

Ю. И. Димитриенко, А. П. Соколов

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ  
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ  
НА БАЗЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ  
ГОМОГЕНИЗАЦИИ**

*Предложены математическая модель, численные методы и программные алгоритмы для математического моделирования упругопрочностных характеристик неоднородных композиционных материалов с периодической микроструктурой. Проведены тестовые расчеты упругопрочностных характеристик тканевых композитов. Микроструктура исследуемых материалов уточнялась с использованием электронных микроскопов.*

**E-mail: dimit.bmstu@gmail.ru, alsokolo@bmstu.ru**

**Ключевые слова:** композиционные материалы, эффективные упругопрочностные характеристики, стеклопластики, пределы прочности, многомасштабное моделирование, метод конечных элементов.

Актуальность задачи, сформулированной в названии данной работы, очень велика. Композиционные материалы (КМ), или композиты, находят широкое применение в аэрокосмической технике, машиностроении, легкой промышленности, медицинской технике (при протезировании, в стоматологии) и многих других отраслях. Ярким примером современного эффективного использования композитов в авиастроении является разработка новейшего пассажирского самолета Boeing 787 Dreamliner, конструкция которого более чем на 50 % состоит из композитов. Большинство свойств получаемых различными технологическими процессами КМ определяют экспериментально [1, 2, 3] либо с использованием приближенных формул [1, 4–6]. Натурные исследования очень дороги (исчисляются миллионами рублей), в то время как существующие формулы и оценки зачастую не дают требуемой точности.

Практическая ценность предлагаемого подхода заключается в следующем:

- возможности получения результатов с заранее заданной точностью;
- экономической выгоде благодаря сокращению количества экспериментальных исследований;
- в решении задач синтеза материалов;
- повышении качества получаемого на производстве материала.

**Математическая постановка задачи.** Большинство КМ имеет сложную гетерогенную внутреннюю микроструктуру, распространяющуюся на несколько масштабных уровней как для наполнителей, так и для матриц (например, комплексные нити, моноволокна, фибриллы и пр.). Для описания напряженно-деформированного состояния конструкций из таких материалов было введено понятие многоуровневой иерархической структуры (МИС) композита. Оно предполагает, что компоненты рассматриваемой модели КМ, в свою очередь, могут быть также композитами и т. д. (рис. 1).

В основе используемого в работе численного алгоритма лежит метод осреднения гетерогенных периодических структур (замена гетерогенного материала на однородный, т. е. гомогенизация) – метод асимптотического осреднения (МАО), или метод гомогенизации (МГ), предложенный в работах Бахвалова Н.С. [7] и Победри Б.Е. [7, 8]. Данный метод был адаптирован для МИС в сочетании с методом конечных элементов. Метод гомогенизации основан на введении двух масштабных координат [7–11] («быстрых» и «медленных») и позволяет численно найти эффективные характеристики (ЭХ) (в работе рассматривались механические) композита с помощью решения специальных «локальных задач теории упругости на ячейке периодичности» (ЯП), в основе которых лежит система уравнений равновесия, соотношения Коши и обобщенный закон Гука:

$$\begin{cases} \sigma_{ij/l}^{(0)} = 0; \\ \varepsilon_{kl}^{(0)} = \bar{\varepsilon}_{kl} + \frac{1}{2}(u_{k/l}^{(1)} + u_{l/k}^{(1)}); \\ \sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(0)}; \end{cases} \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{kl}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно в ячейке периодичности  $V_{\xi}$ ;  $\bar{\varepsilon}_{kl}$  – средние деформации, определяемые как  $2\bar{\varepsilon}_{ij} = u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}$ ;  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора модулей упругости материала;  $n = \partial/\partial\xi$  – производные по «быстрым» координатам [7]. Система (1) дополняется специальными граничными условиями периодичности для перемещений  $u_i^{(1)}$  и вектора напряжений  $\sigma_{ij}^{(0)}h_j$ :  $[u_i^{(1)}] = 0$ ,  $[\sigma_{ij}^{(0)}]h_j = 0$ , условиями идеального контакта (по силам и перемещениям) на границе раздела  $\Sigma_{\alpha\beta}$  компонентов  $\alpha$  и  $\beta$  в модели ячейки периодичности:  $[\sigma_{ij}^{(0)}]h_j = 0$ ,  $[u_i^{(1)}] = 0$ ,  $h$  – вектор нормали, и условиями нормировки:  $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$  [12–14].

