

А. В. В а н и н, Е. М. В о р о н о в, А. А. К а р п у н и н

## ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ДВУХУРОВНЕВОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ СТАБИЛИЗАЦИИ – НАВЕДЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

*Рассмотрено применение методов теории оптимизации в много-объектных многокритериальных системах в условиях структурной несогласованности на примере параметрической оптимизации управления в двухуровневой двухканальной системе стабилизации – наведения с учетом перекрестных связей каналов статически устойчивого летательного аппарата нормальной аэродинамической схемы при наведении на летательный аппарат-цель. На основе достаточных условий оптимальности и линеаризации модели рассмотрен пример решения задачи.*

**E-mail:** mole@list.ru, emvoronov@mail.ru, ksans@yandex.ru

**Ключевые слова:** оптимизация управления, иерархическая система, наведение, стабилизация, летательный аппарат.

С ростом сложности функционирования и проектирования систем автоматического управления, проявляющейся в их многообъектности и многокритериальности, существенным становится учет факторов несогласованности (конфликтности) и неопределенностей различного характера, который может быть осуществлен при помощи комбинирования подходов теории игр и классической теории управления. Данный вид комбинирования составляет основу теории оптимизации управления многообъектных многокритериальных систем (ММС) [1]. Методы этой теории применяют для векторной оптимизации структурно сложных систем [2], в которых, кроме получения векторно-оптимального управления, требуется обеспечить межобъектную устойчивость или балансировку подсистем в структуре по эффективности или потерям.

**Структура и модель двухуровневой системы.** В рамках данной работы рассматривается методика оптимизации структурно и функционально сложных автоматизированных систем управления (АСУ) в типичной форме многоуровневой иерархической структуры, представленной на рис. 1, с поуровневыми многоподсистемными (многоканальными, многосвязными) многокритериальными системами регулирования (ММСР), управления (ММСУ) и принятия решений (ММСПР).

Примером части такой многоуровневой АСУ и практически полезной моделью для исследования является двухуровневая матема-

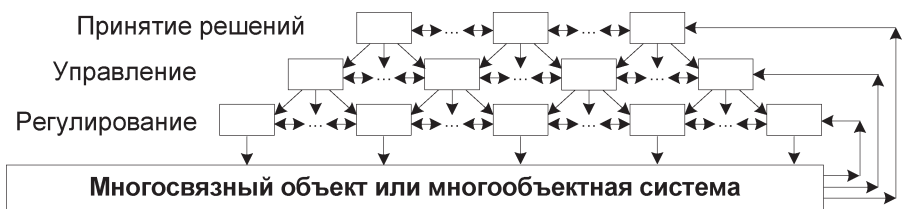


Рис. 1. Структура многоуровневой системы управления

тическая модель наведения – стабилизации двухканальной системы управления (СУ) беспилотного летательного аппарата (ЛА), представленная на рис. 2, где КСУ, КССТ – каналы системы управления и системы стабилизации ЛА;  $u_n$  – сигналы наведения ЛА;  $k_y, k_k$  – управляющие параметры, коэффициенты передачи устройства выработки команд КСУ (метода наведения) и чувствительного элемента координатора цели соответственно;  $k_{д.г}, k_{д.л.у}$  – управляющие параметры, коэффициенты передачи дифференцирующего гироскопа и датчика линейных ускорений соответственно;  $r$  – регулирующее воздействие на рули высоты и направления ЛА;  $\mathcal{G}, \psi$  – углы тангажа и рысканья;  $j_H$  – нормальные ускорения ЛА;  $X, Y, Z (X_{Ц}, Y_{Ц}, Z_{Ц})$  – координаты центра масс  $O_0$  беспилотного ЛА (центра масс  $O_{Ц}$  ЛА-цели);  $V, \Theta, \Psi (V_{Ц}, \Theta_{Ц}, \Psi_{Ц})$

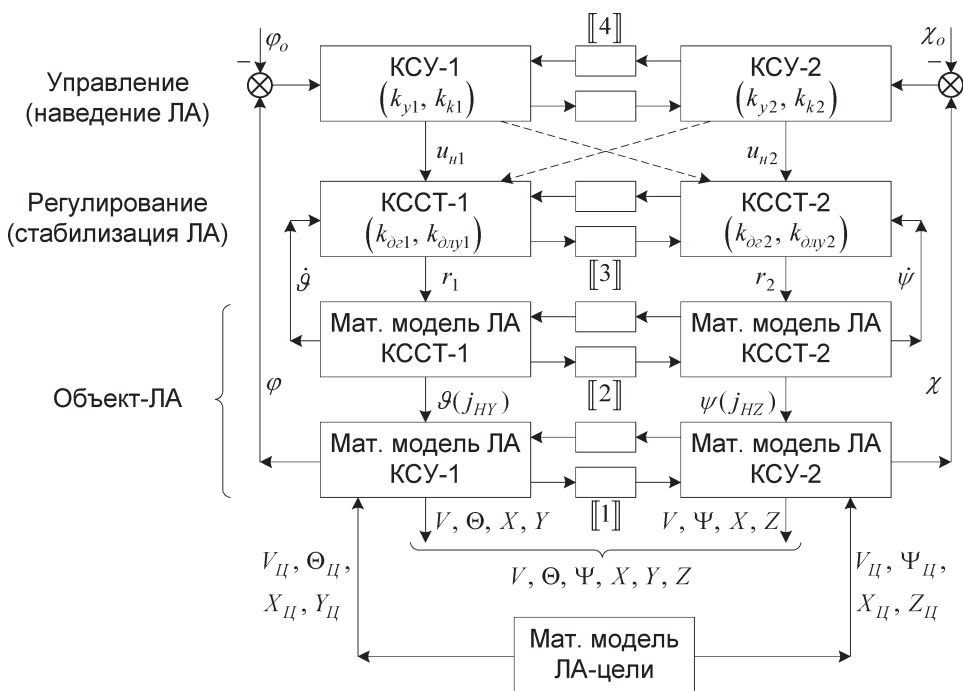


Рис. 2. Двухуровневая модель наведения – стабилизации двухканальной СУ ЛА

$\Theta_{Ц}, \Psi_{Ц}$  – координаты вектора скорости ЛА (ЛА-цели);  $\varphi$  – угол места;  $\chi$  – угол азимута;  $\varphi_0, \chi_0$  – элементы опорной траектории.

Следует иметь в виду, что в линеаризованном варианте представленной модели вектор состояния центра масс ( $V, \Theta, \Psi$ ) заменяется на вектор ( $\Delta V, \Delta \Theta, \Delta \Psi$ ), где данные динамические величины есть отклонения ЛА от опорного движения ( $V_0, \Theta_0, \Psi_0$ ). Блоки с обозначением  $[[i]]$ ,  $i = \overline{1,4}$  являются перекрестными связями в динамике поступательного движения центра масс ЛА, углового (вращательного) движения вокруг центра масс ЛА, между регуляторами системы стабилизации (ССТ) и в методе пространственного наведения ЛА соответственно. В подобной ситуации существенна связь между каналами вращательного и поступательного движения ЛА, что определяет связь каналов стабилизации и наведения соответственно [3].

Математическая модель движения ЛА представлена моделью углового (вращательного) движения вокруг центра масс по углам тангажа  $\mathcal{G}$  и рысканья  $\psi$  с соответствующими воздействиями аэродинамического управления по нормальному ускорению  $j_H$  в каналах управления направлением скорости центра масс в вертикальной плоскости по углу наклона траектории  $\Theta$  и горизонтальной плоскости по углу поворота траектории  $\Psi$  (рис. 3).

Из [3] известно, что в общем случае система динамических и кинематических связей двухканальной математической модели ЛА на

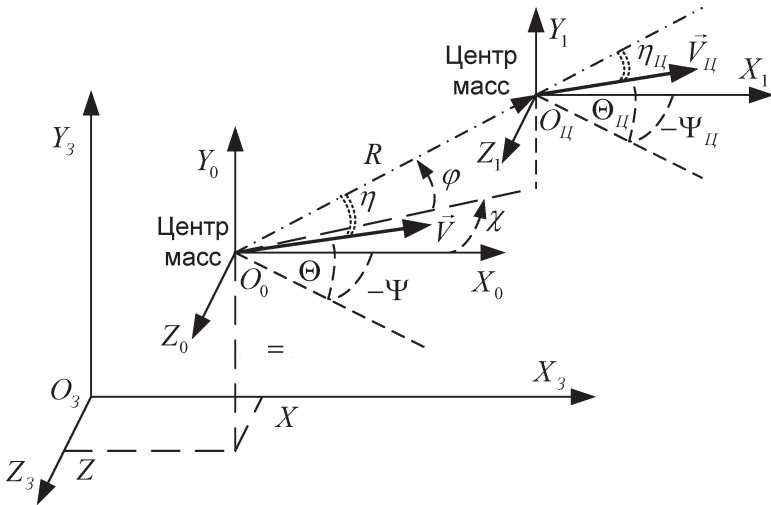


Рис. 3. Вектор состояния СУ ЛА ( $V, \Theta, \Psi$ ) относительно местной географической системы координат;  $(X, Y, Z)$  – относительно неподвижной системы координат;  $(R, \varphi, \chi)$  – относительно центра масс  $O_{Ц}$ ;  $R$  – длина вектора  $\vec{O}_0\vec{O}_{Ц}$ ;  $\eta$  – угол упреждения;  $\eta_{Ц}$  – курсовой угол цели

уровне КСУ имеет при  $V = \text{const}$  вид системы дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Theta} = \frac{1}{V} (j_{HY}^{\Pi} - g \cos \Theta); \\ \dot{\Psi} = -\frac{j_{HZ}^{\Pi}}{V \cos \Theta}; \\ \dot{X} = V \cos \Theta \cos \Psi; \\ \dot{Y} = V \sin \Theta; \\ \dot{Z} = -V \cos \Theta \sin \Psi, \end{array} \right. \quad (1)$$

которая при малых углах  $\Psi$  (или  $\Theta$ ) декомпозируется на модели каналов СУ ЛА – горизонтальный (или вертикальный) с управлениями  $j_{HZ}$  ( $j_{HY}$ ). Поэтому общую модель ЛА КСУ можно считать двухканальной с перекрестными кинематическими связями  $[[1]]$ , где  $j_{HY}^{\Pi} = j_{HY0} + j_{HY}$ ,  $j_{HZ}^{\Pi} = j_{HZ0} + j_{HZ}$ , причем решение системы при  $j_{HY0}, j_{HZ0}$  дает  $\Theta_0(t), \Psi_0(t)$  (или, наоборот, заданные  $\Theta_0, \Psi_0$  формируют  $j_{HY0}, j_{HZ0}$ ).

