

Ю. И. Димитриенко, А. А. Захаров,  
М. Н. Коряков

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ В КАНАЛАХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ВОЗДУХОЗАБОРНИКОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

*Предложена модель трехмерного пограничного слоя, в которой полные уравнения Навье—Стокса решаются не для всей области обтекания, а в тонком пограничном слое; в остальной области осуществляется решение уравнений идеального газа. Представлены результаты численного тестирования алгоритма для задачи о течении в канале сверхзвукового воздухозаборника. Проведено сравнение режимов течения для идеального и вязкого газов, а также модели трехмерного пограничного слоя.*

**E-mail: dimit.bmstu@gmail.com**

**Ключевые слова:** газодинамика, пограничный слой, численное моделирование.

Исследование особенностей течения газовых потоков в каналах сверхзвуковых воздухозаборников (СВЗ) является одной из важнейших задач при проектировании двигательных установок высокоскоростных летательных аппаратов. Движение газа в канале СВЗ представляет собой достаточно сложный процесс, который характеризуется наличием системы косых скачков, располагающейся вдоль всего канала. Традиционные инженерные методы проектирования СВЗ основаны на приближенном одномерном анализе с помощью изэнтропических формул и соотношений Гюгонио. Расчет СВЗ с применением численных методов осложнен жесткими требованиями к ним: высокая точность вычислений газодинамических функций на разрывах с минимальным «размазыванием»; сохранение этой точности на достаточно больших расстояниях, характерных для СВЗ; возможность моделирования взаимодействия скачков с сохранением их структуры.

Далеко не все численные методы, хорошо зарекомендовавшие себя для моделирования внешнего обтекания тел, пригодны для расчета течений в СВЗ в силу указанных требований к качеству вычислений. Теоретическая оценка порядка точности методов часто оказывается значительно завышенной по сравнению с точностью, получаемой при решении сложных задач с многоскачковыми режимами, характерными для задач течения в СВЗ. В работах [1, 2] предложен метод ленточных адаптивных сеток, который показал достаточно высокую точность для задач расчета течений в СВЗ при обеспечении сохранения точности вдоль всего канала СВЗ.

К числу важнейших задач численного газодинамического моделирования в СВЗ относится расчет тепловых потоков на стенках конструкций СВЗ. При этом необходимо использовать уравнения Навье—Стокса, однако непосредственное численное решение этих уравнений в каналах СВЗ приводит к появлению нефизических эффектов [3]: искажаются углы наклона скачков, происходит размазывание скачков, могут формироваться дополнительные нефизические скачки, обусловленные особенностями граничных условий Навье—Стокса в угловых точках. В работе [4] предложен численный метод расчета газодинамических потоков, основанный на решении полных трехмерных уравнений Навье—Стокса в тонком пограничном слое на поверхности обтекаемого тела, а также на решении уравнений Эйлера в основной части течения потока. Такой метод назван методом трехмерного пограничного слоя, его эффективность была показана на сравнительно простых задачах обтекания затупленных тел [1]

*Целью* настоящей работы является исследование применимости метода трехмерного пограничного слоя для задач газодинамики в каналах СВЗ.

**Модель трехмерного пограничного слоя.** В соответствии с [4] модель трехмерного пограничного слоя получим следующим образом. Построим по нормали к поверхности  $\Sigma_1$  твердого тела, обтекаемого потоком газа, еще одну поверхность  $\Sigma_e$ , которая будет служить внешней границей пограничного слоя. Расстояние  $h$  между этими поверхностями, вычисляемое по нормали к  $\Sigma_1$ , назовем толщиной пограничного слоя. Будем полагать, что  $h$  является переменной функцией криволинейных координат  $X^1, X^2$ , связанных с поверхностью  $\Sigma_1$ , функция  $h(X^1, X^2)$  предполагается заданной. Область  $V_e$ , ограниченную поверхностями  $\Sigma_1, \Sigma_e$ , поверхностью входа потока  $\Sigma_3$ , поверхностью выхода потока  $\Sigma_4$  и, возможно, поверхностью симметрии  $\Sigma_5$ , назовем пограничным слоем.

