

УДК 621.455

А. В. Плюснин

**СПОСОБ РАСЧЕТА ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ
ГОРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО
ТВЕРДОТОПЛИВНОГО ЗАРЯДА**

Предложен способ расчета площади поверхности горения твердотопливного заряда, основанный на методе Монте-Карло. При отсутствии специализированного программного обеспечения способ позволяет получать в короткий срок результаты для зарядов с несложной пространственной геометрией.

E-mail: fs11@mx.bmstu.ru

Ключевые слова: поверхность горения, твердотопливный газогенератор, метод Монте-Карло.

В газодинамических расчетах устройств, которые предназначены для начального разгона тел избыточным давлением, создаваемым в замкнутом объеме в результате горения заряда твердотопливного газогенератора (ГГ), приходится, особенно на этапе предварительного проектирования, учитывать внутрикамерные процессы в ГГ. Это легко сделать, используя упрощенные расчетные модели (см., например, [1]). Трудности могут возникнуть при расчете площади поверхности заряда ГГ, изменяющейся в процессе горения.

Для этих целей достаточно решить задачу геометрически, предполагая, что текущая площадь поверхности заряда S_b однозначно определяется толщиной сгоревшего слоя e , т. е. что в каждый момент времени горение твердого топлива происходит строго по нормали к текущей поверхности и с одинаковой всюду скоростью горения $u_b = \frac{de}{dt}$. Для ГГ используется конфигурация заряда в виде цилиндрического блока с цилиндрическими внутренними каналами. В этом случае алгоритм расчета нетрудно вывести из простых геометрических построений на плоскости. Такой метод решения не переносится на пространственные конфигурации. В общем случае требуется численно интегрировать уравнение в частных производных типа Гамильтона—Якоби [1, 2].

Революционные изменения в производительности ЭВМ привели к такому сокращению времени расчета многих задач, что инженер-расчетчик при наличии соответствующего выбора может суще-

ственно сократить сроки своей части проектной работы, предпочитая методы, более простые в реализации, но менее эффективные в вычислительном плане. В данной работе представлен такого рода прием для расчета площади поверхности горения пространственного твердотопливного заряда. Предлагаемый способ использует метод Монте-Карло [3] и при несложной геометрии заряда очень легко реализуется.

Способ расчета площади поверхности горения цилиндрического заряда (плоская задача). В целях сравнения с последующим пространственным расчетом приведем основные идеи метода расчета для плоского случая.

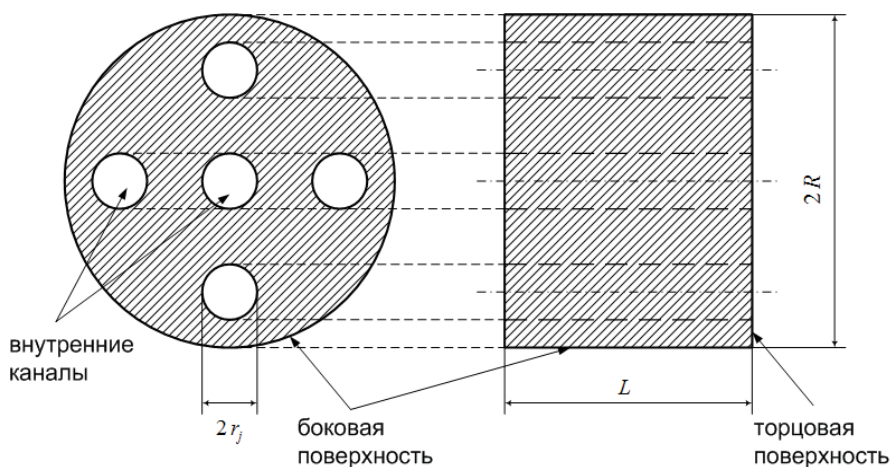


Рис. 1. Пример геометрической формы заряда ГГ

Предполагается, что заряд имеет форму цилиндрического блока длиной L и радиусом R с n внутренними цилиндрическими каналами радиусом r_j , $j = 1, 2, \dots, n$ (рис. 1). Торцы заряда, внешняя цилиндрическая поверхность, внутренние каналы могут быть либо целиком бронированы, либо целиком открыты для горения. Площадь поверхности горения такого заряда

$$S_b(e) = (L - k_f e) P_b(e),$$

где k_f — число торцов заряда, открытых для горения; $P_b(e)$ — периметр поперечного сечения поверхности горения заряда.