Очевидно, что математическая модель поступательного движения ЛА-цели имеет вид, подобный (1), с добавлением уравнения

$$\dot{V}_{\text{ц}} = j_{\text{TXц}} - g \sin \Theta_{\text{ц}}, \quad (2)$$

где  $j_{\text{TX}}$  – тангенциальное ускорение ЛА, и задает траекторное движение ЛА-цели управлениями ( $j_{\text{TXц}}, j_{\text{HXц}}, j_{\text{HZц}}$ ), причем текущее расстояние  $\|O_0 O_{\text{ц}}\|$

$$R = \sqrt{(X - X_{\text{ц}})^2 + (Y - Y_{\text{ц}})^2 + (Z - Z_{\text{ц}})^2}. \quad (3)$$

При применении сферической системы координат, особенно полезной при исследовании конфликтной ситуации в системе ЛА с центрами масс в точках  $O_0$  и  $O_{\text{ц}}$  (см. рис. 3) в системе координат с началом отсчета в точке  $O_0$ , полные уравнения пространственной кинематики на основе [3] принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R} = -V \cos \eta + V_{\text{ц}} \cos \eta_{\text{ц}}; \\ R\dot{\varphi} = V [\sin \Theta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \Theta \cos (\Psi - \chi)] - \\ \quad - V_{\text{ц}} [\sin \Theta_{\text{ц}} \cos \varphi - \sin \varphi \cos \Theta_{\text{ц}} \cos (\Psi_{\text{ц}} - \chi)]; \\ R\dot{\chi} \cos \varphi = V \cos \Theta \sin (\Psi - \chi) - V_{\text{ц}} \cos \Theta_{\text{ц}} \sin (\Psi_{\text{ц}} - \chi); \\ \cos \eta = \cos \varphi \cos \Theta \cos (\Psi - \chi) + \sin \varphi \sin \Theta; \\ \cos \eta_{\text{ц}} = \cos \varphi \cos \Theta_{\text{ц}} \cos (\Psi_{\text{ц}} - \chi) + \sin \varphi \sin \Theta_{\text{ц}}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Система (4) с учетом (2), (3) порождает дополнительные перекрестные связи типа  $[[1]]$  и позволяет вычислить координаты вектора  $\vec{O}_0\vec{O}_c(R, \varphi, \chi)$  по динамико-кинематическим системам (1) для беспилотного ЛА и ЛА-цели для их использования в КСУ-1 (см. рис. 2) ( $l = 1, 2$ ).

Для того чтобы обеспечить благоприятные условия наведения, получая траектории близкие к прямолинейным и в непосредственной близости от цели, необходимо вводить переменный угол упреждения.

Если изменять угол упреждения  $\eta$  в некотором соответствии с изменением угла  $\varphi$ , можно обеспечить устойчивость прямолинейной траектории. Простейшей формой связи между изменением угла упреждения  $\eta$  и изменением угла  $\varphi$  будет пропорциональная зависимость, например

$$\Delta\eta = (1 - k)\Delta\varphi,$$

где  $k$  – некоторая константа.

Так как углы  $\varphi$ ,  $\Theta$ ,  $\eta$  связаны соотношением  $\varphi = \Theta + \eta$ , или  $\Delta\varphi = \Delta\Theta + \Delta\eta$ , то можно записать следующую эквивалентную формулу:

$$\Delta\eta = \frac{1-k}{k}\Delta\Theta.$$

Рассматриваемый закон наведения можно представить в другом, более удобном для реализации, виде:

$$\Theta = k\varphi.$$

Связано это с тем, что во многих случаях удобнее измерять угловые скорости, а не углы.

Условие устойчивости прямолинейной траектории, заключающееся в том, чтобы  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\dot{\varphi}$  имели различные знаки, дает возможность правильно назначить коэффициент пропорциональности  $k$  и обеспечить кинематическую устойчивость прямолинейных траекторий при любых начальных условиях.

Очевидно, наведение с постоянным углом упреждения, в том числе наведение по кривым погони, можно рассматривать как частный случай пропорционального сближения. Действительно, наведению с постоянным углом упреждения соответствует  $k = 1$ .

Интересно, что и параллельное сближение, характеризующееся связью  $\varphi = \text{const}$ , можно рассматривать как частный случай пропорционального сближения. Действительно, при  $k = \infty$ ,  $\Delta\Theta = -\Delta\eta$ , т. е. в процессе наведения  $\Delta\varphi = 0$  и, следовательно,  $\varphi = \text{const}$ . Поэтому метод пропорционального сближения является общим методом. Когда он реализован, за счет выбора коэффициента  $k$  можно получать траектории

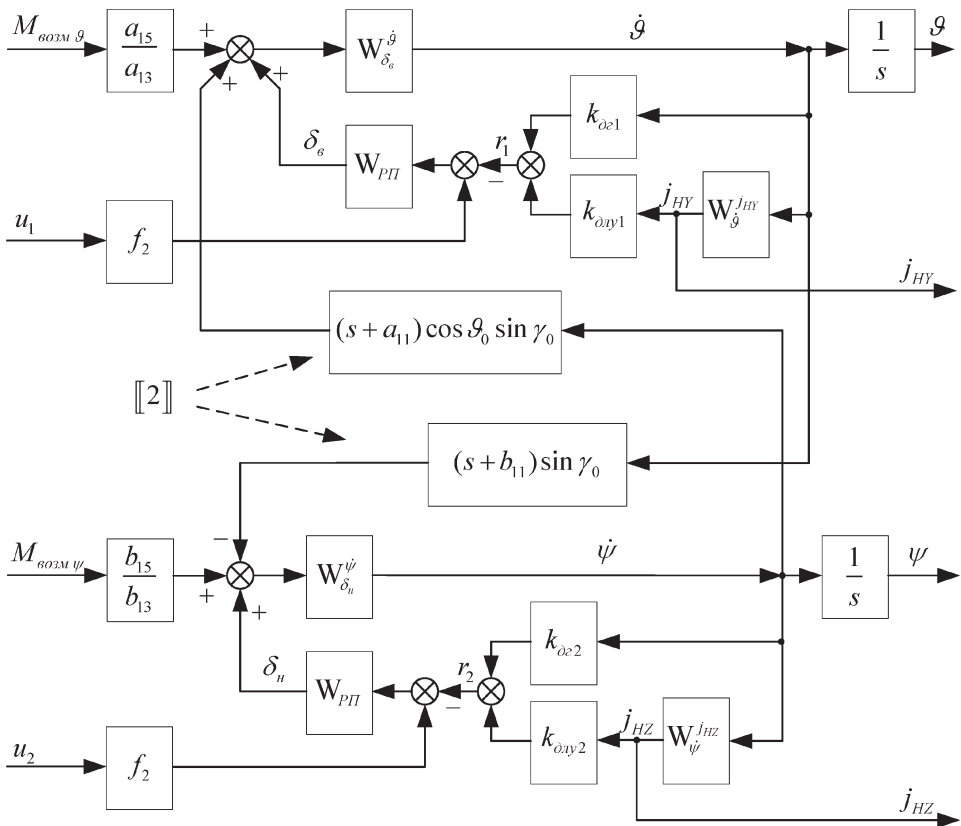
со свойствами, промежуточными по отношению к свойствам кривых погоны и свойствам траекторий параллельного сближения.

Для иллюстрации динамического описания задачи на уровне регулирования (стабилизации) ЛА на рис. 4 представлена структурная схема двухканальной линейризованной системы стабилизации в блоке КССТ – математическая модель углового движения ЛА – перекрестные связи [2].