В области  $V_e$  пограничного слоя будем предполагать справедливыми трехмерные уравнения Навье—Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0; \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{E} - \mathbf{T}_v) = 0; \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \mathbf{v} - \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

К этим уравнениям присоединяются определяющие соотношения вязкого совершенного теплопроводного газа:

$$p = R\rho\theta; \quad E = e + |\mathbf{v}|^2 / 2; \quad e = c_V\theta; \quad (2)$$

$$\mathbf{T}_v = \mu_1 (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E} + \mu_2 (\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T); \quad (3)$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla \theta. \quad (4)$$

Здесь:  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $p$  — плотность, теплоемкость и давление газа;  $t$  — время;  $\nabla$  — оператор «набла»;  $\mathbf{E}$  — метрический тензор;  $\mathbf{T}_v$  — тензор вязких напряжений в газе;  $\mathbf{q}$  — вектор теплового потока;  $R = \mathbb{R}/\mu$  — газовая постоянная ( $\mathbb{R}$  — универсальная газовая постоянная;  $\mu$  — молекулярная масса газа);  $c_V$  — теплоемкость при постоянном объеме;  $E = c_V\theta + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$  — полная энергия газа;  $|\mathbf{v}|^2 = v^i v_i$  — квадрат модуля скорости;  $\mu_1, \mu_2$  — коэффициенты вязкости газа;  $\lambda$  — теплопроводность газа. Вязкость и теплопроводность газа являются функциями температуры, зависимости  $\mu_1(\theta)$ ,  $\mu_2(\theta)$  и  $\lambda(\theta)$  для воздуха выбраны согласно классической модели из работы [5].

Рассмотрим четыре случая граничных условий для системы уравнений (1)–(4).

На твердой непроницаемой поверхности обтекаемого тела  $\Sigma_1$  к системе (1) присоединяется граничное условие прилипания и условие теплового баланса:

$$\mathbf{v} = 0, \quad -\lambda \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = q_e, \quad (5)$$

где  $q_e$  — заданный тепловой поток.

На сверхзвуковой границе входа потока  $\Sigma_3$  задаются условия:

$$\rho = \rho_e, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_e, \quad \theta = \theta_e, \quad (6)$$

где  $\rho_e$ ,  $\mathbf{v}_e$ ,  $\theta_e$  — заданные значения.

На сверхзвуковой границе выхода потока  $\Sigma_4$  граничные условия не задаются, но при численной реализации формулируются четыре условия выхода потока:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad (7)$$

где  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$  — нормальная производная вектора скорости.

На плоскости симметрии  $\Sigma_5$  задаются условия симметрии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial v_{\tau_I}}{\partial n} = 0, \quad I = 1, 2, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0. \quad (8)$$

Начальные условия к системе (1)—(5) имеют вид

$$t = 0: \rho = \rho_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad E = c_V \theta_0, \quad (9)$$

где  $\rho_0, \theta_0, \mathbf{v}_0$  — заданные значения плотности, температуры и вектора скорости при  $t = 0$ .

В остальной области  $V \setminus V_e$  течения потока будем полагать справедливыми уравнения движения идеального нетеплопроводного газа (уравнения Эйлера):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_g \mathbf{v}_g = 0; \\ \frac{\partial \rho_g \mathbf{v}_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}_g \otimes \mathbf{v}_g + p_g \mathbf{E}) = 0; \\ \frac{\partial \rho_g E_g}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_g E + p_g) \mathbf{v}_g) = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$p_g = R \rho_g \theta_g, \quad E_g = e_g + |\mathbf{v}_g|^2 / 2, \quad e_g = c_V \theta_g. \quad (11)$$

На внешней поверхности пограничного слоя  $\Sigma_e$ , являющейся границей раздела движения идеального и вязкого потоков, формулируются следующие условия непрерывности:

$$\rho = \rho_g, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_{gn}, \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_I = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \boldsymbol{\tau}_I = 0, \quad \theta = \theta_g. \quad (12)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}_I, I = 1, 2$  — единичные касательные векторы в плоскости  $\Sigma_e$ ;  $v_{gn} = \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n}$ .