В результате была получена локальная задача теории упругости, называемая также задачей на ячейке периодичности. Неизвестными

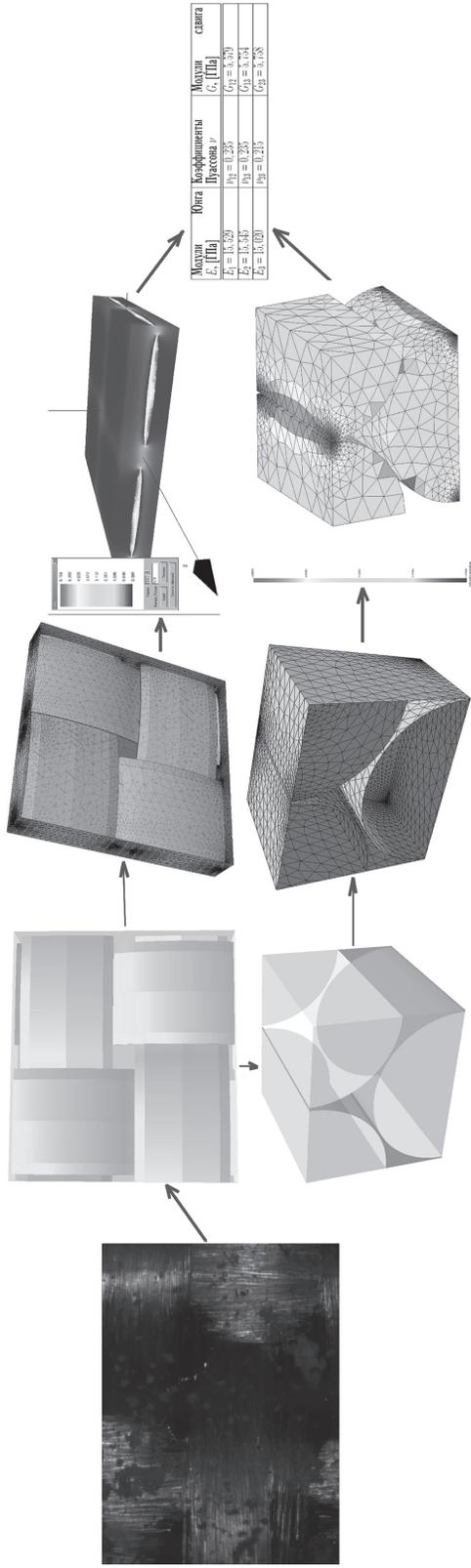


Рис.1. Упрощенная модель трехфазового дисперсно-армированного композиционного материала

в этой задаче являются функции 1-го уровня  $u_i^{(1)}(\bar{x}_j, \xi_k)$ , зависящие от «медленных»  $\bar{x}_j$  и «быстрых»  $\xi_k$  координат, а функции нулевого уровня  $u_i^{(0)}(\bar{x}_j)$  так же, как и  $\bar{\varepsilon}_{ij}$ , рассматриваются в этой задаче в качестве известных исходных данных. Определить  $u_i^{(0)}(\bar{x}_j)$  и  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  поможет осредненная система уравнений [7, 12–14].

В [7] было установлено, что локальная задача теории упругости имеет единственное решение в классе периодических функций при обязательном выполнении условий нормировки. Эта задача может быть решена с использованием методов конечных элементов с учетом удовлетворения граничным условиям специального вида. Известны работы, в которых методы гомогенизации применялись для двухуровневых иерархических структур [9–11]. В настоящей работе сделана попытка обобщить модель на случай произвольного числа взаимосвязанных уровней.

При использовании идеи введения разномасштабных координат предложен метод многоуровневой асимптотической гомогенизации (МАГ) для МИС с произвольным числом уровней, а также математическая модель МИС, представляющая древовидную структуру связанных ЯП (рис. 2).