Передаточная функция (ПФ) ЛА имеет вид

$$W_{\delta_b}^{\dot{g}} = \frac{k(T_1 s + 1)}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}; \quad W_{\dot{g}}^{j_{HY}} = \frac{V}{T_1 s + 1};$$

$$W_{\delta_h}^{\dot{\psi}} = \frac{k(T_2 s + 1)}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}; \quad W_{\dot{\psi}}^{j_{HZ}} = \frac{V}{T_2 s + 1};$$



**Рис. 4. Структурная схема двухканальной ССТ:**

$a_{ij}, b_{ij}$  – аэродинамические коэффициенты;  $\theta_0, \gamma_0$  – элементы опорной траектории;  $M_{\text{возм.}\theta}, M_{\text{возм.}\psi}$  – возмущающие моменты (для расчета влияния возмущений)

ПФ рулевого привода

$$W_{\text{РП}} = \frac{k_{\text{РП}}}{T_{\text{РП}}s + 1};$$

ПФ датчика угловой скорости (дифференцирующего гироскопа)

$$W_{\text{д.г. 1, 2}} = k_{\text{д.г. 1, 2}};$$

ПФ датчиков линейного ускорения

$$W_{\text{д.л.у. 1, 2}} = k_{\text{д.л.у. 1, 2}}.$$

Нелинейный элемент  $f_2$ , задающий ограничение сигнала  $u_m$ , ( $m = 1, 2$ ), представлен на рис. 5.

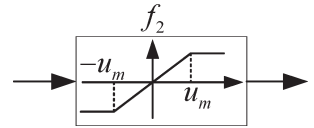


Рис. 5. Ограничение сигнала  $u_m$  ( $m = 1, 2$ )

В целом структурная схема двухуровневой двухканальной системы наведение – стабилизации беспилотного ЛА с перекрестными связями изображена на рис. 6, где замкнутая система является координатором цели (КЦ) головки самонаведения (ГС) беспилотного ЛА на основе двухосного силового гироскопического стабилизатора [3]. Коэффициент  $k_{kl}$  ( $l = 1, 2$ ) является коэффи-

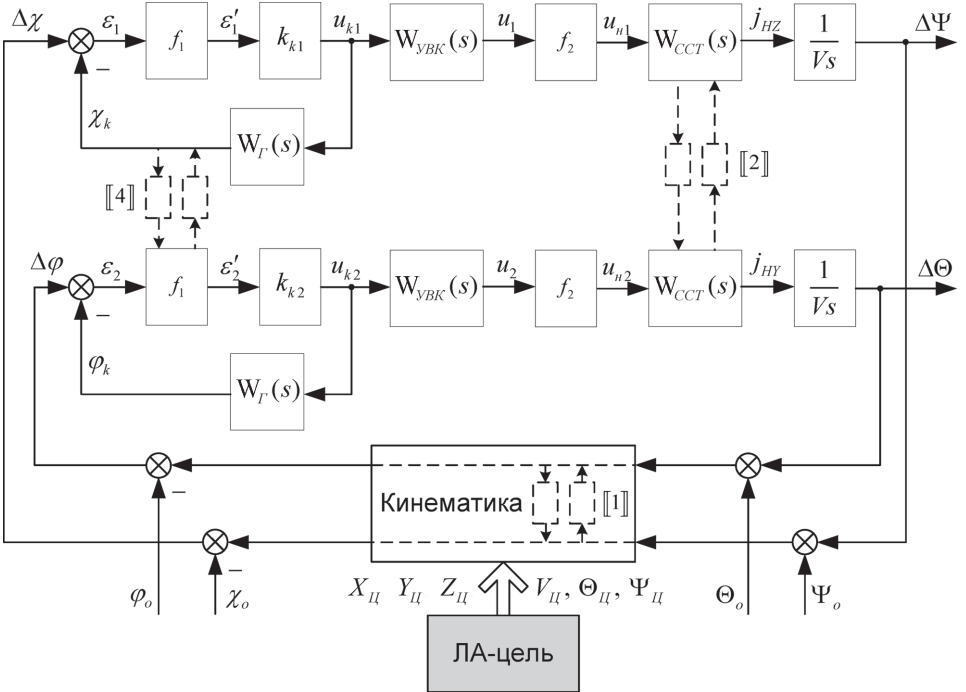


Рис. 6. Структурная схема двухканальной системы наведения – стабилизации беспилотного ЛА

циентом передачи чувствительного элемента КЦ. Датчик момента и гиросtabilизатор имеет передаточную функцию

$$W_{\Gamma}(s) = \frac{k_{\Gamma}k_{\text{Д}}}{s},$$

где  $k_{\text{Д}}$  – коэффициент передачи датчика момента;  $k_{\Gamma}$  – коэффициент передачи гиросtabilизатора,  $k_{\Gamma} = \frac{1}{H}$ ;  $H$  – кинетический момент гироскопа стабилизатора.

Нелинейный элемент  $f_1$  учитывает эффект стробирования ГС. В более общем описании двухканальный КЦ создает дополнительные перекрестные связи типа [4], которые в данной работе не учитываются.

Передаточная функция устройства выработки команд (УВК) в простейшем виде [3] имеет вид

$$W_{\text{УВК}}(s) = \frac{k_{y/l}}{T_{\phi}s + 1},$$

где  $k_{y/l}$  – коэффициент передачи УВК КСУ-1,  $l = 1, 2$ , определяющий качество метода пропорционального наведения, согласно [4];  $T_{\phi}$  – постоянная времени корректирующего фильтра нижних частот.

Кинематика беспилотного ЛА на рис. 6 описывается системой уравнений (4), кинематика при получении  $\Theta_0, \Psi_0$  определяется системой (1). Схема блока кинематики будет выглядеть так, как это показано на рис. 7.

Таким образом, имеет место двухуровневая система управления – регулирования с двухканальными ММСУ и ММСР с соответствующими перекрестными связями [1] и [2].

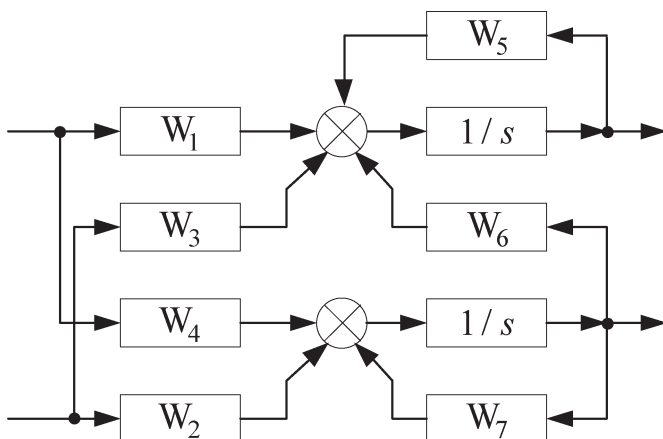


Рис. 7. Схема блока кинематики



В работе [5] сформирован и применяется вариант векторных целевых показателей канатов ММСР, обеспечивающих Парето-оптимальную устойчивость, качество, точность и быстродействие в каждом канале с учетом балансировки каналов. В качестве варианта векторных показателей каналов двухканального пространственного наведения ЛА с перекрестными кинематическими связями на уровне ММСУ могут быть предложены точность наведения и контроль кривизны траектории ЛА при подлете к цели с балансировкой каналов и пространственной Парето-оптимальностью.

В более общем случае на уровне управления возникает декомпозированная терминальная задача оптимального пространственного управления ЛА по векторному показателю с обеспечением терминальной точности по положению центра масс ЛА, вектору его скорости и быстродействию [5].

**Концепция обобщенного управления многоуровневой системой.** Методика оптимизации формируется на основе комбинации методов проектирования иерархических распределенных систем (ИРС) для выбора оптимальной функциональной структуры ИРС-АСУ (облика АСУ) [6], методов оптимизации ММС на основе стабильно-эффективных игровых компромиссов для оптимизации и уравнивания (балансировки) подсистем в составе ММС-уровня регулирования, управления, принятия решения по эффективности или потерям [1], методов оптимизации межуровневой координации с приоритетом – «правом первого хода» каждого верхнего уровня в ИРС-АСУ [4, 6]. Данная концепция позволяет сформулировать определение обобщенного оптимального управления в ИРС-АСУ.

Обобщенное оптимальное управление многоуровневой АСУ формируется на основе комбинации следующих процессов:

- 1) многокритериального выбора оптимальной функциональной структуры АСУ (облика АСУ);
- 2) оптимизации в подсистемах ММС-уровней;
- 3) уравнивания (балансировки) подсистем ММС-уровней;
- 4) оптимизации межуровневой координации.

Очевидно, что данное обобщенное управление АСУ с учетом поуровневых и межуровневых связей требует разработки единой технологии его оптимизации.

В качестве комментария определения в практическом примере двухуровневой двухканальной СУ наведения – стабилизации ЛА (см. рис. 2) функциональный облик уже выбран. На соответствующих уровнях выбираются параметры  $k_{y,l}$ ,  $k_{kl}$ ,  $l = 1, 2$ ;  $k_{д.л.yi}$ ,  $k_{д.гi}$   $i = 1, 2$ , которые обеспечивают балансировку и Парето-оптимальность

на основе равновесно-арбитражной схемы стабильно-эффективного компромисса. Сигналы  $u_{nl}$  ( $l = 1, 2$ ) обеспечивают координацию между уровнем управления и стабилизации, а  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) – исполнительное управление.

В работе представлен алгоритм оптимизации обобщенного управления многоуровневой АСУ на основе разработанного метода иерархического уравнивания по Штакельбергу, в котором обобщается известное понятие стратегии по Штакельбергу в классе иерархических дифференциальных игр (ИДИ) [5].