Граничные условия на поверхностях  $\Sigma_3$  входа потока идеального газа, выхода потока  $\Sigma_4$  и на плоскости симметрии  $\Sigma_5$  имеют вид (6)—(8), на твердой стенке ставится условие непротекания  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Начальные условия к системе (10), (11) совпадают с (9).

**Уравнения Навье—Стокса и Эйлера в адаптивных координатах.** Введем в рассмотрение дакартовы координаты  $x^j$ , цилиндрические координаты  $X^{1j} = \{r, \varphi, z\}$  и адаптивные криволинейные координаты  $X^j$ , которые согласованы с границей рассматриваемой

геометрической области. Система уравнений Эйлера (10) может быть записана в адаптивных координатах  $X^j$  в недивергентном виде [1]:

$$\frac{\partial \sqrt{g'} \rho}{\partial t} = \hat{P}_i^j \frac{\partial}{\partial X^j} (\sqrt{g'} \rho \hat{v}^i);$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g'} \rho \hat{v}^k) + \hat{P}_i^j \frac{\partial}{\partial X^j} (\sqrt{g'} (\rho \hat{v}^i \hat{v}^k + p \delta^{ik})) + \sqrt{g'} (\rho \hat{v}^m \hat{v}^i + p \delta^{mi}) \hat{\Gamma}_{im}^k = 0;$$

(13)

$$\frac{\partial \sqrt{g'} \rho E}{\partial t} + \hat{P}_i^j \frac{\partial}{\partial X^j} \left( \sqrt{g'} \rho \hat{v}^i \left( E + \frac{p}{\rho} \right) \right) = 0,$$

где  $\hat{v}^i$  — компоненты вектора скорости в физическом базисе  $\hat{e}_i$  координат  $X'^j$ ;  $g'_{mn} = Q_m^i Q_n^j \delta_{ij}$  — метрическая матрица этого базиса;  $\sqrt{g'} = r$ ;  $\hat{P}_j^i = \frac{\partial X^i}{\partial X'^j}$ ;  $Q_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial X'^j}$ ;  $\hat{\Gamma}_{ij}^k$  — символы Кристоффеля в цилиндрической системе координат, среди которых ненулевыми являются  $\hat{\Gamma}_{33}^1 = -r$ ,  $\hat{\Gamma}_{31}^3 = \hat{\Gamma}_{13}^3 = 1/r$ .

Система уравнений Навье—Стокса выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho \sqrt{g'} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} + \hat{P}_i^j \hat{v}^i \frac{\partial}{\partial X^j} \frac{1}{\rho} \right) &= \hat{P}_i^j \frac{\partial}{\partial X^j} (\sqrt{g'} \hat{v}^i); \\ \rho \sqrt{g'} \left( \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial t} + \hat{P}_i^s \left( \hat{v}^i \frac{\partial \hat{v}^j}{\partial X^s} + \frac{\delta^{ij}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X^s} \right) + \hat{v}^i \hat{v}^s \hat{\Gamma}_{si}^j \right) &= \\ &= \hat{P}_i^q \frac{\partial}{\partial X^q} \left( \sqrt{g'} M_m^{ijk} \hat{P}_k^n \frac{\partial \hat{v}^m}{\partial X^n} \right); \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \rho \sqrt{g'} \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \hat{P}_i^s \left( \hat{v}^i \frac{\partial e}{\partial X^s} + \frac{p}{\rho \sqrt{g'}} \frac{\partial \sqrt{g'} \hat{v}^i}{\partial X^s} \right) \right) &= \\ &= \hat{P}_j^q \frac{\partial}{\partial X^q} \left( \sqrt{g'} \lambda \hat{P}_i^n \frac{\partial \theta}{\partial X^n} \right) + \sqrt{g'} \omega^*, \end{aligned}$$