Задача была сведена к решению рекурсивно вложенных друг в друга локальных задач теории упругости на ЯП разных структурных уровней модели МКМ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_n \sigma_{\{n\gamma\}}^{(0)} = 0, \quad \xi_n \in V_{n\gamma}, \quad m_{n,\alpha-1} \leq \gamma; \\ \sigma_{\{n\gamma\}}^{(0)} = C \varepsilon_{\{n\gamma\}}^{(0)}; \\ 2\varepsilon_{\{n\gamma\}}^{(0)} = 2\bar{\varepsilon}_{\{n\alpha\}} + \nabla_n \otimes u_{\{n\gamma\}}^{(1)} + \nabla_n \otimes u_{\{n\gamma\}}^{(1)T}; \\ \left[ \sigma_{\{n\gamma\}}^{(0)} \right] h_n = 0, \quad \left[ \sigma_{\{n\gamma\}}^{(1)} \right] = 0, \quad \xi_n \in \Sigma_{n\gamma\gamma'}; \\ \left\langle u_{\{n\gamma\}}^{(1)} \right\rangle_{\{n\alpha\}} = 0, \quad \left[ u_{\{n\gamma\}}^{(1)} \right] = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $n$  – номер структурного уровня,  $\gamma$  – номер компоненты в ЯП  $\alpha$  на  $n$ -м структурном уровне,  $\gamma' \leq m_{n\alpha}$ . Для решения локальных задач теории упругости  $n$ -го структурного уровня применяли модифицированный метод конечных элементов, который сводится к решению серий стандартных задач статики с классическими граничными условиями, обозначенными как  $L_{pq}$  (рис. 3).

Для определения эффективных упругих характеристик композита использовались эффективные определяющие соотношения, включающие решения задач  $L_{pq}$  (псевдоперемещения  $U_{i(pq)}^\alpha$  и псевдонапря-