**Определение и структурные свойства иерархического равновесия в многоуровневых системах управления с обобщением стратегии Штакельберга.** В данной работе развиваются и применяются подходы класса ИДИ. Без ограничения общности рассуждений рассмотрим двухуровневую ИДИ с «правом первого хода» верхнего уровня. В отличие от известных результатов и в соответствии со структурным требованием многоуровневой СУ, каждый верхний уровень представляет собой структурированную ММС с исходной структурной несогласованностью, представленную на рис. 8, где также без ограничения общности рассуждений рассмотрены трехподсистемные ММС. На рисунке сохранены традиционные обозначения двухступенчатой дифференциальной игры: центра (Ц) и исполнительной системы (ИС), но в соответствии, например, с двухуровневой структурой управления – регулирования (см. рис. 2) верхний уровень может иметь смысл ММС. Таким образом, в данной работе имеет место обобщение двухступенчатой ИДИ [2, 4].

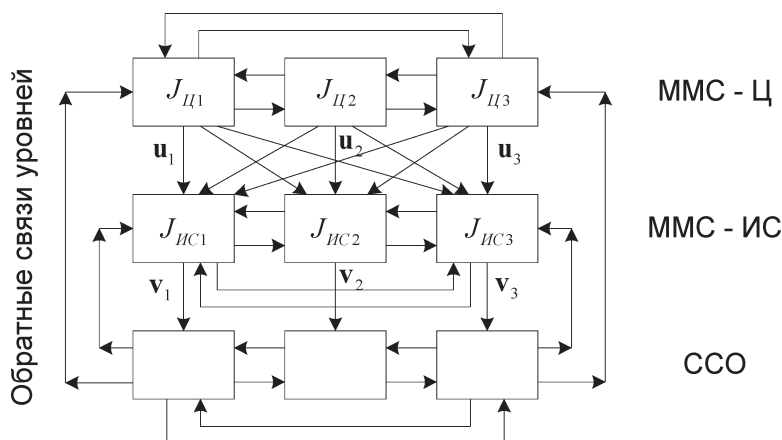


Рис. 8. Структурная схема двухуровневой подсистемной ИДИ. Верхний уровень: ММС – Центр (ММС – Ц); нижний уровень: ММС – исполнительная система (ММС – ИС); структурно сложный объект (ССО)

Структурно сложный объект (ССО) имеет математическую модель

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in \mathbf{E}^n, \quad (5)$$

где  $\mathbf{v}$  – исполнительное управление с распределенным исполнением (см. рис. 8):

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3), \dim \mathbf{v}_i = m_i, i = 1, 2, 3, \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i \subset \mathbf{E}^{m_i},$$

$$\dim \mathbf{v} = m = \sum_{i=1}^3 m_i, \mathbf{v} \in \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3 \subset \mathbf{E}^m. \quad (6)$$

Управление – координация ММС – Ц осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3), \dim \mathbf{u}_l = k_l \geq 3, \mathbf{u}_l \in \mathbf{U}_l \subset \mathbf{E}^{k_l},$$

$$\dim \mathbf{u} = k = \sum_l k_l, \mathbf{u} \in \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_3 \subset \mathbf{E}^k. \quad (7)$$

При распределенной координации  $\mathbf{u}$ , связанной с одной из подсистем ММС – ИС, последнее неравенство может не выполняться.

Структурно и функционально связанные задачи ММС – Ц и ММС – ИС характеризуются соответственно функциями «выигрыша»

$$J_{Цl} = J_{Цl}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), l = 1, 2, 3; \quad (8)$$

$$J_{ИСi} = J_{ИСi}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Общая структура показателей (8), (9) имеет вид

$$J_{ji} = \Phi_{ji}(\mathbf{x}, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} f_{ji}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) dt, i = 1, 2, 3; j = (\text{Ц}, \text{ИС}). \quad (10)$$

Иерархическим равновесием (ИР) ИДИ с «правом первого хода» верхнего уровня в попарном взаимодействии уровней называется набор взаимосвязанных равновесных ситуаций множества уровней ИДИ при фиксированных степенях конфликтности в ММС уровней.

Структурные свойства иерархического равновесного решения двухуровневой ИДИ с обобщением стратегии Штакельберга (ИРИДИШ) составляют следующую трехэтапную процедуру получения обобщенного управления [4].

На первом этапе ММС – Ц на «правах первого хода» сообщает ММС – ИС свою координацию в форме закона-стратегии  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{U}$  для каждой позиции из множества  $\{t, \mathbf{x}\}$  или программно-корректируемого закона-стратегии управления (ПКЗУ) для конечного множества  $\{t_i, \mathbf{x}(t_i), t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_K = T\}$ , или программного управления

$\mathbf{u}(t)$  для всех  $t \in [t_0, t_K]$ , или векторного параметрического множества  $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ .

На втором этапе на уровне ММС – ИС формируется отображение  $\mathbf{R}: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$  такое, что при каждом фиксированном  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \varphi_{\text{ИС}} \left( J_{\text{ИС}1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \dots, J_{\text{ИС}3}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right) = \\ & = \varphi_{\text{ИС}} \left( J_{\text{ИС}1}(\mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{u}), \dots, J_{\text{ИС}3}(\mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{u}) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Конкретный вид функции  $\varphi_{\text{ИС}}$  определяется на множестве степеней конфликтности подсистем ММС – ИС (антагонизм, бескоалиционный или коалиционный конфликт, кооперация).

На третьем этапе, на котором развивается стратегия Штакельберга и обобщаются РИДИШ, ММС – Ц выбирается решение

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \varphi_{\text{Ц}} \left( J_{\text{Ц}1}(\mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{u}), \dots, J_{\text{Ц}3}(\mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{u}) \right) = \\ & = \varphi_{\text{Ц}} \left( J_{\text{Ц}1}(\mathbf{u}^0, \mathbf{R}\mathbf{u}), \dots, J_{\text{Ц}3}(\mathbf{u}^0, \mathbf{R}\mathbf{u}) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Конкретный вид функции  $\varphi_{\text{Ц}}$  определяется на множестве степеней конфликтности подсистем ММС – Ц [4].

Набор  $\{\mathbf{u}^r, \mathbf{R}\mathbf{u}\}$  определяется как иерархическое равновесие по Штакельбергу.

В общем случае управление-координация  $\mathbf{u}$  ММС – Ц является обобщенным вектором с набором показателей-требований к управлению и координации.

**Методика формирования обобщенного управления двухуровневой системой на основе ИРИДИШ в бескоалиционном варианте балансировки ММС уровней.** Вводится в рассмотрение отображение

$$\mathbf{R}\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}_i = \begin{cases} \mathbf{v}_1, \mathbf{R}_2\mathbf{u}, \mathbf{R}_3\mathbf{u}, & \text{при } i = 1; \\ \mathbf{R}_1\mathbf{u}, \mathbf{v}_2, \mathbf{R}_3\mathbf{u}, & \text{при } i = 2; \\ \mathbf{R}_1\mathbf{u}, \mathbf{R}_2\mathbf{u}, \mathbf{v}_3, & \text{при } i = 3, \end{cases} \quad (13)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{u} = (\mathbf{R}_1\mathbf{u}, \mathbf{R}_2\mathbf{u}, \mathbf{R}_3\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3). \quad (14)$$

В соответствии со вторым этапом получения ИРИДИШ (11) и при условии, что  $\varphi_{\text{ИС}}$  реализует операцию бескоалиционной конфликтной ситуации, на уровне ММС – ИС формируются три отображения  $\mathbf{R}i: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}_i, i = 1, 2, 3$ , такие что

$$J_{\text{ИС}i}(\mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i} J_{\text{ИС}i}(\mathbf{u}, \mathbf{R}\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

В этом случае с помощью (14) реализуется равновесное решение с индексом  $r$  при фиксированной допустимой координации  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}^r = (\mathbf{v}_1^r = \mathbf{R}_1 \mathbf{u}, \mathbf{v}_2^r = \mathbf{R}_2 \mathbf{u}, \mathbf{v}_3^r = \mathbf{R}_3 \mathbf{u}). \quad (16)$$

Далее в соответствии с (12) формируется  $\varphi_{\Pi}$

$$\begin{aligned} J_{\Pi l}(\mathbf{u}^r, \mathbf{R}\mathbf{u}^r) &= \max_{\mathbf{u}_l} J(\mathbf{u} \parallel \mathbf{u}_l, \mathbf{R}(\mathbf{u} \parallel \mathbf{u}_l)) = \\ &= \max_{\mathbf{u}_l} J(\mathbf{u} \parallel \mathbf{u}_l, \mathbf{v}^r(\mathbf{u} \parallel \mathbf{u}_l)), \quad l = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\mathbf{u}^r = (\mathbf{u}_1^r, \mathbf{u}_2^r, \mathbf{u}_3^r), \quad (18)$$

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{u}_l = \begin{cases} \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2^r, \mathbf{u}_3^r, & \text{при } l = 1; \\ \mathbf{u}_1^r, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3^r, & \text{при } l = 2; \\ \mathbf{u}_1^r, \mathbf{u}_2^r, \mathbf{u}_3, & \text{при } l = 3. \end{cases} \quad (19)$$

В двухуровневой задаче управления-регулирования (см. рис. 2) при заданной связи  $\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{k}, t)$  полученная координация формирует вектор  $\mathbf{k} = (k_{yl}, k_{kl}, l = 1, 2)$ .

