УДК 533.6.011.31.5:532.582.33

В. П. Котенев, В. А. Сысенко

УТОЧНЕННЫЙ МЕТОД БЫСТРОЙ ОЦЕНКИ ДАВЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ГЛАДКИХ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ

На основе уравнения для специальной контурной функции разработан метод быстрой оценки давления на участке поверхности гладкого затупленного тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа. Рассмотрены примеры применения метода для осесимметричных течений газа.

E-mail: kotvp@mail.ru

Ключевые слова*: *сверхзвуковой поток, осесимметричные течения газа, звуковая точка.

В практических расчетах часто требуется быстро оценить давление на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа. Для этого обычно используется формула Ньютона. При расчете давления по этой формуле получается результат, который не зависит от формы тела, что не всегда допустимо даже для получения приближенной оценки. Как правило, теория Ньютона дает удовлетворительный результат вблизи затупления, но плохо работает, когда угол наклона касательной к поверхности тела стремится к нулю. А именно такие тела наиболее интересны с точки зрения практических расчетов. В работе предлагается метод быстрой оценки давления на поверхности тел. Результаты показали, что такой подход дает лучший результат по сравнению с расчетами по формуле Ньютона.

Безразмерные параметры. Давление p отнесем к давлению в точке торможения p'_0, которое определяется по известной формуле Рэлея:

$$p'_0 = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \mathrm{M}_\infty^2 \left[\gamma - \frac{\gamma-1}{2\mathrm{M}_\infty^2}\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} p_\infty,$$

где γ — показатель адиабаты (для совершенного газа γ = 1,4); M_∞ — число Маха набегающего потока; p_∞ — давление газа в набегающем потоке.

Тогда безразмерные плотность и скорость вычислим следующим образом:

$$\rho = p^{\frac{1}{\gamma}} \frac{2\gamma}{\gamma-1}; \quad v = \sqrt{1 - p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}.$$

Расчет газодинамических параметров на поверхности тела будем проводить для областей $\sigma \in [0; \sigma_*]$, $\sigma \in [\sigma_*; 90°]$, где σ — угол между осью тела и вектором скорости в произвольной точке на его поверхности; σ_* определяет положение звуковой точки на поверхности тела [1].

Расчет давления при $\boldsymbol{\sigma \in [\sigma_*;\ 90°]}$. Для определения положения звуковой точки на поверхности тела сначала найдем ее на поверхности сферы, используя аппроксимационные формулы для давления на сфере [2]:

$$\beta_2\theta^3 + \beta_1\theta^2 = \ln p, \tag{1}$$

где θ — центральный угол.

Кроме того, учтем, что давление в звуковой точке, отнесенное к давлению в точке торможения, $p_* = \left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Тогда из равенства (1) получим уравнение

$$\beta_2\theta^3 + \beta_1\theta^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{2}{\gamma+1}\right) = 0,$$

решив которое, найдем положение звуковой точки на сфере: $\sigma_{**} = \dfrac{\pi}{2} - \theta_{**}$.

Вычислим для сферы в звуковой точке отношение $\left.\dfrac{d^2 f / d\sigma^2}{f}\right|_{**}$, где f — контурная функция, которая рассчитывается по формуле

$$f = \frac{1}{r\rho v}, \tag{2}$$

$r(\sigma)$ — цилиндрический радиус, описывающий геометрию тела; $\rho(\sigma)$ — плотность частиц газа; $v(\sigma)$ — модуль скорости.

Все производные вычисляют по аргументам, изменяющимся вдоль тела, т. е. при постоянной энтропии. В качестве аргументов при дифференцировании вдоль поверхности тела используются давление p или угол σ. Учитывая, что $\dfrac{dv}{dp} = -\dfrac{1}{\rho v}$, перепишем выражение для контурной функции (2) в виде

$$f = -\frac{1}{r}\frac{dv}{dp}; \tag{3}$$

$$\frac{df}{d\sigma}=\frac{dr/d\sigma}{r^2}\frac{dv}{dp}-\frac{1}{r}\frac{d^2v}{dp^2}\frac{dp}{d\sigma};\qquad(4)$$

$$\frac{d^2f}{d\sigma^2}=\frac{\left(d^2r/d\sigma^2\right)r^2-2r\left(dr/d\sigma\right)^2}{r^4}\frac{dv}{dp}+$$

$$+2\frac{dr/d\sigma}{r^2}\frac{d^2v}{dp^2}\frac{dp}{d\sigma}-\frac{1}{r}\frac{d^3v}{dp^3}\left(\frac{dp}{d\sigma}\right)^2+\frac{1}{r}\frac{d^2v}{dp^2}\frac{d^2p}{d\sigma^2}.$$