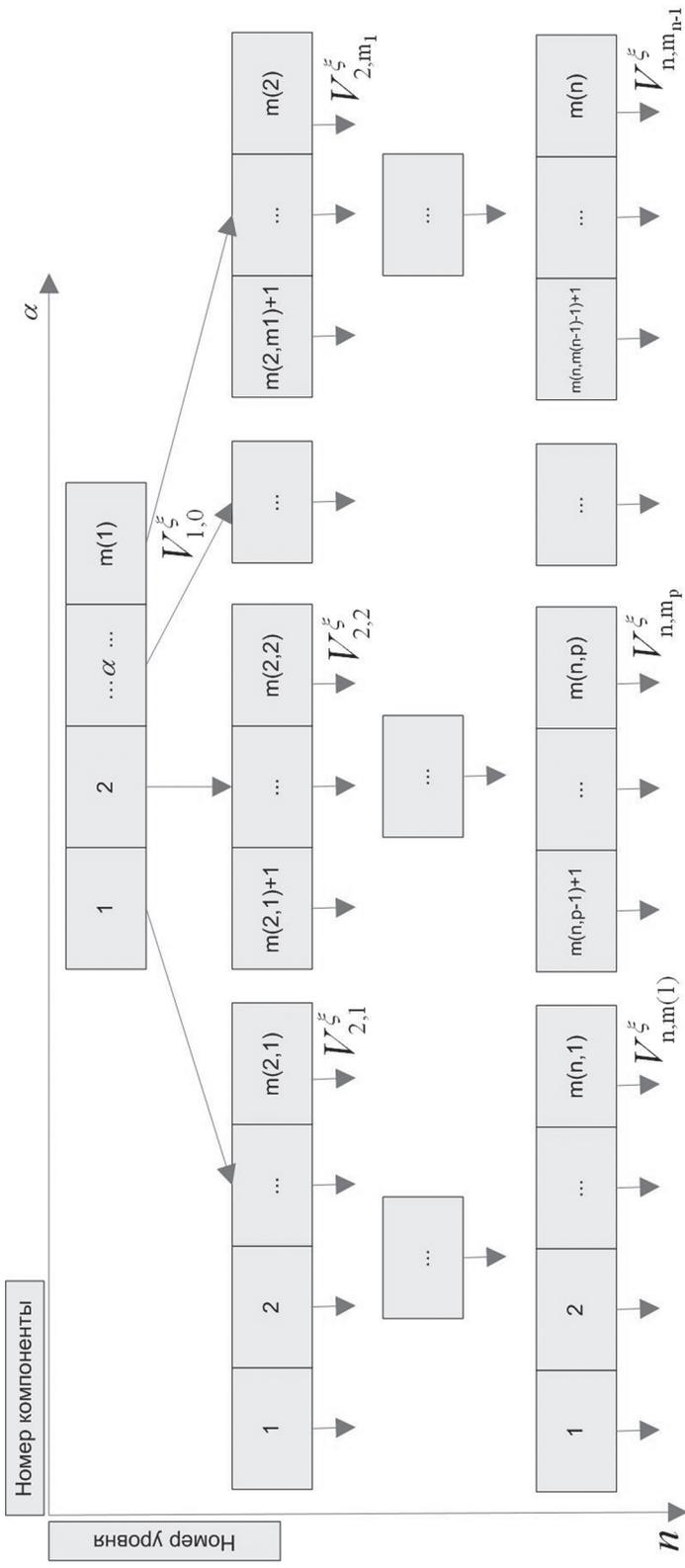


Рис. 2. Схема многоуровневой иерархической структуры

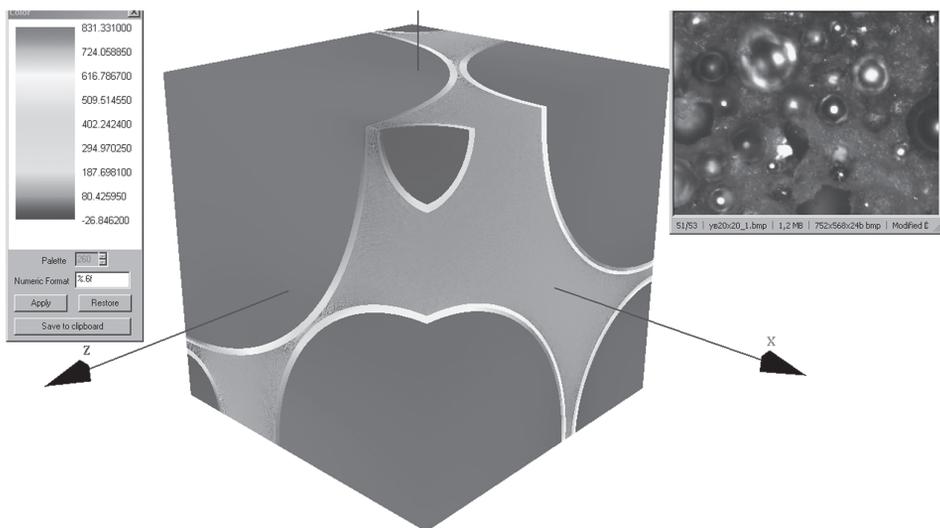


Рис. 3. Решение задачи  $L_{13}$  – поле компоненты  $\sigma_{13}$  тензора напряжений

жения  $\sigma_{ij(pq)}^\alpha$ :  $\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = \sum_{p,q} \bar{\sigma}_{ij(pq)}$ , здесь  $\bar{\sigma}_{ij(pq)} = \langle \sigma_{ij(pq)}^\alpha \rangle = \sum_{\alpha=1}^N \int_{V^{(\alpha)}} \sigma_{ij(pq)}^\alpha dV$ ,

тогда  $\bar{C}_{ijpq} = \frac{\bar{\sigma}_{ij(pq)}}{\bar{\varepsilon}_{pq}}$ , где по  $p$  и  $q$  суммирование не осуществляется,

$\bar{C}_{ijpq} = \langle C_{ijpq}^{(0)} \rangle$  – компоненты тензора эффективных модулей упругости композита. После расчета тензора модулей упругости  $\bar{C}_{ijpq}$  рассчитывался эффективный тензор упругих податливостей  $\bar{\Pi}_{ijpq}$ , являющийся обратным к  $\bar{C}_{ijpq}$ , и были получены девять технических констант:

$E_\alpha = \frac{1}{\bar{\Pi}_{\alpha\alpha\alpha\alpha}}$  – эффективные модули Юнга,  $\nu_{\alpha\beta} = -\frac{\bar{\Pi}_{\alpha\alpha\beta\beta}}{E_\alpha}$  – эффек-

тивные коэффициенты Пуассона,  $G_{\alpha\beta}^{(n)} = \bar{C}_{\alpha\beta\alpha\beta}^{(n)}$  – эффективные модули сдвига. Совместно с расчетом эффективных модулей МКМ определялись поля компонент тензора концентраций напряжений  $B_{ijkl}^{(n)}(\xi)$  [12].

**Расчет прочностных характеристик МКМ.** Отметим, что численные расчеты проводились для тканевых КМ с полотняным и простейшим сатиновым типом переплетения (рис. 4–6). Рассмотрим алгоритм расчета пределов прочности КМ.

1. Решение ряда локальных задач  $L_{pq}$  теории упругости на  $1/8$  ячейки периодичности композита  $\tilde{V}_\xi$  для определения эффективных упругих характеристик КМ [9]. Особенностью решения данных задач был учет анизотропии входящих в геометрию ЯП волокон: учитывалась искривленность волокон. Это повлекло за собой необходимость

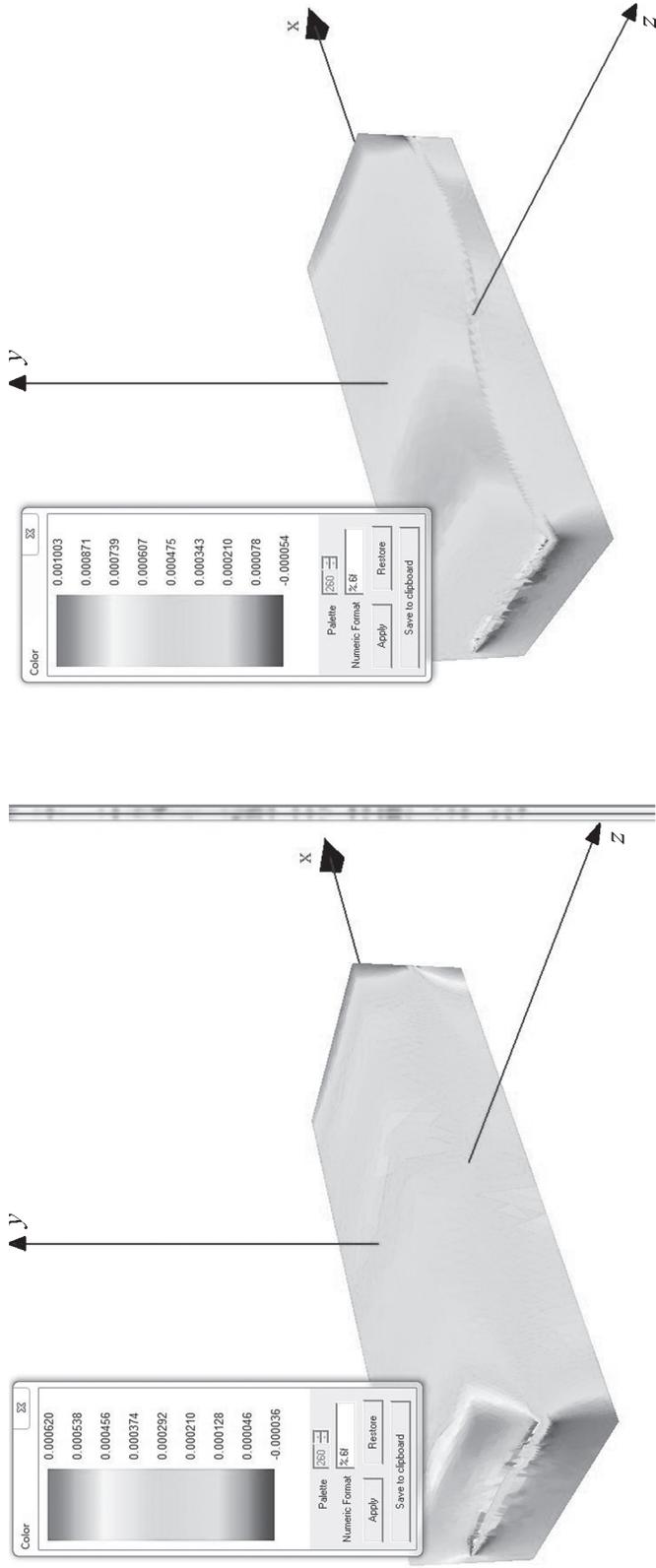


Рис. 4. Распределение компоненты  $\varepsilon_{11}(x)$  тензора деформации в части ЯП тканевого КМ без учета анизотропии (слева) и с ее учетом (справа)

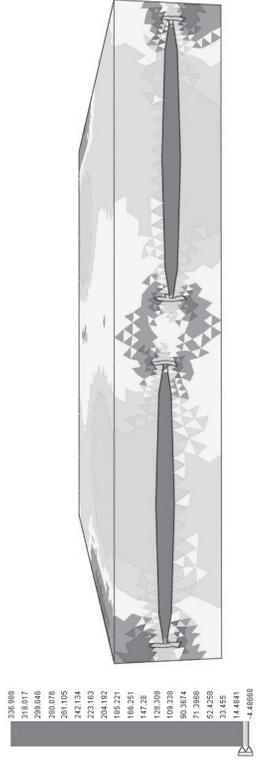


Рис. 5. Процесс распространения микротрещин в матрице ЯП тканевого КМ: трещина и волокна (слева), компонента тензора напряжений  $\sigma_{11}$  в ЯП (справа)

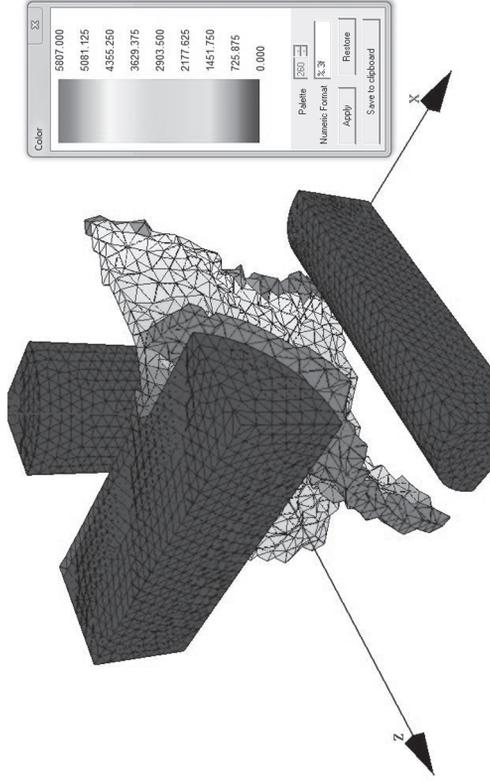
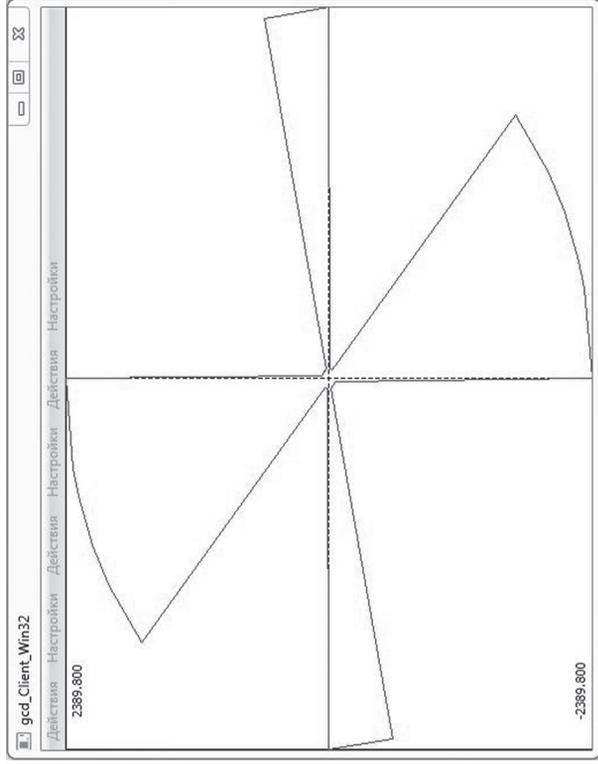