**Достаточные условия обобщенного управления при выбранной функциональной структуре системы на основе ИРИДИШ (обобщение достаточных условий Сталфорда – Вайсборда – Жуковского оптимального управления при ограничениях на управление и состояние).** Функция  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  в определена на  $\mathbf{E}^n \times \mathbf{E}^m \times \mathbf{E}^k$  со значениями в  $\mathbf{E}^n$ . В общем случае определено множество возможных состояний системы  $\mathbf{X} \subset \mathbf{E}^n$ , т. е. задано ограничение типа  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ . Допустимые стратегии  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  и  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  удовлетворяют следующим условиям [4]:

1) для любого набора  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  существует единственное абсолютно непрерывное решение  $\mathbf{x}(t)$  системы (5);

2)  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t, \mathbf{x})$  и  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t, \mathbf{x}), i, l = \overline{1, 3}$  принадлежат множеству измеримых по Борелю функций (кусочно-непрерывные функции с конечным числом точек разрыва первого рода) со значениями в  $\mathbf{E}^{m_i}$  и  $\mathbf{E}^{k_l}$  соответственно;

3)  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i, \mathbf{u}_i \in \mathbf{U}_i$  для всех  $t \in [t_0, t_K], i, l = 1, 2, 3$  и  $\mathbf{V}_i(t, \mathbf{x}), \mathbf{U}_i(t, \mathbf{x})$  – многозначные функции, которые каждому моменту времени  $t \in [t_0, t_K]$  и любому  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  ставит в соответствие некоторое подмножество пространств  $\mathbf{E}^{m_i}$  и  $\mathbf{E}^{k_l}$  соответственно.

Введем функцию Гамильтона – Келли:

$$\begin{aligned}
H_{iu}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \\
&= \frac{\partial W_{jiu}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \left( \frac{\partial W_{jiu}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) + \\
&+ f_{\text{ИС}i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3), \quad i = \overline{1,3}
\end{aligned} \tag{20}$$

при  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{ju}, j \in \mathfrak{Z}_u, t \in [t_0, t_K]$ .

Индекс  $\mathbf{u}$  в локально липшицевых (и дифференцируемых) функциях  $W_{jiu} = V_i(t, x)$  на подмножестве  $\mathbf{X}_{ju}$  разбиения

$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{X}_j (j \in \mathfrak{Z}_u), \mathbf{X}_j \cap \mathbf{X}_k = \emptyset, \cup_{j \neq k} \mathbf{X}_j = \mathbf{X} \right\}$  при наличии ограничений  $\mathbf{x} \in \mathbf{X} \in \mathbf{E}^n$  и на всем  $\mathbf{E}^n$  при отсутствии ограничений на состояние означает фиксированную стратегию ММС верхнего уровня. При этом

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{lv}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}) &= \\
&= \frac{\partial W_{jlv}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \left( \frac{\partial W_{jlv}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}) + \\
&+ f_{\text{Ц}l}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}), \quad l = \overline{1,3}
\end{aligned} \tag{21}$$

при  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{jv}, j \in \mathfrak{Z}_v, t \in [t_0, t_K]$ .

Индекс  $\mathbf{v}$  в функциях  $W_{jiv} = V_l(t, x)$  на подмножестве  $\mathbf{X}_{jv}$  разбиения  $\mathbf{D}$  означает фиксированную стратегию ММС нижнего уровня. Здесь  $\mathfrak{Z}_u$  и  $\mathfrak{Z}_v$  – счетные множества индексов, соответствующих разбиениям  $\mathbf{D}_u$  и  $\mathbf{D}_v$  множества  $\mathbf{X}$ .

Если существуют

1) для каждого фиксированного  $\mathbf{u} \in U$  разбиение множества  $\mathbf{X}$ , функции  $V_{iu}(t, \mathbf{x}), i = \overline{1,3}$  класса  $C^1$  по  $\mathbf{D}_u$  и однозначные функции  $\mathbf{v}_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), i = \overline{1,3}$  такие, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) &= \mathbf{R}_i(\mathbf{u}) \in V_i, \\
\mathbf{H}_{iu}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) &= \max_{\mathbf{v}_i \in V_i \subset \mathbf{E}^{m_i}} \mathbf{H}_{iu}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) \|\mathbf{v}_i\|, \\
\mathbf{H}_{iu}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \mathbf{R}(\mathbf{u})) &= 0, \quad i = \overline{1,3}
\end{aligned}$$

для всех  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{ju}, j \in \mathfrak{Z}_u, t \in [t_0, t_K]$ ;

2) разбиение  $\mathbf{D}_v$  множества  $\mathbf{X}$ , функции  $V_{lv}(t, \mathbf{x}), l = \overline{1,3}$  класса  $C^1$  по  $\mathbf{D}_v$  и стратегия Центра  $\mathbf{u} \in U$  такие, что

$$\mathbf{H}_{lv}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^r, \mathbf{R}\mathbf{u}^r) = \max_{\mathbf{u}_l \in U_l \subset \mathbf{E}^{m_l}} \mathbf{H}_{lv}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^r \|\mathbf{u}_l, \mathbf{R}(\mathbf{u}^r \|\mathbf{u}_l)) = 0, \quad l = \overline{1,3}$$

при  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}j\mathbf{v}, j \in \overline{3}, t \in [t_0, t_K]$ , то набор  $\{\mathbf{u}^r, \mathbf{R}_1\mathbf{u}, \mathbf{R}_2\mathbf{u}, \mathbf{R}_3\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}^r, \mathbf{R}\mathbf{u}\}$  является иерархическим равновесным решением (ИРИДИШ) в двухуровневой системе управления, при этом

$$V_{iu}(t_K, \mathbf{x}) = \Phi_{\text{ИС}i}(t_K, \mathbf{x}), \text{ при каждом } \mathbf{u} \in \mathbf{U}, i = \overline{1, 3};$$

$$V_{lv}(t_K, \mathbf{x}) = \Phi_{\text{Ц}l}(t_K, \mathbf{x}), \text{ при } \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{u}, l = \overline{1, 3},$$

«выигрыши» ММС верхнего и нижнего уровней соответственно равны

$$J_{\text{Ц}}(\mathbf{u}^r, \mathbf{R}\mathbf{u}^r) = V_v(t_0, \mathbf{x}_0) = (V_{1v}(t_0, \mathbf{x}_0), V_{2v}(t_0, \mathbf{x}_0), V_{3v}(t_0, \mathbf{x}_0)),$$

$$J_{\text{ИС}}(\mathbf{u}^r, \mathbf{R}\mathbf{u}^r) = V_u(t_0, \mathbf{x}_0) = (V_{1u}(t_0, \mathbf{x}_0), V_{2u}(t_0, \mathbf{x}_0), V_{3u}(t_0, \mathbf{x}_0)).$$

**Решение задачи синтеза оптимального закона обобщенного управления двухуровневой системы ММС – Ц, ММС – ИС в линейно-квадратической постановке. Постановка задачи.** Пусть в соответствии с [7] линейная модель ССО задана в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}_{\text{Ц}1}(t)\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}_{\text{Ц}2}(t)\mathbf{u}_2 + \mathbf{B}_{\text{ИС}1}(t)\mathbf{v}_1 + \mathbf{B}_{\text{ИС}2}(t)\mathbf{v}_2, \quad (22)$$

где  $\mathbf{u}$  – управление-координация ММС – Ц,  $\mathbf{u} \in \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$ ,  $\mathbf{u}_l \in \mathbf{U}_l \subset \mathbf{E}^{m_l}, l = \overline{1, 2}$ ;  $\mathbf{v}$  – исполнительное управление ММС – ИС,  $\mathbf{v} \in \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i \subset \mathbf{E}^{m_i}, i = \overline{1, 2}$ ;  $\mathbf{x}$  – вектор состояния ССО,  $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^n$ .

Функции эффективности подсистем ММС – Ц, связанных через ССО (22) имеют вид

$$J_{\text{Ц}l}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}^T(t_K)\mathbf{C}_l\mathbf{x}(t_K) + \int_{t_0}^{t_K} [\mathbf{x}^T\mathbf{Q}_l(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}_l^T\mathbf{D}_l(t)\mathbf{u}_l] dt, l = 1, 2. \quad (23)$$

Функции эффективности подсистем ММС – ИС, связанных через ССО (22) с координациями ММС – Ц  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ ,

$$J_{\text{ИС}i}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{x}^T(t_K)\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t_K) + \int_{t_0}^{t_K} [\mathbf{x}^T\mathbf{Q}_i(t)\mathbf{x} + 2\mathbf{u}^T\mathbf{P}_i(t)\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^T\mathbf{D}_i(t)\mathbf{v}_i] dt, i = 1, 2, \quad (24)$$

где  $\mathbf{u}^T\mathbf{P}_i(t) = [\mathbf{u}_1^T\mathbf{P}_{i1}(t) + \mathbf{u}_2^T\mathbf{P}_{i2}(t)]$  – влияние координации в показателях. Здесь  $t_0, t_K = \text{const} > 0$ , элементы всех матриц непрерывны при  $t \in [t_0, t_K]$ ; матрицы  $\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_i$  при  $l = 1, 2, i = 1, 2$  постоянны; матрицы  $\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_i, \mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_i, \mathbf{D}_p, \mathbf{D}_i$  при  $l = 1, 2, i = 1, 2$  симметричны, а матрицы  $\mathbf{D}_p, \mathbf{D}_i$  при  $l = 1, 2, i = 1, 2$  определенно отрицательны.