Однако $\frac{d^2v}{dp^2}v=\frac{\mathrm{M}^2-1}{\rho^2v^3}$, а в звуковой точке М = 1, поэтому $\frac{d^2v}{dp^2}=0.$ Тогда

$$\frac{d^2f}{d\sigma^2}=\frac{\left(d^2r/d\sigma^2\right)r^2-2r\left(dr/d\sigma\right)^2}{r^4}\frac{dv}{dp}-\frac{1}{r}\frac{d^3v}{dp^3}\left(\frac{dp}{d\sigma}\right)^2;$$

$$\frac{d^2f/d\sigma^2}{f}=\frac{2\left(dr/d\sigma\right)^2-\left(d^2r/d\sigma^2\right)r}{r^2}-\rho v\frac{d^3v}{dp^3}\left(\frac{dp}{d\sigma}\right)^2.\qquad(5)$$

После ряда преобразований получим

$$\frac{d^2v}{dp^2}=\frac{\mathrm{M}^2-1}{\rho^2v^3}=\left(-\frac{dv}{dp}\right)\left[\frac{1}{\gamma p}-\frac{(\gamma-1)p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{2\gamma\cdot p\left(1-p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}\right],$$

т. е. при $\mathrm{M}=1$

$$\rho v\frac{d^3v}{dp^3}=-\frac{1}{\gamma p^2}+\frac{(\gamma-1)\left[\frac{1}{\gamma}p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-p^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}}\right]}{2\gamma\cdot p^2\left(1-p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^2}.\qquad(6)$$

Давление в окрестности звуковой точки и при $\sigma\in[\sigma_*;90°]$ можно вычислить по формуле

$$p=\sin^2\sigma+\frac{p_*-\sin^2\sigma_*}{\cos^2\sigma_*}\cos^2\sigma. \qquad (7)$$

Найдем

$$\frac{dp}{d\sigma}=2\sin\sigma\cos\sigma-2\frac{p_*-\sin^2\sigma_*}{\cos^2\sigma_*}\cos\sigma\sin\sigma=$$

$$=\sin 2\sigma\left(\frac{\cos^2\sigma_*-p_*+\sin^2\sigma_*}{\cos^2\sigma_*}\right)=(1-p_*)\frac{\sin 2\sigma}{\cos^2\sigma_*}.$$

Тогда в звуковой точке сферы

$$\left.\frac{dp}{d\sigma}\right|_{**}=(1-p_*)\frac{\sin 2\sigma_{**}}{\cos^2\sigma_{**}}=2(1-p_*)\operatorname{tg}\sigma_{**}. \qquad (8)$$

Для тел, отличных от сферы, $\left.\frac{dp}{d\sigma}\right|_{*}=2(1-p_*)\operatorname{tg}\sigma_*$. Формула (7) имеет ту же структуру, что и классическая формула Ньютона, и при $\sigma\in[\sigma_*;90°]$ или $\sigma\in[\sigma_{**};90°]$ также дает хорошие результаты. Подставим выражения (6) и (8) в уравнение (5). Учитывая, что для сферы с радиусом кривизны R = 1 цилиндрический радиус $r(\sigma)=\cos\sigma$, вычислим значение $\left.\frac{d^2f/d\sigma^2}{f}\right|_{**}$. Очевидно, что это отношение не зависит от R.

Согласно работе [1], предположим, что значение $\left.\frac{d^2f/d\sigma^2}{f}\right|_{*}$ в звуковой точке произвольного тела такое же, как на сфере. Тогда с учетом $\left.\rho v\frac{d^3v}{dp^3}\right|_{*}=\mathrm{const}$ при $p=p_*$ получим нелинейное уравнение

$$\left.\frac{d^2f/d\sigma^2}{f}\right|_{**}=\frac{2\left(dr/d\sigma|_*\right)^2-\left(d^2r/d\sigma^2|_*\right)r(\sigma_*)}{r^2(\sigma_*)}-\rho V\left.\frac{d^3v}{dp^3}\right|_*\left(\left.\frac{dp}{d\sigma}\right|_*\right)^2.$$

Решив его, найдем σ_*. Теперь на интервале $[\sigma_*;90°]$ вычислим по уточненной формуле (7) давление на произвольном гладком затупленном теле.

Расчет давления на поверхности тела при $\boldsymbol{\sigma\in[0;\sigma_*]}$. Найдем такую точку σ_0, в которой $\frac{df}{d\sigma}=0$.