Рис. 6. Сечение аппроксимированной поверхности прочности первичного разрушения тканевого КМ полотноного типа переплетения (слева). Распространение микротрещины в ЯП 3D армированного КМ (справа)

пересчета компонент тензора модулей упругости  $C_{ijkl}(\gamma)$ , зависящих от угла анизотропии волокон, определяемого заранее заданной его образующей. Для такого учета был разработан специализированный программный модуль, который связал локальную физическую систему координат «прямого» волокна с глобальной для искривленного. С математической точки зрения, осуществлялось преобразование компонент тензора  $n$ -го ранга при замене ортонормированного базиса  $e_{i_1} \dots e_{i_n}$  на криволинейный  $R_{i_1} \dots R_{i_n}$ :  ${}^n \hat{\Omega}^{J_1 J_2 \dots J_n} = P_{i_1}^{J_1} P_{i_2}^{J_2} \dots P_{i_n}^{J_n} \cdot {}^n \Omega^{i_1 i_2 \dots i_n}$ , где использовалось правило Эйнштейна ( $n$ -кратная сумма),  $P = Q^{-1}$  – матрица, обратная к матрице Якоби, и  ${}^n \Omega^{i_1 i_2 \dots i_n}$ ,  ${}^n \hat{\Omega}^{J_1 J_2 \dots J_n}$  – компоненты тензора  $n$  ранга в старом и новом базисах соответственно. Решение задач  $L_{pq}$  в трехмерной постановке осуществлялось с помощью метода конечных элементов.

2. Вычисление эффективных упругих модулей композита.

3. Вычисление компонент тензора концентрации напряжений  $B_{ijkl}(\xi_s) = C_{ijpq}^\alpha(\xi_s) \bar{\Pi}_{pqkl}$ , связывающих напряжения в компонентах композита с осредненными напряжениями:

$$\sigma_{ij}^\alpha = B_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl}. \quad (3)$$

4. Определение прочностных свойств материалов. Часто на практике прочностные свойства материалов определяют на базе решения задач о напряженно-деформированном состоянии (НДС) с учетом возможного разрушения при выполнении критерия прочности, в качестве которого использовался тензорный квадратичный критерий прочности Гольденבלата – Копнова или Цая – Ву [12, 13, 15]. Разрушение в точке  $\xi_s^*$  наступает при выполнении соотношения

$$f^{(\alpha)}(\xi_s^*) = S_i^{(\alpha)} \sigma_i^{(\alpha)}(\xi_s^*) + \frac{1}{2} S_{ij}^{(\alpha)} \sigma_i^{(\alpha)}(\xi_s^*) \sigma_j^{(\alpha)}(\xi_s^*) = 1; \quad (4)$$

$$i, j = 1 \dots 6,$$

где  $S_{ij}^{(\alpha)}$ ,  $S_i^{(\alpha)}$  – матрицы и векторы констант прочности  $\alpha$ -й компоненты композита (заданы и определяются на базе пределов прочности на растяжение  $\sigma_r$ , сжатие  $\sigma_c$ , сдвиг  $\sigma_s$ ).

Подставляя (3) в (4), получим

$$f^{(\alpha)}(\xi_s^*, t^*) = S_i^{(\alpha)} B_{ij}(\xi_s^*) \bar{\sigma}_j(t^*) + \frac{1}{2} S_{ij}^{(\alpha)} B_{ik}(\xi_s^*) B_{jl}(\xi_s^*) \bar{\sigma}_k(t^*) \bar{\sigma}_l(t^*) = 1, \quad (5)$$

где  $t^*$  – момент времени разрушения компоненты композита в точке  $\xi_s^*$ .