Таким образом, задача сводится к определению $P_b(e)$ как функции толщины выгоревшего свода заряда e .

Для заданного значения e конфигурация поперечного сечения заряда показана схематически на рис. 2. Всюду за фронтом разгора-

ющего канала или наружной поверхности заряда топливо считается выгоревшим. Следовательно, вклад горящего j -го канала в периметр горения $\Pi_b(e)$ равен сумме длин дуг его окружности радиусом $r_j + e$, не попавших внутрь окружностей $r_k + \chi_k e$ остальных каналов и не вышедших за пределы внешней окружности радиусом $R - \chi_0 e$ боковой поверхности заряда. Величины χ_0 и χ_k равны единице для разгорающихся поверхностей и нулю для бронированных поверхностей. Аналогично подсчитывается вклад в $\Pi_b(e)$ от горящей боковой поверхности заряда. Таким образом, необходимо перейти к попарному рассмотрению «взаимодействия» внутренних каналов и боковой поверхности и к решению элементарной геометрической задачи пересечения двух окружностей.

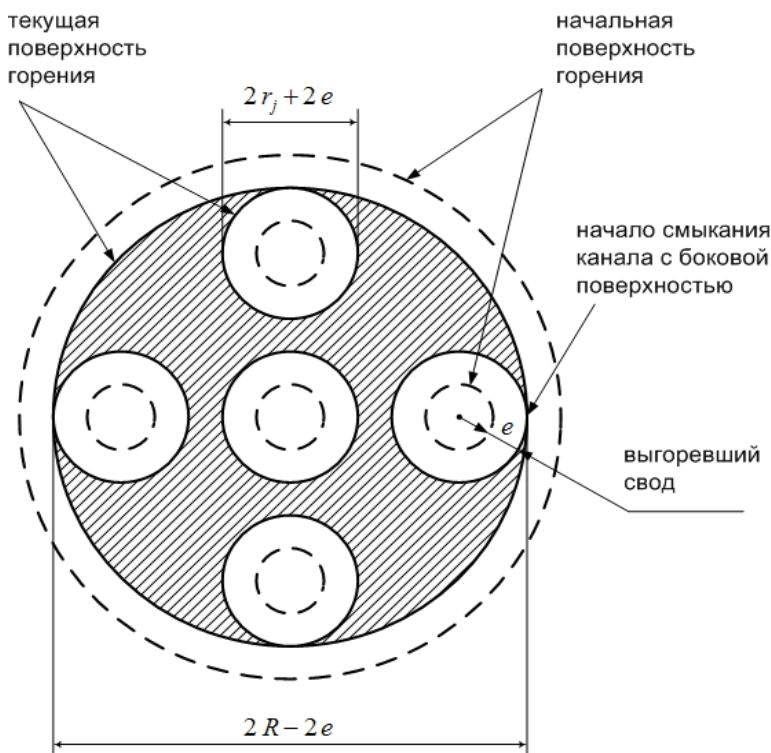


Рис. 2. Изменение геометрических параметров заряда в процессе горения

Общая формула для вычисления $\Pi_b(e)$ имеет лишь формальный смысл, но алгоритм расчета составить несложно. На рис. 3 показан пример расчета площади поверхности горения заряда данным способом (плоская задача). Геометрические параметры заряда приведены в табл. 1.

