

Ю. Д. Каплунов, Д. А. Приказчиков

ПОСТАНОВКА СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В РАМКАХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ

Обсуждаются смешанные задачи для упругой полуплоскости в рамках асимптотической модели для волны Рэлея. Использование эллиптико-гиперболического дуализма позволяет существенно упростить процедуру определения вклада поверхностных волн в общее динамическое поведение. В частности, для задачи о действии вертикального штампа и задачи о полуплоскости с гибкой нерастяжимой накладкой решения выражаются в терминах одной гармонической функции. В случае более общей смешанной задачи, когда на части поверхности заданы оба перемещения, приближенная формулировка содержит две гармонические функции.

E-mail: prikazchikovda@yandex.ru

Ключевые слова: смешанные задачи, асимптотическая модель, волна Рэлея, гармоническая функция.

Исследование приповерхностной динамики упругих тел является важной задачей механики сплошных сред, имеющей многочисленные инженерные приложения. Хорошо известно, что вблизи поверхности основной вклад в динамическую картину вносится волной Рэлея. Поскольку решение задачи в точной постановке учитывает результат распространения упругих волн всех типов, предпринимаются попытки выделить вклад поверхностной волны (см., например, [1, 2]). Асимптотическая модель волны Рэлея [2] была затем выведена в работе [3] с помощью более общего представления, использующего гармонические функции [4, 5]. Эта модель улучшила понимание свойств волны Рэлея, в частности выявила ее двойственную эллиптико-гиперболическую природу. При этом она позволила существенно упростить постановку задач приповерхностной динамики, включая задачи о подвижной нагрузке на упругой полуплоскости [6, 7]. Асимптотическая модель [3] была также распространена на случай трехмерного упругого полупространства [8]. Кроме того, получены соответствующие обобщения для интерфейсных волн Стоунли и Шольте—Гоголадзе [9].

В настоящей работе на основе асимптотической модели для волны Рэлея рассматриваются приближенные постановки смешанных

задач для упругой полуплоскости. Задача о действии вертикального штампа в рамках этой модели ранее рассматривалась в работе [10]. В развитие [10] обсуждается приближенная постановка задачи для упругой полуплоскости, часть поверхности которой покрыта гибкой нерастяжимой мембраной, а также для более общей смешанной задачи, для которой на части поверхности заданы оба перемещения. Показано, что в первой из упомянутых задач, как и в работе [10], поле волны Рэлея может быть выражено в терминах одной гармонической функции. Это является существенным упрощением по сравнению с традиционной формулировкой задачи. Рассмотрен пример, иллюстрирующий эффективность предлагаемого подхода. Во втором случае аналогичная скалярная постановка оказывается невозможной; для него решение выражается через две гармонические функции. Полученные результаты могут найти ряд интересных приложений, в частности при исследовании распространения трещин в упругих телах [11].

Асимптотическая модель для волны Рэлея в случае упругой полуплоскости. Приведем краткое описание асимптотической модели для волны Рэлея [3]. Рассмотрим упругую полуплоскость $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \infty$. В случае граничных условий, заданных в терминах напряжений,

$$\sigma_{yy}|_{y=0} = P(x, t); \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = Q(x, t), \quad (1)$$

затухание в глубь среды описывается псевдостатическими эллиптическими уравнениями

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

где φ и ψ – упругие потенциалы Ламе; $k_m = \left(1 - \frac{c_R^2}{c_m^2}\right)^{1/2}$ — постоянные, $m=1, 2$ (c_1 , c_2 , c_R — скорость распространения продольной, поперечной и рэлеевской волны соответственно).

Возможность представления поля волны Рэлея в терминах одной гармонической функции, установленная в работе [4], позволяет связать потенциалы соотношениями

$$\psi(x, k_2 y, t) = \frac{2k_1}{1+k_2^2} \varphi^*(x, k_2 y, t); \quad \varphi(x, k_2 y, t) = -\frac{2k_2}{1+k_2^2} \psi^*(x, k_2 y, t), \quad (4)$$

где знак * обозначает гармоническое сопряжение. Очевидно, что в силу линейности задачи можно отдельно рассматривать случаи нормальной ($Q=0$) и тангенциальной ($P=0$) нагрузки. Для нормальной нагрузки распространение волны Рэлея вдоль границы полуплоскости описывается гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1+k_2^2}{2\mu B} P, \quad (5)$$

где $B = \frac{k_1}{k_2}(1-k_2^2) + \frac{k_2}{k_1}(1-k_1^2) - (1-k_4^2)$ — упругая постоянная, вычисленная в работе [3].