Поскольку $\frac{d^2v}{dp^2} = \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\rho^2 v^3}$, то с учетом соотношений (3) и (4)

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{dr/d\sigma}{r^2}\frac{1}{\rho v} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\rho^2 v^3}\frac{dp}{d\sigma} = 0.$$

Таким образом, в точке σ_0 должно выполняться равенство

$$-f\left(\frac{dr/d\sigma}{r} + \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\rho v^2}\frac{dp}{d\sigma}\right) = 0. \tag{9}$$

Из условий обтекания выпуклого тела следует:

1) вдоль тела давление падает, т. е. для выпуклого тела (σ убывает) $\frac{dp}{d\sigma} > 0$;

2) радиус тела $r > 0$, а $\frac{dr}{d\sigma} \le 0$, причем $\frac{dr}{d\sigma} = 0$ при $\sigma = 0$ для тел рассматриваемого класса.

Для выпуклых затупленных тел с $\frac{dr}{d\sigma} = 0$ при $\sigma = 0$ существует такая точка σ_0, для которой $\frac{df}{d\sigma} = 0$, поскольку первое слагаемое выражения (9) стремится к нулю снизу при $\sigma \to 0$, а второе при $\mathrm{M} > 1$ неотрицательно и равно нулю только при $\mathrm{M} = 1$.

Тогда из выражения (9), учитывая, что $f \ne 0$, получим

$$\frac{dr/d\sigma}{r} + \frac{\mathrm{M}^2 - 1}{\rho v^2}\frac{dp}{d\sigma} = 0. \tag{10}$$

При нахождении точки σ_0 из нелинейного уравнения (10) давление в ее окрестности вычислим по формуле

$$p = (p_* - p_\infty)\frac{\sin^2\sigma}{\sin^2\sigma_*} + p_\infty. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\frac{dp}{d\sigma} = (p_* - p_\infty)\frac{\sin 2\sigma}{\sin^2\sigma_*}.$$

Формула (11) является вариантом формулы Ньютона. Она дает хорошие результаты в относительно малой окрестности звуковой точки. Поэтому на участке $\sigma \in [\sigma_0; \sigma_*]$ используем формулу (11) для расчета давления.

С учетом

$$\frac{\mathrm{M}^2-1}{\rho v^2}=\frac{\rho v^2/\gamma p-1}{\rho v^2}=\frac{1}{\gamma p}-\frac{\gamma p}{\gamma p\rho v^2}=\frac{1}{\gamma p}-\frac{1}{\gamma p\mathrm{M}^2}$$

выражение (10) превращается в нелинейное уравнение относительно σ. Решив его, получим искомый угол $\sigma_0\in[\sigma_0;\sigma_*]$.

Поскольку $\left.\frac{df}{d\sigma}\right|_{\sigma_0}=0$, предположим, что функция $f(\sigma)$ изменяется по параболическому закону с коэффициентами A и B на интервале $[0;\sigma_*]$:

$$f=A(\sigma-\sigma_0)^2+B. \tag{12}$$

При $\sigma=\sigma_0$

$$f(\sigma_0)=f_0=b,$$

при $\sigma=\sigma_*$

$$f(\sigma_*)=f_*=a(\sigma_*-\sigma_0)^2+b.$$

Тогда $a=\frac{f_*-f_0}{(\sigma_*-\sigma_0)^2}$ и уравнение (12) примет вид

$$f=\frac{f_*-f_0}{(\sigma_*-\sigma_0)^2}(\sigma-\sigma_0)^2+f_0. \tag{13}$$

Здесь $f_*=\frac{1}{r(\sigma_*)\rho(p(\sigma_*))v(p(\sigma_*))}$.

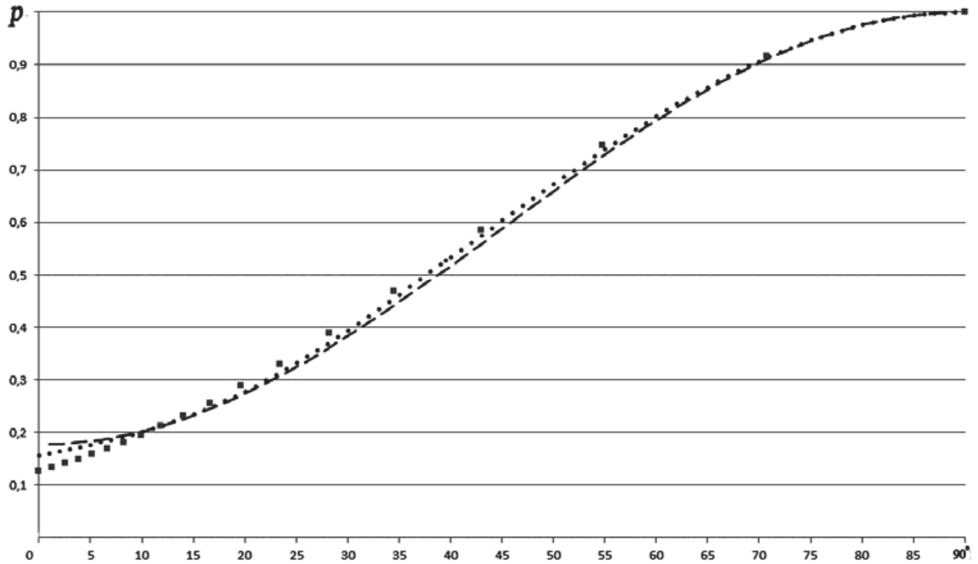
Чтобы определить f_0, вычислим $p(\sigma_0)=(p_*-p_\infty)\frac{\sin^2\sigma_0}{\sin^2\sigma_*}+p_\infty$.