Допустимые структуры управлений  $\mathbf{u}_p$ ,  $\mathbf{v}_i$  подсистем ММС – Ц и ММС – ИС ограничены функциями вида

$$\mathbf{u}_l(t, \mathbf{x}) = \mathbf{K}_{u_l}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{v}_i(t, \mathbf{x}) = \mathbf{K}_{v_i}(t)\mathbf{x}, \quad l = 1, 2, i = 1, 2, \quad (25)$$

где матрицы  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_i$  непрерывны.

Пусть

- 1) матрицы  $\mathbf{D}_p$ ,  $\mathbf{D}_i$ ,  $l = 1, 2, i = 1, 2$  определенно отрицательны;
- 2) при любых непрерывных на  $[t_0, t_k]$  матрицах  $\mathbf{K}_{u_l}(t)$ ,  $l = 1, 2$  система

$$\begin{aligned} & \dot{\Theta}_{iu} + 2\Theta_{iu} \left( \mathbf{A} - \mathbf{M}_1\mathbf{K}_{u_1} - \mathbf{M}_2\mathbf{K}_{u_2} - \bar{\mathbf{B}}_j\Theta_{ju} \right) + \mathbf{Q}_i - \\ & - \left( \mathbf{K}_{u_1}^T \bar{\mathbf{P}}_{i1} \mathbf{K}_{u_1} + \mathbf{K}_{u_2}^T \bar{\mathbf{P}}_{i2} \mathbf{K}_{u_2} + \mathbf{K}_{u_1}^T \bar{\mathbf{P}}_{i12} \mathbf{K}_{u_2} + \mathbf{K}_{u_2}^T \bar{\mathbf{P}}_{i12}^T \mathbf{K}_{u_1} \right) - \\ & - \left( \mathbf{K}_{u_1}^T \mathbf{L}_{i1} \Theta_{iu} + \mathbf{K}_{u_2}^T \mathbf{L}_{i2} \Theta_{iu} + \Theta_{iu} \mathbf{L}_{i1}^T \mathbf{K}_{u_1} + \Theta_{iu} \mathbf{L}_{i2}^T \mathbf{K}_{u_2} \right) - \\ & - \Theta_{iu} \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{Q}_{iu} = 0, \quad \Theta_{iu}(t_k) = \mathbf{C}_i, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\mathbf{M}_l = \mathbf{B}_{ИС1} \mathbf{D}_{ИС1}^{-1} \mathbf{P}_{l1}^T + \mathbf{B}_{ИС2} \mathbf{D}_{ИС2}^{-1} \mathbf{P}_{2l}^T - \mathbf{B}_{Цl}, \quad (l = 1, 2),$$

$$\bar{\mathbf{B}}_i = \mathbf{B}_{ИСi} \mathbf{D}_{ИСi}^{-1} \mathbf{B}_{ИСi}^T, \quad \bar{\mathbf{B}}_i^T = \bar{\mathbf{B}}_i, \quad (i = 1, 2),$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \mathbf{D}_{ИСi}^{-1} \mathbf{P}_{ij}^T, \quad (i, j = 1, 2),$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{i12} = \mathbf{P}_{i1} \mathbf{D}_{ИСi}^{-1} \mathbf{P}_{i2}^T, \quad \bar{\mathbf{P}}_{i21} = \bar{\mathbf{P}}_{i12}^T, \quad (i = 1, 2),$$

$$\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \mathbf{D}_{ИСi}^{-1} \mathbf{B}_i^T, \quad \mathbf{L}_{ji} = \mathbf{L}_{ij}^T, \quad (i, j = 1, 2),$$

имеет продолжимое на  $[t_0, t_k]$  решение;

- 3) система матричных уравнений

$$\begin{aligned} & \dot{\mathbf{K}}_{iu_l} + \mathbf{K}_{iu_l}^T \left[ \mathbf{A} - \mathbf{M}_l \mathbf{K}_{u_l} - \mathbf{M}_p \mathbf{K}_{u_p} - \bar{\mathbf{B}}_1 \Theta_{1u} - \bar{\mathbf{B}}_2 \Theta_{2u} \right] - \\ & - \mathbf{K}_{ju_l}^T \bar{\mathbf{B}}_j \Theta_{ju} - 2\mathbf{M}_l^T \Theta_{iu} - 2\bar{\mathbf{P}}_{il} \mathbf{K}_{u_l} - 2\bar{\mathbf{P}}_{ilp} \mathbf{K}_{u_p} = 0, \\ & \mathbf{K}_{iu_l}(t_k) = 0, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j; l, p = 1, 2; l \neq p); \\ & \dot{\Theta}_l + 2\Theta_l \left( \mathbf{A} - \mathbf{M}_1 \hat{\mathbf{K}}_1 \Theta_1 - \mathbf{M}_2 \hat{\mathbf{K}}_2 \Theta_2 - \bar{\mathbf{B}}_1 \Theta_{1u^r} - \bar{\mathbf{B}}_2 \Theta_{2u^r} \right) - \\ & - \Theta_l \hat{\mathbf{K}}_l^T \mathbf{D}_l \hat{\mathbf{K}}_l \Theta_l = 0, \quad \Theta_l(t_k) = \mathbf{C}_l, \quad (l = 1, 2); \\ & \dot{\Theta}_i + 2\Theta_i \left( \mathbf{A} - \mathbf{M}_1 \mathbf{K}_{u_1} - \mathbf{M}_2 \mathbf{K}_{u_2} - \bar{\mathbf{B}}_j \Theta_j \right) + \mathbf{Q}_i - \\ & - \left( \mathbf{K}_{u_1}^T \bar{\mathbf{P}}_{i1} \mathbf{K}_{u_1} + \mathbf{K}_{u_2}^T \bar{\mathbf{P}}_{i2} \mathbf{K}_{u_2} + \mathbf{K}_{u_1}^T \bar{\mathbf{P}}_{i12} \mathbf{K}_{u_2} + \mathbf{K}_{u_2}^T \bar{\mathbf{P}}_{i12}^T \mathbf{K}_{u_1} \right) - \\ & - \left( \mathbf{K}_{u_1}^T \mathbf{L}_{i1} \Theta_i + \mathbf{K}_{u_2}^T \mathbf{L}_{i2} \Theta_i + \Theta_i \mathbf{L}_{i1}^T \mathbf{K}_{u_1} + \Theta_i \mathbf{L}_{i2}^T \mathbf{K}_{u_2} \right) - \\ & - \Theta_i \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{Q}_i = 0, \quad \Theta_i(t_k) = \mathbf{C}_i, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j), \end{aligned} \quad (27)$$



где

$$\begin{aligned}\Theta_i &= \Theta_{iu^r}, \quad (i = 1, 2), \\ \mathbf{K}_{u_l} &= \hat{\mathbf{K}}_l \Theta_l, \quad (l = 1, 2), \\ \hat{\mathbf{K}}_l &= \mathbf{D}_l^{-1} \left( \mathbf{M}_l^T + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{1u_l}^T \bar{\mathbf{B}}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{2u_l}^T \bar{\mathbf{B}}_2 \right),\end{aligned}$$

допускает продолжимое на интервале  $[t_0, t_K]$  решение

$$(\mathbf{K}_{iu^r}, i = 1, 2; l = 1, 2; \Theta_l, l = 1, 2; \Theta_p, i = 1, 2).$$

В результате совместного решения системы матричных дифференциальных уравнений пункта три получаем равновесные решения на уровне ММС – Ц (в данной задаче эти решения являются также координацией ММС – ИС):

$$\mathbf{u}_l^r(t, \mathbf{x}) = \mathbf{D}_l^{-1} \left( \mathbf{M}_l^T + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{1u_l}^T \bar{\mathbf{B}}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_{2u_l}^T \bar{\mathbf{B}}_2 \right) \Theta_l \mathbf{x}, \quad (l = 1, 2). \quad (28)$$

Эти решения, совместно с равновесными решениями ММС – ИС

$$\mathbf{v}^r(t, \mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) = (\mathbf{R}_1(\mathbf{u}), \mathbf{R}_2(\mathbf{u})) = (\mathbf{v}_1^r, \mathbf{v}_2^r), \quad (29)$$

при этом

$$\mathbf{v}_i^r(t, \mathbf{x}) = \mathbf{R}_i(\mathbf{u}) = -\mathbf{D}_{ИСi}^{-1} [\mathbf{P}_i^T \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{B}_{ИСi}^T \Theta_{iu^r} \mathbf{x}], \quad (i = 1, 2), \quad (30)$$

где

$$\Theta_{iu} = \Theta_{iu^r} = \Theta_p, \quad \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^r(t, \mathbf{x}), \quad (31)$$

определяют ИРИДИШ в двухуровневой системе из ММС – Ц и ММС – ИС в рамках линейно-квадратической постановки. Причем оптимальные равновесные показатели ММС – Ц и ММС – ИС можно определить из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}J_{Ц} &= \mathbf{x}_0^T \Theta_l(t_0) \mathbf{x}_0, \quad (l = 1, 2), \\ J_{ИСi} &= \mathbf{x}_0^T \Theta_i(t_0) \mathbf{x}_0, \quad (i = 1, 2), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0).\end{aligned} \quad (32)$$

Определенное приближение в методах получения ИРИДИШ, которое позволяет решить задачу в общем случае описания (5) – (10), основывается на стратегиях в виде приближенного ПКЗУ и его параметризации на программном такте ПКЗУ.