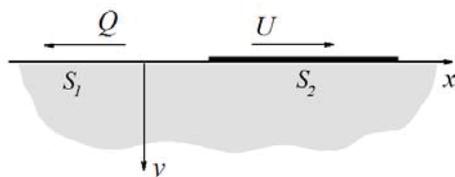
В случае тангенциальной нагрузки

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1+k_2^2}{2\mu B} Q. \quad (6)$$

Задача об упругой полуплоскости с накладкой в виде гибкой нерастяжимой мембраны. Рассмотрим смешанную задачу для упругой полуплоскости, часть которой покрыта гибкой нерастяжимой мембраной (рисунок). При этом будем считать, что часть поверхности под накладкой сдвигается в горизонтальном направлении, а нормальные напряжения отсутствуют вдоль всей поверхности. Обозначим часть поверхности под накладкой через S_2 , а остальную ее часть — через S_1 ($S_1 \cup S_2 = R$). Тогда граничные условия примут вид

$$\sigma_{yy}|_{y=0} = 0, \quad x \in R; \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = Q(x, t), \quad x \in S_1; \quad u|_{y=0} = U(x, t), \quad x \in S_2, \quad (7)$$

где U — заданное перемещение поверхности под накладкой; Q — тангенциальное напряжение на остальной части поверхности.



Упругая полуплоскость с накладкой

Используя приближенную формулировку для поля волны Рэлея, приведенную выше, получим в случае граничных условий (7)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1+k_2^2}{2\mu B} Q, \quad x \in S_1; \quad \frac{1-k_2^2}{1+k_2^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} = U(x, t), \quad x \in S_2. \quad (8)$$

Предлагаемая постановка смешанной задачи (3), (8) является существенным упрощением традиционной формулировки, поскольку исходная векторная задача плоской теории упругости сведена к скалярной задаче для гармонической функции.

В качестве примера изучим стационарное движение накладки $U(x, t) = g(x - ct)$, предполагая для простоты $Q = 0$. В результате придем к эллиптической задаче для сдвигового потенциала ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} &= 0, \quad \xi \in S'_1, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} g(\xi), \quad \xi \in S'_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\xi = x - ct$ — подвижная координата; S'_1 и S'_2 — части поверхности, соответствующие S_1 и S_2 в подвижной системе координат.

Используя первое уравнение системы (9) и выполнив замену переменной $\eta = k_2 y$, перепишем эту систему в терминах функции

$$\chi(\xi, \eta) = \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (10)$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial \eta}(\xi, 0) &= 0, \quad \xi \in S'_1, \\ \chi(\xi, 0) &= g(\xi), \quad \xi \in S'_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулировка (11) соответствует классической смешанной задаче для уравнения Лапласа. Отметим также, что компоненты перемещений и напряжений выражаются через вспомогательную функцию χ . Например, горизонтальное перемещение

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = (1-k_2^2) \left[\frac{1}{2k_1 k_2} \chi(\xi, k_1 y) - \frac{1}{1+k_2^2} \chi(\xi, k_2 y) \right]. \quad (12)$$

В целях иллюстрации рассмотрим накладку, для которой $g(\xi) = ae^{-b\xi}$ ($a, b > 0$). Тогда

$$\chi(\xi, \eta) = b \operatorname{Re} \left\{ \exp(-a\kappa) \left(1 - \Phi(\sqrt{-a\kappa}) \right) \right\}, \quad (13)$$

где $\kappa = \xi + i\eta$; $\Phi(t)$ — функция ошибок [12].

Задача о действии штампа. Для полноты изложения приведем приближенную постановку задачи о действии вертикального штампа, ранее предложенную в работе [10]. В этом случае граничные условия имеют вид

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = 0, \quad x \in R; \quad \sigma_{yy}|_{y=0} = P(x, t), \quad x \in S_1; \quad v|_{y=0} = V(x, t), \quad x \in S_2. \quad (14)$$

Приближенная формулировка задачи для продольного потенциала φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{1+k_2^2}{2\mu B} P, \quad x \in S_1, \quad y=0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} V(x, t), \quad x \in S_2, \quad y=0. \end{aligned} \quad (15)$$

Векторная смешанная задача. Рассмотрим теперь более общую задачу, для которой на части поверхности заданы оба перемещения, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}|_{y=0} &= Q(x, t), \quad \sigma_{yy}|_{y=0} = P(x, t), \quad x \in S_1; \\ u|_{y=0} &= U(x, t), \quad v|_{y=0} = V(x, t), \quad x \in S_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Искомое решение можно представить в виде суммы решений двух подзадач, в первой из которых предполагается отсутствие тангенциальных нагрузок вдоль всей поверхности, в частности $Q=0$, $x \in S_1$, а во второй — отсутствие нормальных напряжений вдоль всей поверхности, в частности $P=0$, $x \in S_1$.