Геометрические параметры цилиндрического заряда

№ п/п	Участок границы	Координата оси		Радиус	Продольная координата
		$\frac{x_a}{R}$	$\frac{y_a}{R}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{z}{R}$
1	Торец 1	0	0	0	0 ≤ z ≤ 0,767
2	Торец 2	0	0	0	
3	Боковая поверхность	0	0	1	
4	Канал 1	0	0	0,53	
5	Канал 2	0,272	0		
6	Канал 3	0	0,272		
7	Канал 4	-0,272	0		
8	Канал 5	0	-0,272		
9	Канал 6	0,796	0,33		
10	Канал 7	0,33	0,796		
11	Канал 8	-0,33	0,796		
12	Канал 9	-0,796	0,33		
13	Канал 10	-0,796	-0,33		
14	Канал 11	-0,33	-0,796		
15	Канал 12	0,33	-0,796		
16	Канал 13	0,796	-0,33		

Примечание. Торцы и боковая поверхность заряда бронированы.

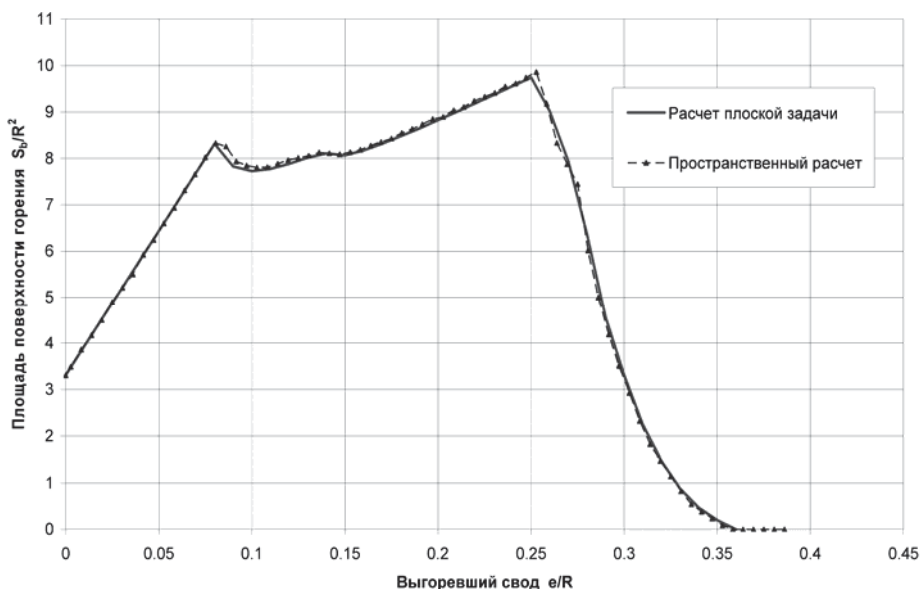


Рис. 3. Пример расчета для цилиндрического заряда

Способ расчета площади поверхности горения в случае заряда пространственной конфигурации. Предполагая использование метода Монте-Карло, перейдем от площади поверхности горения $S_b(e)$ как функции толщины выгоревшего свода e к объему выгоревшей части заряда

$$\Omega_b(e) = \int_0^e S_b(e) de$$

и к текущему объему заряда

$$\Omega_3(e) = \Omega_{30} - \Omega_b(e), \quad (1)$$

где Ω_{30} — начальный объем, занимаемый зарядом. Будем искать в расчете величину (1). Затем площадь поверхности заряда можно рассчитать по формуле

$$S_b(e) = -\frac{d\Omega_3}{de}, \quad (2)$$

используя численное дифференцирование.

Пусть геометрия заряда задана относительно некоторой системы прямоугольных координат $Oxyz$. Далее необходимо реализовать алгоритм, который позволит установить для произвольно выбранной точки пространства (x, y, z) ее принадлежность к начальному объему заряда и вычислить расстояние от нее $\rho(x, y, z)$ до начальной поверхности горения заряда (по кратчайшему пути, проходящему по точкам заряда и не пересекающему его границ). Для удобства точкам, не принадлежащим заряду, можно приписать значения $\rho(x, y, z) < 0$.