**Получение модели ССО.** Необходимо, чтобы модель была представлена в виде (22). В основу модели ложится описание движения

ЛА представленного системами дифференциальных уравнений (1) и (4), а также описание структурной схемы двухуровневой двухканальной системы стабилизации – наведения (см. рис. 8).

Далее следует линеаризовать дифференциальные уравнения движения ЛА. Для этого параметры вектора состояния раскладываются в ряд Тейлора с точностью до малой первого порядка. При этом осуществляется переход к движению в отклонениях от опорной траектории, параметры которой задаются перед расчетом управления и его последующей оптимизацией.

Считается, что цель летит по прямолинейной траектории с начальными координатами

$$\Psi_{\text{ц}} = 0,45 \text{ рад}; \Theta_{\text{ц}} = 0,40 \text{ рад}; X_{\text{ц}} = -380 \text{ м}; Y_{\text{ц}} = 760 \text{ м}; Z_{\text{ц}} = -400 \text{ м}.$$

Скорость цели составляет 600 м/с, скорость ЛА – 800 м/с.

Исходные координаты ЛА и направление опорной траектории

$$\Psi_0 = 2,35 \text{ рад}; \Theta_0 = 0,79 \text{ рад}; X_0 = 50 \text{ м}; Y_0 = 0 \text{ м}; Z_0 = 100 \text{ м}.$$

Формулы для косинуса и синуса от разности углов

$$\cos(\Psi - \chi) = \cos\Psi\cos\chi + \sin\Psi\sin\chi,$$

$$\sin(\Psi - \chi) = \sin\Psi\cos\chi - \cos\Psi\sin\chi.$$

Разложение в ряд Тейлора с точностью до малой первого порядка

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta = \Theta_0 + \Delta\Theta; \\ \Psi = \Psi_0 + \Delta\Psi; \\ X = X_0 + \Delta X; \\ Y = Y_0 + \Delta Y; \\ Z = Z_0 + \Delta Z; \\ R = R_0 + \Delta R; \\ \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi; \\ \chi = \chi_0 + \Delta\chi; \\ j_{HY}^{\Pi} = j_{HY_0} + j_{HY}; \\ j_{HZ}^{\Pi} = j_{HZ_0} + j_{HZ}. \end{array} \right.$$

Далее, с учетом данных формул и допущений, линеаризуется система (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Theta} = g \sin \Theta_0 \cdot \Theta / V + j_{HY} / V + (j_{HY_0} - g \cos \Theta_0) / V; \\ \dot{\Psi} = -j_{HZ_0} \sin \Theta_0 \cdot \Theta / (V \cos^2 \Theta_0) - j_{HZ} / (V \cos \Theta_0) - j_{HZ_0} / (V \cos \Theta_0); \\ \dot{X} = -V \sin \Theta_0 \cdot \cos \Psi_0 \cdot \Theta - V \cos \Theta_0 \cdot \sin \Psi_0 \cdot \Psi + V \cos \Theta_0 \cdot \cos \Psi_0; \\ \dot{Y} = V \cos \Theta_0 \cdot \Theta + V \cdot \sin \Theta_0; \\ \dot{Z} = V \sin \Theta_0 \cdot \sin \Psi_0 \cdot \Theta - V \cos \Theta_0 \cdot \cos \Psi_0 \cdot \Psi - V \cos \Theta_0 \cdot \sin \Psi_0. \end{array} \right.$$

Следующим шагом является описание общей модели (см. рис. 7) с помощью дифференциальных уравнений и выделение тех функций, которые войдут в общий вектор параметра состояний. В итоге вектор состояния системы будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{x}^T = [X, Y, Z, \delta_B, \delta_H, p_1, p_2, m_1, m_2, \chi, \varphi, \Theta, \Psi].$$

**Формирование функций эффективности для подсистем ММС – Ц и ММС – ИС.** Канал стабилизации сначала обрабатывает возмущения  $M_{\text{возм}}$ . С выбором  $k_{\text{д.г}}$  и  $k_{\text{д.л.у}}$  для каждого из каналов (тангажа или рыскания). А затем  $k_{\text{д.г}}$  и  $k_{\text{д.л.у}}$  вместе с  $k_x$  и  $k_y$  корректируются для повышения точности и качества наведения с учетом связей между уровнями иерархии. Первая пара параметров влияет на нормальные ускорения, а значит на кривизну траектории и качество наведения, вторая пара на точность наведения  $R$ .

На уровне наведения функции эффективности складываются: 1) из векторного пролета  $J_{\text{Ц11}}, J_{\text{Ц21}}$ ; 2) качества наведения по каждому из каналов  $J_{\text{Ц21}}, J_{\text{Ц22}}$ ; 3) минимизации энергозатрат на управление  $J_{\text{Ц13}}, J_{\text{Ц23}}$ .

Функции эффективности на уровне регулирования складываются: 1) из кривизны траектории к концу наведения  $J_{\text{ИС11}}, J_{\text{ИС21}}$ ; 2) качества стабилизации по каждому из каналов  $J_{\text{ИС12}}, J_{\text{ИС22}}$ ; 3) минимизации энергозатрат на управление  $J_{\text{ИС13}}, J_{\text{ИС23}}$ .

Для каждого из каналов и на каждом из уровней формируется свой показатель эффективности на основании трех составляющих (см. рис. 8):

$$\begin{aligned} J_{\text{Ц1}} &= J_{\text{Ц11}} + J_{\text{Ц12}} + J_{\text{Ц13}}, \\ J_{\text{Ц2}} &= J_{\text{Ц21}} + J_{\text{Ц22}} + J_{\text{Ц23}}, \\ J_{\text{ИС1}} &= J_{\text{ИС11}} + J_{\text{ИС12}} + J_{\text{ИС13}}, \\ J_{\text{ИС2}} &= J_{\text{ИС21}} + J_{\text{ИС22}} + J_{\text{ИС23}}. \end{aligned}$$

Для каждого из уровней формируется общий показатель с учетом веса каждого из каналов:

$$J_1 = \alpha_{11}J_{Ц1} + \alpha_{12}J_{Ц2},$$
$$J_2 = \alpha_{21}J_{ИС1} + \alpha_{22}J_{ИС2}.$$

**Получение равновесных решений для управлений.** На основе матричной системы дифференциальных уравнений описания ССО и, получив функции эффективности, можно получить матричные уравнения, входящие в систему (27). Подставив в них все известные значения, проведя необходимые преобразования, может быть получена система дифференциальных уравнений, связанных между собой. С помощью пакета MATLAB можно найти численные решения данной задачи. Формируется «сеть» решений вследствие того, что варьируются управляющие параметры на каждом из уровней для получения таблицы значений для каждого из параметров.

В результате преобразований и после подстановки управления на уровне наведения

$$u_1 = F_1^T x;$$
$$u_2 = F_2^T x;$$

где  $F_1 = F_1(k, t)$ ,  $F_2 = F_2(k, t)$ .

В свою очередь, управляющие воздействия на уровне стабилизации

$$v_1 = v_1(k, u, x, t), v_2 = v_2(k, u, x, t).$$

**Определение области показателей и траектории движения ЛА.** На следующем этапе осуществляются подстановку найденных управлений в первоначальную матричную систему уравнений, описывающих ССО.

Используя подсистему Momdis вычислительного пакета MATLAB, формируют области показателей эффективности. Для этого осуществляется введение описанной модели и ограничений. Показатели разбиваются на пары по уровням иерархии:

$$J_1 = \alpha_{11}J_{Ц1} + \alpha_{12}J_{Ц2},$$
$$J_2 = \alpha_{21}J_{ИС1} + \alpha_{22}J_{ИС2}.$$

На области показателей можно провести оптимизацию управлений, которые зависят от управляющих параметров на каждом уровне иерархии. Благодаря перекрестным связям между двумя рассмотренными каналами и взаимосвязанности уровней видно, что параметры влияют одновременно на все управления, а не только на данный канал или уровень.

Система наведения – стабилизации ЛА с требованиями точности, перерегулирования, времени переходного процесса и устойчивости, предъявляемыми в виде векторного критерия, представляет собой типичную ММС в условиях исходной структурной несогласованности, в которой имеют место перекрестные связи между каналами.

Рассмотрим особенности проектирования ММС. В многоуровневой структуре сложной системы можно выделить три вида подсистем: система – объект, ММС и полная иерархическая система. То есть ММС – горизонтальный ряд в общем случае равнозначных объектов. В рамках ММС формируется класс задач оптимизации, в котором известные подходы оптимизации для обеспечения эффективности объекта (вариационные методы, принцип максимума, методы динамического и нелинейного программирования) существенно дополняются игровыми подходами с собственными принципами оптимизации для обеспечения уравновешенного (стабильного) взаимодействия, которое способствует достижению эффективности ММС в условиях естественной несогласованности. Методы решения в рамках данных принципов базируются на многообъектности структуры, многокритериальности задач и свойствах конфликтного взаимодействия объектов. Таким образом, в задачах многообъектной многокритериальной оптимизации заложены фундаментальные понятия стабильности, эффективности и стабильно-эффективного компромисса (СТЭК) [1].