Обозначим через φ_P и ψ_P решения для потенциалов, возникающие в первой задаче, а через φ_Q и ψ_Q — их аналоги в случае второй задачи. При этом, очевидно, общее решение (16) выражается в виде суммы

$$\varphi = \varphi_P + \varphi_Q; \quad \psi = \psi_P + \psi_Q. \quad (17)$$

В результате придем к приближенной векторной формулировке в терминах двух потенциалов φ_P и ψ_Q :

$$\frac{\partial^2 \varphi_P}{\partial y^2} + k_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_P}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_Q}{\partial y^2} + k_2^2 \frac{\partial^2 \psi_Q}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_P}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \varphi_P}{\partial t^2} = \frac{1+k_2^2}{2\mu B} P, \quad \frac{\partial^2 \psi_Q}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2} \frac{\partial^2 \psi_Q}{\partial t^2} = \frac{1+k_2^2}{2\mu B} Q, \quad x \in S_1, \quad y=0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \psi_Q}{\partial x} - \frac{2}{1+k_2^2} \frac{\partial \varphi_P}{\partial y} = \frac{2}{1-k_2^2} V(x, t), \quad \frac{\partial \varphi_P}{\partial x} + \frac{2}{1+k_2^2} \frac{\partial \psi_Q}{\partial y} = \frac{2}{1-k_2^2} U(x, t), \quad x \in S_2, \quad y=0,$$

$$\psi_P(x, k_2 y, t) = \frac{2k_1}{1+k_2^2} \varphi_P^*(x, k_2 y, t), \quad \varphi_Q(x, k_1 y, t) = -\frac{2k_2}{1+k_2^2} \psi_Q^*(x, k_1 y, t).$$

Заключение. Постановка смешанных задач для упругой полуплоскости с использованием асимптотической модели для волны Рэлея представляет существенное упрощение известного подхода, исходящего из динамических уравнений плоской задачи теории упругости. В частности, задачи о взаимодействии упругой полуплоскости с вертикальным штампом и гибкой нерастяжимой накладкой формулируются в терминах одной гармонической функции. Для более сложной смешанной задачи, рассмотренной в работе, приближенная постановка также оказывается проще традиционной, но при этом, однако, содержит уже две гармонические функции.

Исследования выполнены при поддержке гранта Президента РФ МК-3150.2012.8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Achenbach J. D. Explicit solutions for carrier waves supporting surface waves and plate waves // *Wave Motion*. – 1998. – Vol. 28. – P. 89–97.
2. Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Асимптотическая модель дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // *ДАН*. – 2004. – Т. 395, № 4. – С. 482–485.
3. Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D. A. Explicit models for elastic and piezoelectric surface waves // *IMA J. of Applied Mathematics*. – 2006. – Vol. 71. – P. 768–782.
4. Chadwick P. Surface and interfacial waves of arbitrary form in isotropic elastic media // *J. of Elasticity*. – 1976. – Vol. 6. – P. 73–80.

5. Kiselev A. P., Parker D. F. Omni-directional Rayleigh, Stoneley and Scholte waves with general time dependence // Proc. Of the Royal Soc. London, Ser. A. – 2010. – Vol. 466. – P. 2241–2258.
6. Демченко А. Т., Каплунов Ю. Д., Приказчиков Д. А., Алейников И. А. Применение асимптотической модели для волны Рэлея к задаче о подвижной нагрузке на упругой полуплоскости // Наука и техника транспорта. – 2005. – Вып. 3. – С. 82–85.
7. Kaplunov J., Nolde E., Prikazchikov D. A. A revisit to the moving load problem using an asymptotic model for the Rayleigh wave // Wave Motion. – 2010. – Vol. 47. – P. 440–451.
8. Dai H.-H., Kaplunov J., Prikazchikov D. A. A long wave model for the surface elastic wave in a coated half space // Proc. Of the Royal Soc. London, Ser. A. – 2010. – Vol. 466. – P. 3097–3116.
9. Приказчиков Д. А. Развитие асимптотических моделей поверхностных и интерфейсных волн // Вестн. НГУ им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – Т. 4. – Вып 4. – С. 1713–1715.
10. Erbas B., Kaplunov J., Prikazchikov D. A. The Rayleigh wave field in mixed problems for a half-plane // IMA J. of Applied Mathematics. – 2012. – To appear.
11. Bratov V., Petrov Yu., Utkin. Transient near tip fields in crack dynamics // Science China. Physics, Mechanics & Astronomy. – 2011. – Vol. 54, N 7 – P. 1309–1318.
12. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функции комплексной переменной. – М.: Физматлит, 2010.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.