Заклучим область, занимаемую зарядом, в параллелепипед с размерами $x_b \leq x \leq x_e$, $y_b \leq y \leq y_e$ и $z_b \leq z \leq z_e$. Сформируем достаточно представительную выборку $3N$ псевдослучайных чисел для представления N пространственных точек (x_i, y_i, z_i) , принадлежащих данному параллелепипеду: $x_b \leq x_i \leq x_e$, $y_b \leq y_i \leq y_e$, $z_b \leq z_i \leq z_e$. Далее зададимся набором значений $e_1=0, e_2, \dots, e_{\max}$, для которых вычислим значения $\Omega_3(e)$. Подсчитав количество N_k точек (x_i, y_i, z_i) , для которых $\rho(x_i, y_i, z_i) \geq e_k$, определим

$$\Omega_3(e_k) \approx \frac{N_k}{N} (x_e - x_b)(y_e - y_b)(z_e - z_b). \quad (3)$$

Полученные в расчетах дискретные зависимости $\Omega_3(e_k)$ и $\Omega_b(e_k) = \Omega_{30} - \Omega_3(e_k)$ имеют визуально плавный вид. Однако численная реализация формулы (2) для определения дискретной зависимости $S_b(e_k)$ существенно более требовательна к объему N статистической выборки. Отметим, что применение сглаживающих или регуляризирующих алгоритмов для численного дифференцирования $\Omega_3(e_k)$ нежелательно, поскольку функция $S_b(e)$ по своей природе не является гладкой (смыканию каналов заряда между собой и с наружной поверхностью заряда соответствуют изломы, а в некоторых случаях и скачки функции $S_b(e)$).

Для иллюстрации точности вычислений данным способом был проведен расчет цилиндрического заряда, описанного выше (см. рис. 3 и табл. 1). В расчетах принималось $N=10^7$. Несмотря на то что теоретические оценки [4] требуют большего объема выборки, с практической точки зрения полученные результаты вполне удовлетворительны.

Формально, в пределах предположения о геометрическом характере горения заряда, изложенный способ не имеет других ограничений. Однако для его применения необходимо вычислять функцию $\rho(x, y, z)$. По-видимому, можно реализовать более или менее общий подход. В то же время, если ограничиться конкретными практически значимыми конфигурациями зарядов, можно сразу сказать, что в одних случаях определение функции $\rho(x, y, z)$ будет тривиальным, а в других приведет к громоздкой процедуре. Однако в некоторых методах численного интегрирования уравнения типа Гамильтона—Якоби также приходится определять значения $\rho(x, y, z)$ для задания начальных данных Коши.

Пример расчета площади поверхности горения для заряда пространственной конфигурации. Проиллюстрируем изложенный подход на следующем простом примере. Рассмотрим заряд (рис. 4), геометрические параметры которого приведены в табл. 2. Для определенности можно принять $R_{\max} = 1$.

Размеры параллелепипеда, охватывающего заряд, примем согласно неравенствам $-R_{\max} \leq x \leq R_{\max}$, $-R_{\max} \leq y \leq R_{\max}$ и $0 \leq z \leq L_1 + L_2$. Функция $\rho(x, y, z)$ определяется следующим образом.

Точка параллелепипеда (x, y, z) заведомо не принадлежит области, занимаемой зарядом, если $x^2 + y^2 > R_{\max}^2$ либо $x^2 + y^2 >$

$$> \frac{R_0^2 (z - L_0)^2}{L_0^2}, \text{ где } R_0 = R_{\max} + (R_{\max} - R_{\min}) \frac{L_2}{L_1} \text{ и } L_0 = L_2 + \frac{R_{\max} L_1}{R_{\max} - R_{\min}}.$$

Для таких точек полагаем $\rho(x, y, z) < 0$.

