности флуктуаций величины $Z(t)$ «размазывается» вдоль оси Z, стремясь к стационарной гауссовой кривой при $t \to \infty$.

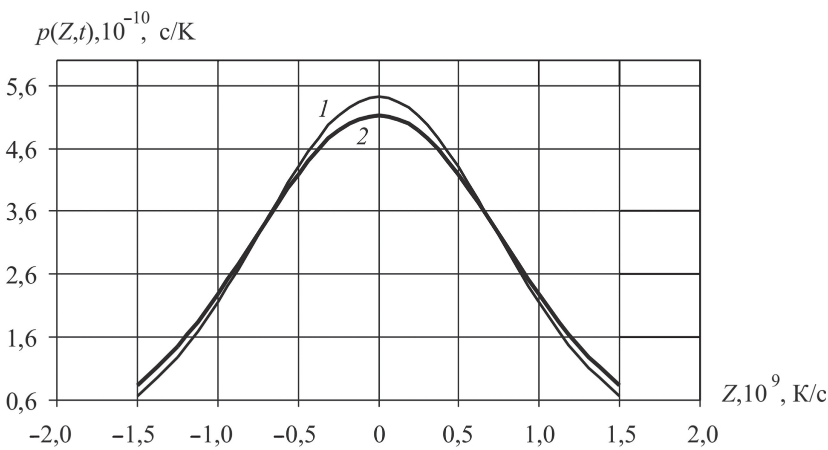

Рис. 9. Зависимость плотности вероятности $p(Z, t)$ для $t = 10^{-7}$ с (*1*) и $t = 10^{-6}$ с (*2*)

Выводы. Рассмотрение процесса распространения тепла даже в случае относительно простых моделей микрочастиц сферической и цилиндрической форм, находящихся в безграничной среде, требует для статистического описания изменений соответствующих физических величин применения интегральных стохастических уравнений, а сами флуктуации величин следует рассматривать как немарковские случайные процессы. Полученные результаты могут найти применение при исследовании теплопроводности твердых тел со сферической и цилиндрической симметрией, при изучении законов остывания тел и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
2. Morozov A. N., Skripkin A. V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process // Physics Letters A. – 2011. – Vol. 375. – P. 4113–4115.
3. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. Статистическое описание осциллятора, находящегося под воздействием флуктуирующего коэффициента трения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2008. – № 2. – С. 3–15.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
5. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
6. Морозов А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 332 с.
7. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 542 с.
8. Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. – М.: Машиностроение, 1978. – 560 с.
9. Морозов А. Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2004. – № 3. – С. 47–56.
10. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
11. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. Применение интегральных преобразований для описания броуновского движения как немарковского случайного процесса // Известия вузов. Физика. – 2009. – № 2. – С. 66–74.

Статья поступила в редакцию 30.05.2012