5. Задание серии из  $M$ -законов изменения компонент средних напряжений  $\bar{\sigma}_k(t)$  в виде линейной функции от параметра нагружения  $t$ :  $\bar{\sigma}_i^{(\beta)}(t) = \tilde{\sigma}_i^{(\beta)} t$ ,  $\beta = 1 \dots M$ . Для каждого  $\beta$ -го элемента серии осуществляется нагружение композита с заданным вектором  $\bar{\sigma}_i^{(\beta)}$  при изменяющемся  $t$  от 0 до  $t_\beta^*$ . Осуществляется итерационное приращение аргумента  $t$  и на каждом шаге итерации проверяется выполнение условия  $f^{(\omega)}(\xi, t) \leq 1$ . Как только при некотором  $t^*$  впервые выполняется условие  $f^{(\omega)}(\xi_s^*, t_\beta^*) \approx 1$ , происходит разрушение множества конечных элементов, аппроксимирующих модель ЯП КМ. Этот момент считается моментом первичного разрушения КМ и фиксируется текущая нагрузка: находятся значения  $\xi_s^*$ ,  $t_\beta^*$  и  $\bar{\sigma}_i^{(\beta)}(t_\beta^*)$ .

6. Построение сечения поверхности прочности первичного разрушения. На базе серии экспериментов строится сечение поверхности прочности первичного разрушения (см. рис. 6), далее синтезируется эффективный квадратичный критерий прочности на базе использования метода наименьших квадратов.

Некоторые результаты процессов расчета микроразрушения тканевого композита показаны на рис. 5.

Предлагаемый метод обладает высокой точностью вычислений, возможные погрешности вычисляемых пределов первичного разрушения определяются допущениями модели линейной теории упругости и могут быть устранены при использовании теории пластичности Ильюшина.

**Выводы.** Разработана оригинальная методика вычисления прочностных свойств КМ, позволяющая аппроксимировать поверхность прочности КМ по известным прочностным характеристикам компонентов КМ. Разработано специализированное программное обеспечение для автоматизированного решения задач расчета эффективных упругопрочностных (пределов упругости или пределов пропорциональности) характеристик композитов, в том числе и полей микронапряжений для всех структурных уровней композита. Представлены характерные результаты моделирования упругопрочностных свойств дисперсно-армированных МКМ.

Для обеспечения достоверности результатов работы и практической значимости проводятся сравнения с экспериментальными данными. Результаты, полученные в рамках настоящих исследований, были представлены на научных конференциях.

*Исследование выполнено при поддержке грантов Президента РФ МК-6421-2012-9 и МК-765.2012.8.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В а н и н Г. А. Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наукова думка, 1985. – 300 с.
2. В а с и л ь е в В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Композиционные материалы: Справочник / под ред. В.Ж. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1989. – 510 с.
4. К р и с т е н с е н Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 335 с.
5. С е н д е ц к и Дж. Механика композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – 563 с.
6. Т а р н о п о л ь с к и й Ю. М., Ж и г у н И. Г., П о л я к о в В. А. Пространственно-армированные композиционные материалы. – М.: Машиностроение, 1987. – 225 с.
7. Б а х в а л о в Н. С., П а н а с е н к о Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
8. П о б е д р я Б. Е. Механика композиционных материалов. – М.: МГУ, 1984. – 336 с.
9. Б а р д з о к а с Д. И., З о б н и н А. И. Математическое моделирование процессов в композиционных материалах периодической структуры. – М.: УРСС, 2003. – 374 с.
10. М о л ь к о в В. А., П о б е д р я Б. Е. Эффективные характеристики однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – М., 1985. – № 2. – С. 119–130.
11. С а н ч е с-П а л е н с и я Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984. – 471 с.
12. D i m i t r i e n k o Y. I., S o k o l o v A. P. Elastic properties of composite materials // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2010. – Vol. 2. – № 1. – P. 116–130.
13. Д и м и т р и е н к о Ю. И., С о к о л о в А. П. Разработка численного метода расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2008. – № 2. – С. 56–67.
14. Д и м и т р и е н к о Ю. И., С о к о л о в А. П. Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов // Информационные технологии. – 2008. – № 8. – С. 31–38.
15. М а л м е й с т е р А. К., Т а м у ж В. П., Т е т е р с Г. А. Соппротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.

Статья поступила в редакцию 30.05.2012