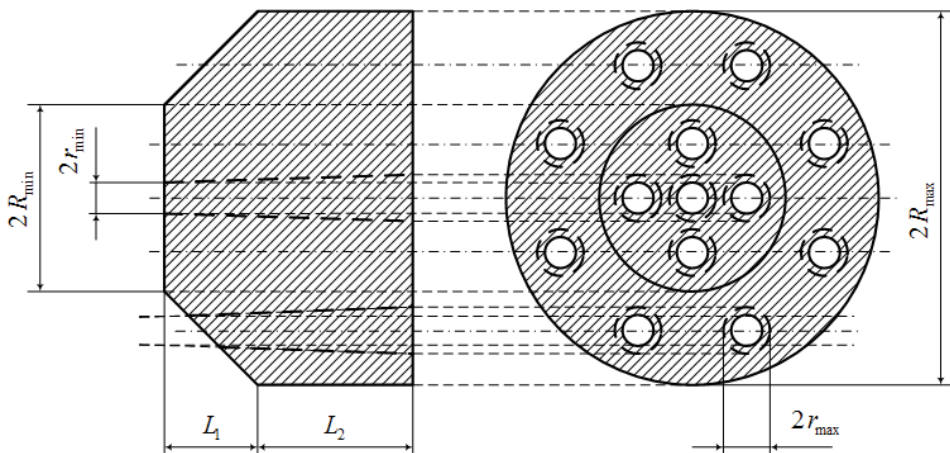


Рис. 4. Пример простой геометрии пространственного заряда

Таблица 2

Геометрические параметры пространственного заряда

№ п/п	Участок границы	Координата оси		Радиус		Продольная координата
		$\frac{x_a}{R_{\max}}$	$\frac{y_a}{R_{\max}}$	$\frac{r_{\min}}{R_{\max}}$	$\frac{r_{\max}}{R_{\max}}$	
1	Горец 1	0	0	$\frac{R_{\min}}{R_{\max}} = 0,567$		0
2	Горец 2	0	0	1		1,433
3	Боковая поверхность (усеченный конус)	0	0	0,567	1	$0 \leq z \leq 0,867$
4	Боковая поверхность (цилиндр)	0	0	1	1	$0,867 \leq z \leq 1,433$
5	Канал 1	0	0	0,028	0,053	$0 \leq z \leq 1,433$
6	Канал 2	0,333	0			
7	Канал 3	0	0,333			
8	Канал 4	-0,333	0			
9	Канал 5	0	-0,333			
10	Канал 6	0,837	0,256			

№ п/п	Участок границы	Координата оси		Радиус		Продольная координата
		$\frac{x_a}{R_{\max}}$	$\frac{y_a}{R_{\max}}$	$\frac{r_{\min}}{R_{\max}}$	$\frac{r_{\max}}{R_{\max}}$	
11	Канал 7	0,356	0,799	0,028	0,053	$0 \leq z \leq 1,433$
12	Канал 8	-0,356	0,799			
13	Канал 9	-0,837	0,256			
14	Канал 10	-0,837	-0,256			
15	Канал 11	-0,356	0,799			
16	Канал 12	0,356	-0,799			
17	Канал 13	0,837	-0,256			

Примечания: 1. Каналы 6—13 в действительности ограничены конической частью боковой поверхности заряда (см. рис. 4).

2. Торцы и боковая поверхность оси заряда бронированы.

Для остальных точек (x, y, z) параллелепипеда рассчитаем их удаление d_j от поверхности j -го конического канала с радиусами $r_{\min j}$ и $r_{\max j}$ и осью $x = x_{aj}$, $y = y_{aj}$:

$$c_j = \sqrt{(x - x_{aj})^2 + (y - y_{aj})^2};$$

$$\alpha_j = \arctg \frac{r_{\max j} - r_{\min j}}{L_1 + L_2};$$

$$d_j = (c_j - r_{\max j} + z \operatorname{tg} \alpha_j) \cos \alpha_j.$$

Здесь c_j — расстояние от рассматриваемой точки до оси канала; α_j — угол полураствора канала. Величина d_j отрицательна, если точка оказывается внутри данного канала; в этом случае $\rho(x, y, z) < 0$.

Для точек заряда вблизи его большей торцевой поверхности расстояние d_j вычисляется по отрезку, выходящему за границы поверхности заряда. Расстояние, определяемое по области, занимаемой зарядом,

$$\rho_j = \begin{cases} d_j & \text{при } d_j < \frac{z}{\sin \alpha_j}; \\ \sqrt{z^2 + (c - r_{\max j})^2} & \text{при } d_j \geq \frac{z}{\sin \alpha_j}. \end{cases}$$

Окончательно получим

$$\rho(x, y, z) = \min_j \rho_j.$$

Расчет методом Монте-Карло был проведен для псевдослучайной выборки из $N=10^6$ пространственных точек. Результаты вычисления функции $\Omega_b(e)$ показаны на рис. 5. Искомая площадь поверхности горения заряда получается численным дифференцированием этой зависимости, соответствующий график дан на рис. 6.