где  $\omega^* = M_m^{ijk} g'_{jn} \widehat{P}_k \widehat{P}_i \frac{\partial \widehat{v}^m}{\partial X^s} \frac{\partial \widehat{v}^n}{\partial X^t}$  — функция диссипации;  $M_m^{ijk} = \bar{M}_p^{rm} P_r^i P_t^j P_n^k Q_m^{p'}$ ,  $\bar{M}_l^{ijkl} = \mu_1 \delta^{ij} \delta_l^k + \mu_2 (\delta^{ik} \delta_l^j + \delta_l^i \delta^{jk})$  — компоненты тензора вязкости в декартовых координатах.

Граничные условия к системе уравнений (13) или (14) в адаптивных координатах на жесткой стенке

$$\widehat{v}^i = 0, \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial X^i} n^i = q_e, \quad (15)$$

на границе входа потока

$$\rho = \rho_e, \quad \widehat{v}^i = \widehat{v}_e^i, \quad \theta = \theta_e, \quad (16)$$

на дозвуковой границе выхода потока

$$\rho = \rho_e, \quad n^j \frac{\partial \widehat{v}^m}{\partial X^j} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X^i} n^i = 0, \quad (17)$$

на сверхзвуковой границе выхода потока

$$n^j \frac{\partial \widehat{v}^m}{\partial X^j} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X^i} n^i = 0, \quad (18)$$

на поверхности симметрии

$$\frac{\partial \rho}{\partial X^i} n^i = 0, \quad \widehat{v}^i \widehat{n}_i = 0, \quad n^i \frac{\partial \widehat{v}^m \widehat{\tau}_m}{\partial X^i} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X^i} n^i = 0, \quad (19)$$

где  $\widehat{v}_e^i$ ,  $\theta_e$  — заданные значения скорости и температуры;  $\widehat{n}_i$  — компоненты вектора нормали;  $\widehat{\tau}_m$  — компоненты вектора касательной.

Начальные условия в адаптивных координатах записываются в виде

$$t = 0: \rho(0, X^i) = \rho^0, \quad \widehat{v}^i(0, X^j) = 0, \quad \theta(0, X^i) = c_V \theta_0. \quad (20)$$

**Алгоритм численного решения уравнений модели трехмерного пограничного слоя.** При численном решении систем уравнений модели трехмерного пограничного слоя используется следующий алгоритм. Сначала решается задача (13) для идеального газа во всей области  $V$  с граничными условиями непроницаемости на поверхности обтекаемого твердого тела  $\Sigma_1$ . Эта система интегрируется методом TVD типа Хартена второго порядка аппроксимации [1, 2, 6, 7].

Далее по этому решению находятся значения функций  $\rho_g$ ,  $v_{gn}$ ,  $\theta_g$  на внешней границе пограничного слоя  $\Sigma_e$ . Затем осуществляется решение задачи (14) для вязкого теплопроводного газа в области  $V_e$  пограничного слоя с условиями (12) на внешней границе  $\Sigma_e$ , причем функции  $\rho_g$ ,  $v_{gn}$ ,  $\theta_g$  в этих условиях полагаются известными и берутся из полученного решения для идеального газа на предыдущем шаге. Интегрирование системы Навье—Стокса выполняется методом разделения по физическим переменным. На первом этапе не учитываются вязкие члены и получаемая система Эйлера решается методом TVD. На втором этапе учитываются вязкие члены, а конвективные члены и уравнение неразрывности исключаются из рассмотрения. Полученная система интегрируется методом разделения переменных [1, 8].

**Результаты численного моделирования течения в СВЗ.** Численное моделирование газодинамики в канале СВЗ осуществлялось с помощью программного комплекса Sigma, разработанного на кафедре ФН-11 МГТУ им. Н.Э. Баумана. Комплекс был модифицирован для реализации описанного выше численного алгоритма решения задачи о трехмерном пограничном слое. Численный анализ проводился на примере задачи об осесимметричном течении во входной части канала СВЗ.