Расчет проводится с использованием пакета MATLAB и Simulink Individual R2010. Предварительно был проведен сетевой анализ области показателей для нормировки их таким образом, что все показатели были приведены к одному диапазону:

$$J_{1i}^H = (J_{1i} - J_{1\min}) / (J_{1\max} - J_{1\min});$$

$$J_{2i}^H = (J_{2i} - J_{2\min}) / (J_{2\max} - J_{2\min}).$$

При этом интервалы изменения параметров выбраны таким образом, чтобы гарантировать устойчивость системы.

Анализируя полученную область показателей, представленную на рис. 9, можно сказать, что Парето-граница будет проходить по крайнему левому ряду точек. Оптимальной будет единственная точка СТЭК при равенстве значений коэффициентов  $a_{ij} = 0,5$  в силу равнозначности всех показателей.

На основе построенной области и выбранных параметров, соответствующих данной оптимальной точке, строится траектория полета, полученная в результате наведения на прямолинейно движущуюся цель и представленная на рис. 10. На графике видно, что траектории

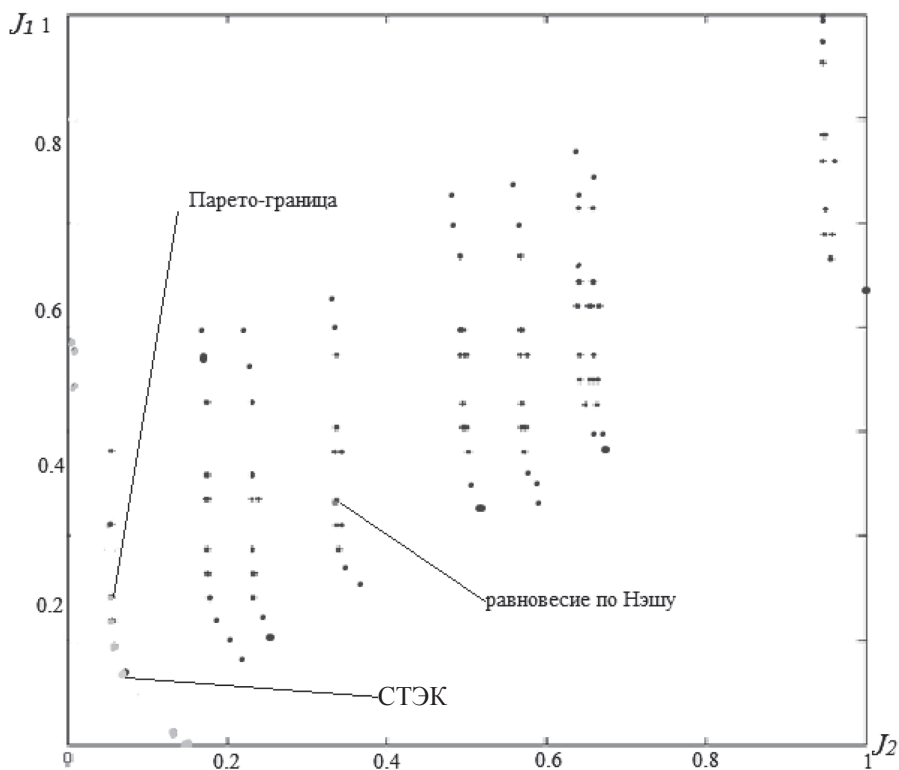


Рис 9. Область показателей и полученное решение

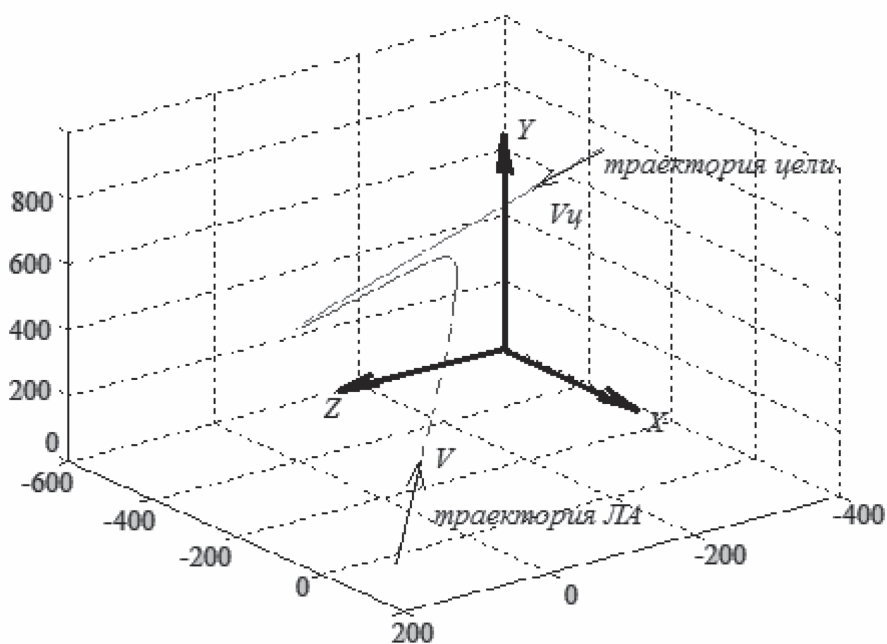


Рис. 10. Траектория наведения ЛА на цель без учета ограничений на управление

постепенно сближаются и, с учетом погрешности наведения, объект поражает цель.

Траектория получена без учета ограничений на величину управления. Управление включается уже на последнем участке движения при приближении к цели, поэтому траектория получается довольно крутой. Это свидетельствует о том, что на ЛА будут действовать большие перегрузки.

В заключении следует отметить, что в работе сформирован алгоритм многокритериальной оптимизации двухканальной двухуровневой иерархической системы на основе уравнивания (балансировки) каналов на основе ИРИДИШ с последующей Парето-оптимизацией. Данный алгоритм оптимизации системы стабилизации – наведения содержит три этапа.

1) Описание модели ССО в специальном виде (22) с помощью линеаризации дифференциальных уравнений описания движения ЛА и описания самой двухуровневой модели с учетом линеаризации. Линеаризация проводилась методом разложения в ряд Тейлора с точностью до малой первого порядка. В ходе преобразований осуществлен переход от описания модели в абсолютных координатах к описанию модели в отклонениях от опорной траектории.

2) Получение для двухуровневой двухканальной иерархической системы с перекрестными связями равновесного решения – управлений на обоих уровнях иерархии, которые будут использованы для оптимизации каналов по эффективности. Решение системы матричных дифференциальных уравнений, основанных на описании ССО и параметрах показателей эффективности на каждом из уровней и в каждом из каналов.

3) Использование полученных управлений для построения области показателей, на которой производится дальнейшая Парето-оптимизация и нахождение СТЭК в форме равновесно-арбитражного решения, где свойство стабильности обеспечивается устойчивостью уравнивания.

Уравнивание реализует один из новых подходов многокритериальной оптимизации на основе компромиссов. Арбитражное решение удовлетворяет условию:  $J = (J_1 - J_1^H) (J_2 - J_2^H) \rightarrow \max$ ;  $J_1 \leq J_1^H$ ,  $J_2 \leq J_2^H$ , где  $J_1^H, J_2^H$  – компоненты вектора показателей в точке равновесия по Нэшу. В результате в качестве решения получаем одну из точек Парето-границы, которая является ближайшей к точке уравнивания. В итоге удается достичь эффективности, которая обеспечивается оптимальностью решения по Парето.

Исследования показали, что значения параметров, рассчитанные с использованием элементов теории ММС не только обеспечивают

оптимальное управление в системе стабилизации – наведения с перекрестными связями, но и требуемое качество работы по статической точности, перерегулированию.

В перспективе предполагается решение поставленной задачи при условии структурных усложнений, введения третьего канала по углу крена. Также предполагается в дальнейшем учесть факторы, которые в представленной работе не были учтены или были приняты постоянными. Такими факторами являются изменение траектории цели во время наведения, учет нелинейностей в каналах управления и стабилизации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронов Е. М. Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных компромиссов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 576 с.
2. Пупков К. А., Воронов Е. М., Коньков В. Г., Карпунин А. А. Структурная сложность интеллектуальных систем управления // Интеллектуальные системы: Труды Восьмого международного симпозиума. – М.: РУСАКИ, 2008. – С. 29–34.
3. Лебедев А. А., Карбанов В. А. Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1965. – 528 с.
4. Воронов Е. М., Карпунин А. А., Серов В. А. Иерархическое равновесие в многоуровневых системах управления // Вестник РУДН. Инженерные исследования. – 2008. – № 4. – С. 18–29.
5. Равновесно-арбитражная многокритериальная балансировка каналов в многосвязном регулировании и управлении / Е. М. Воронов и др. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2007. – № 4. – С. 99–119.
6. Плотников В. Л., Зверев В. Ю. Принятие решений в системах управления. Теория и проектирование алгоритмов принятия проектных решений в многообъектных распределенных системах управления. Ч. 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. – 146 с.
7. Воронов Е. М., Карпунин А. А., Серов В. А. Алгоритмы иерархической оптимизации в двухуровневой многоканальной задаче «управления-регулирования» // Вестник РУДН. Инженерные исследования. – 2009. – № 3. – С. 1–18.

Статья поступила в редакцию 30.05.2012