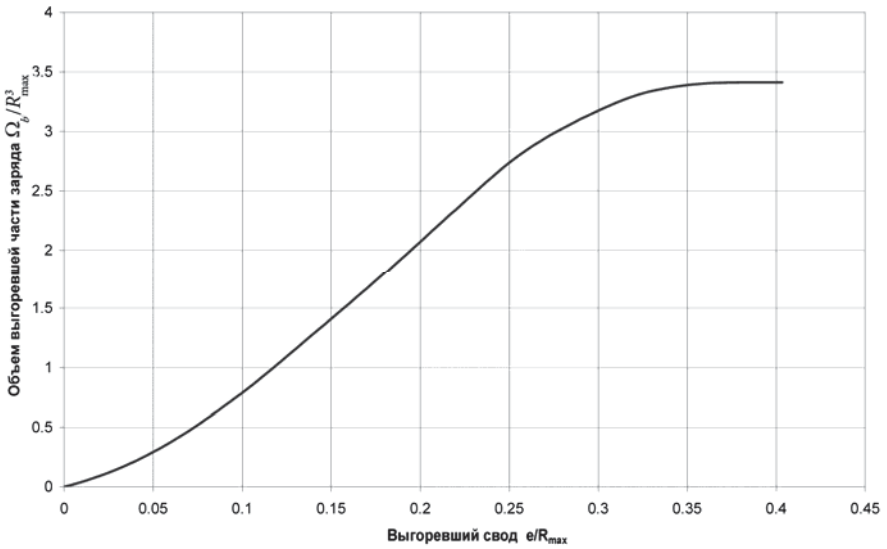


Рис. 5. Пример расчета объема выгоревшей части для пространственного заряда

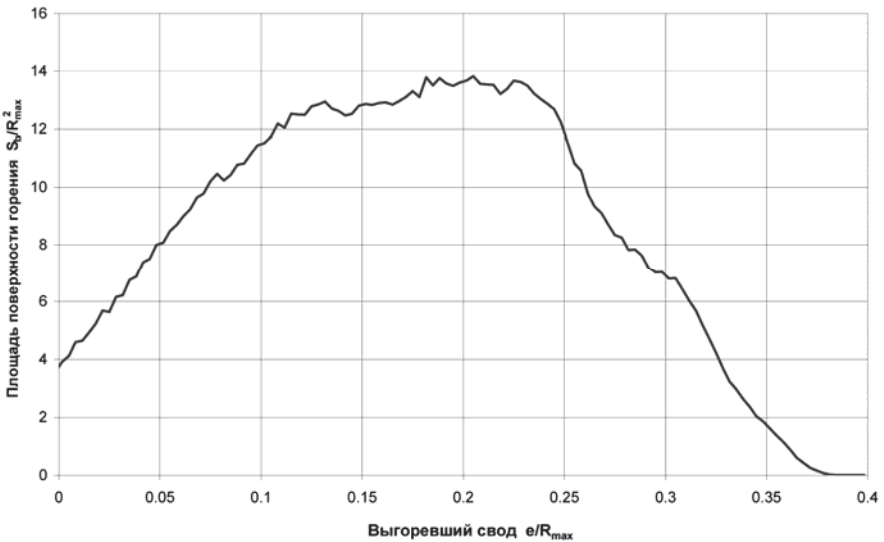


Рис. 6. Пример расчета площади поверхности горения для пространственного заряда

Выводы. Предложен способ расчета площади поверхности горения пространственного твердотопливного заряда, основанный на методе Монте-Карло. Для зарядов с несложной геометрией продемонстрированы его простота и эффективность. При отсутствии специализированного программного обеспечения использование данного способа позволяет проводить необходимые расчеты внутрикамерных процессов при проектировании газодинамических систем, использующих твердотопливные ГГ или РДТТ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соркин Р. Е. Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе: Внутренняя баллистика. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
2. Курант Р. Уравнения в частных производных. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.