Параметры набегающего потока и начальные данные были следующими:

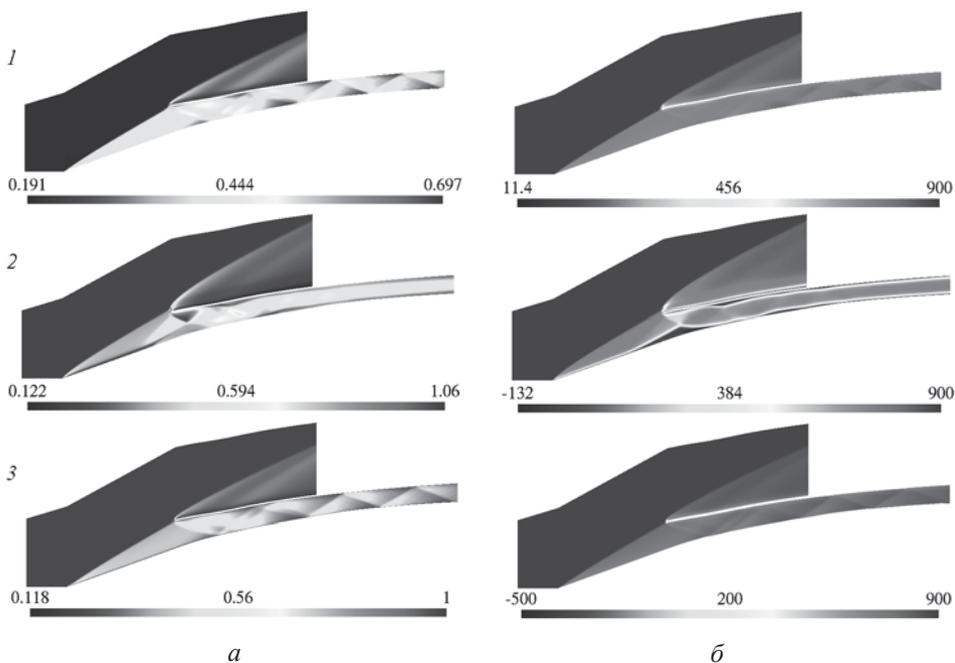
$$\rho_\infty = 0,1946 \text{ кг/м}^3; v_{r_\infty} = v_{r_0} = 0; v_{z_\infty} = 900 \text{ м/с};$$

$$p_\infty = p_0 = 12\,084,5 \text{ Па}; \rho_0 = 0,1946 \text{ кг/м}^3; v_{z_0} = 90 \text{ м/с}.$$

Число узлов сетки в области  $V \setminus V_e$  равно 41 258, в области пограничного слоя  $V_e$  — 87 031. Толщина  $h$  области пограничного слоя составляла 8 % толщины области канала.

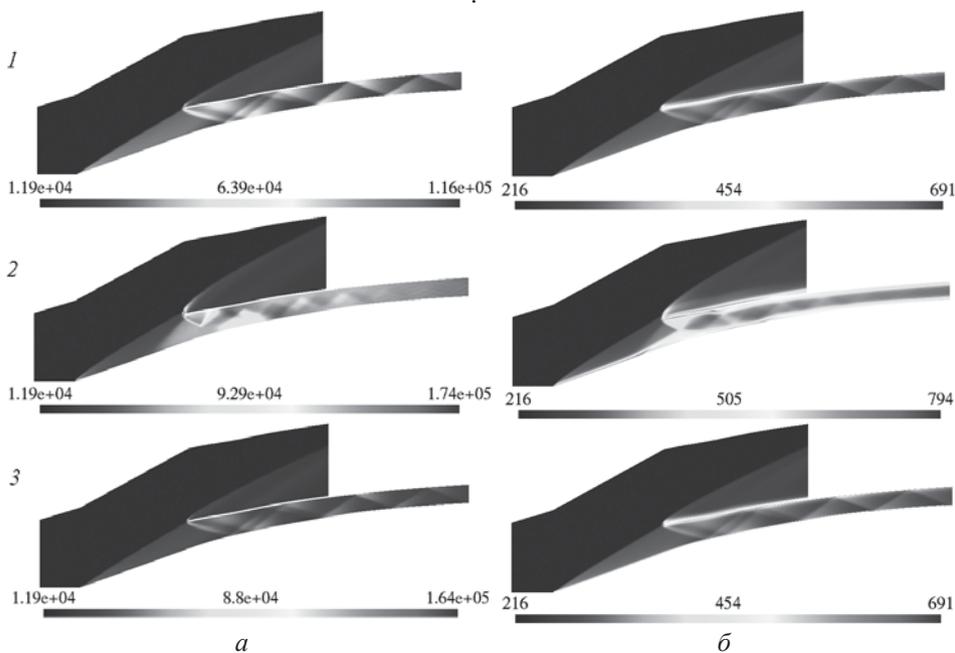
Были проведены три серии численных расчетов: 1) для идеального газа во всей области  $V$  обтекания; 2) для вязкого газа во всей области  $V$ ; 3) для модели с трехмерным пограничным слоем. На рис. 1 и 2 представлены некоторые результаты численного моделирования.

Результаты расчетов показывают, что решение уравнений Навье—Стокса во всей области течения из-за граничного условия прилипания сильно искажает систему скачков в канале воздухозаборника, которая становится нефизичной. Этого недостатка лишена модель идеального газа, дающая возможность с высоким качеством воспроизвести всю систему скачков в канале СВЗ. В то же время эта модель не позволяет вычислять тепловые потоки на стенке СВЗ, а также



**Рис. 1.** Распределение плотности  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>, (а) и продольной скорости  $v_z$ , м/с, (б) сверхзвукового газового потока:

1 — идеальный газ; 2 — вязкий газ; 3 — трехмерный пограничный слой

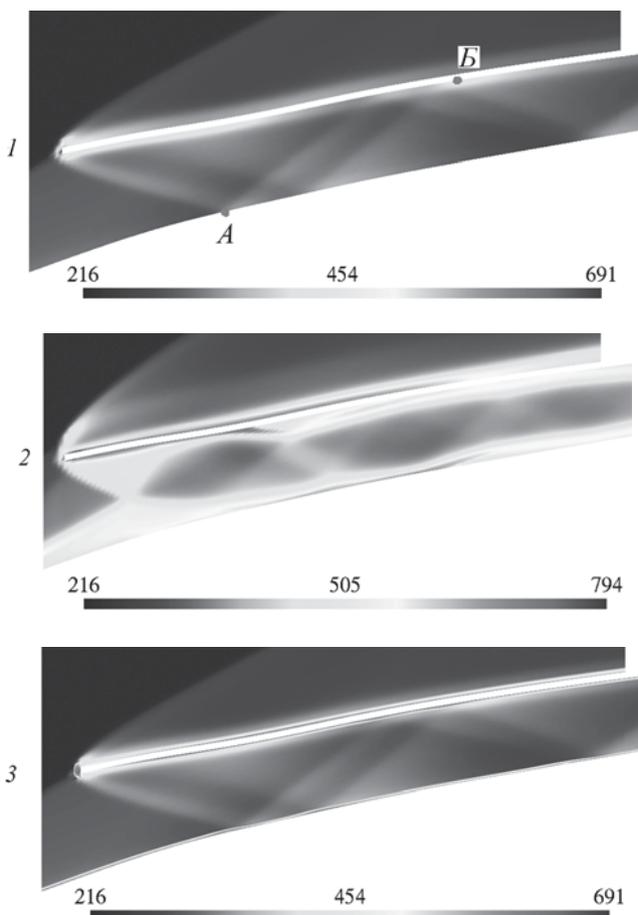


**Рис. 2.** Распределение давления  $p$ , Па, (а) и температуры  $\theta$ , К, (б) сверхзвукового газового потока:

1 — идеальный газ; 2 — вязкий газ; 3 — трехмерный пограничный слой

неточно воспроизводит распределение температуры на твердой стенке. Модели вязкого газа и трехмерного пограничного слоя в этом смысле более адекватны, поскольку учитывают торможение потока в пристеночной зоне и, как следствие, описывают переход кинетической энергии движения потока в энергию, идущую на нагрев твердой поверхности.

На рис. 3 в увеличенном масштабе показано распределение температуры в пристеночной области канала. На основании этих результатов была составлена таблица, в которой приведены значения температуры в точках *A* и *B* (см. рис. 3). Видно, что температура для моделей вязкого газа и трехмерного пограничного слоя имеет близкие значения, в то время как модель идеального газа дает сильно заниженный результат — почти в 2 раза меньше.



**Рис. 3. Распределение температуры  $\theta$ , К, газового потока в местах падения скачков:**

*1* — идеальный газ; *2* — вязкий газ; *3* — трехмерный пограничный слой

## Сравнение температуры $\theta$ , К, в местах падения скачков уплотнения для различных моделей газа

Точка	Идеальный газ	Вязкий газ	Трехмерный пограничный слой
А	336	580	593
Б	387	583	608

Модель трехмерного пограничного слоя объединяет преимущества моделей идеального и вязкого газа: она позволяет правильно воспроизвести систему скачков в канале СВЗ и найти более точное распределение температуры на стенках канала. Максимум температуры приходится на обечайку СВЗ, в местах падения скачков на поверхности конструкции возникают локальные максимумы температуры. Еще одним преимуществом модели трехмерного пограничного слоя является возможность значительного ускорения расчетов за счет того, что решение задачи в области  $V \setminus V_e$  может осуществляться на более грубой сетке, а ее измельчение может выполняться только в области пограничного слоя, где проявляются эффекты вязкости. Благодаря этому удастся реализовать разумный баланс размера расчетной сетки и вычислительного времени.

**Выводы.** Модель трехмерного пограничного слоя была адаптирована для течений в каналах СВЗ с наличием сложных многоскачковых режимов. Предложен алгоритм решения системы уравнений трехмерного пограничного слоя. Численные исследования на примере сверхзвукового обтекания осесимметричного воздухозаборника показали адекватное воспроизведение физического процесса. Представленная модель зарекомендовала себя положительно как для задач обтекания сферы [4], так и для задач распространения сверхзвуковых потоков в каналах и может быть применена для решения практических задач.

*Исследования выполнены при частичной поддержке грантов Президента РФ МК-2498.2011.8, МК-3150.2012.8. Результаты расчета получены с использованием суперкомпьютера СКИФ МГУ «Чебышев».*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Димитриенко Ю. И., Котенев В. П., Захаров А. А. Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике. – М.: Физматлит, 2011. – 280 с.
2. Димитриенко Ю. И., Захаров А. А., Коряков М. Н. Развитие метода ленточно-адаптивных сеток на основе схем TVD для решения задач газовой динамики // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. – 2011. – № 2. – С. 87–97.

3. Димитриенко Ю. И., Захаров А. А., Абакумов А. С. Развитие метода ленточно-адаптивных сеток для моделирования сверхзвуковых потоков вязкого теплопроводного газа в каналах // Актуальные направления развития прикладной математики в энергетике, энергоэффективности и информационно-коммуникационных технологиях: Сб. тр. Междунар. науч. конф. – М., 2010. – С. 138–142.
4. Димитриенко Ю. И., Захаров А. А., Коряков М. Н. Модель трехмерного пограничного слоя и ее численный анализ // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. Спец. вып. Мат. моделирование. – 2011. – С. 136–149.
5. Краснов Н. Ф. Аэродинамика: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1980. – Т. 1. – 495 с.; Т. 2. – 416 с.
6. Гильманов А. Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. – М.: Физматлит, 2000. – 248 с.
7. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. – 1983. – Vol. 49. – P. 357–393.
8. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1967. – 197 с.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.