Тогда

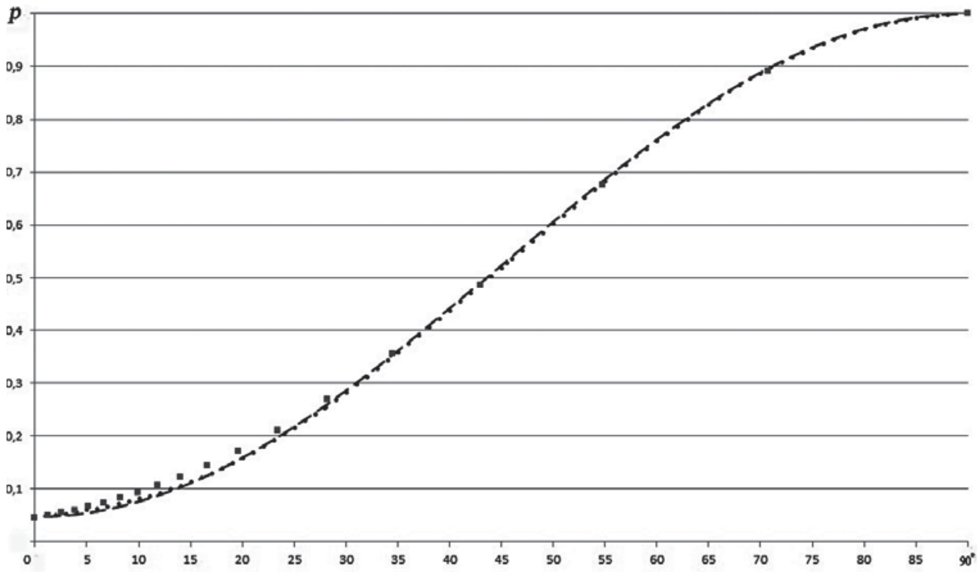
$$f_0=\frac{1}{r(\sigma_0)\rho\big(p(\sigma_0)\big)v\big(p(\sigma_0)\big)}.$$

Подставив выражение (13) в уравнение (1), получим

$$\frac{1}{r(\sigma)\rho(p)v(p)}=\frac{f_*-f_0}{(\sigma_*-\sigma_0)^2}(\sigma-\sigma_0)^2+f_0,$$



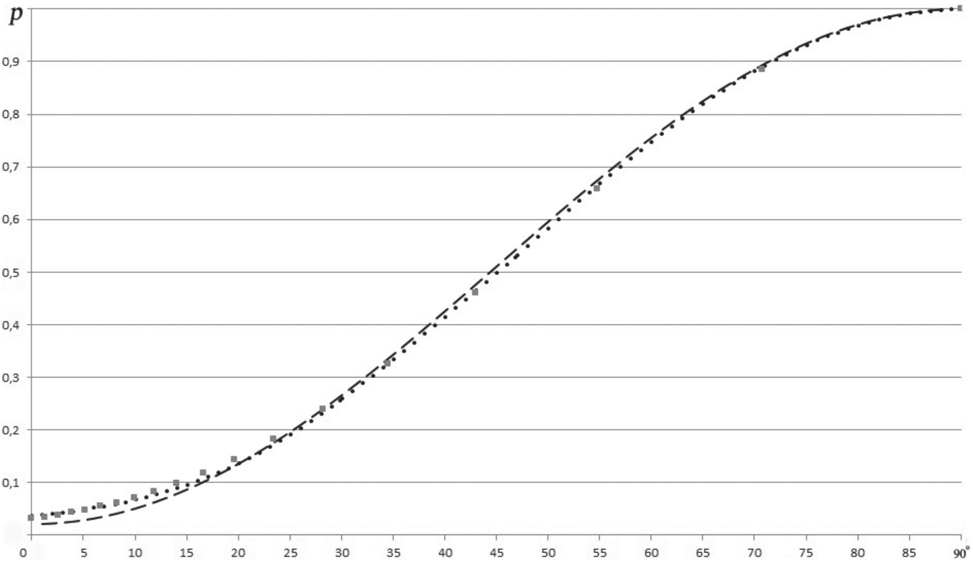
а



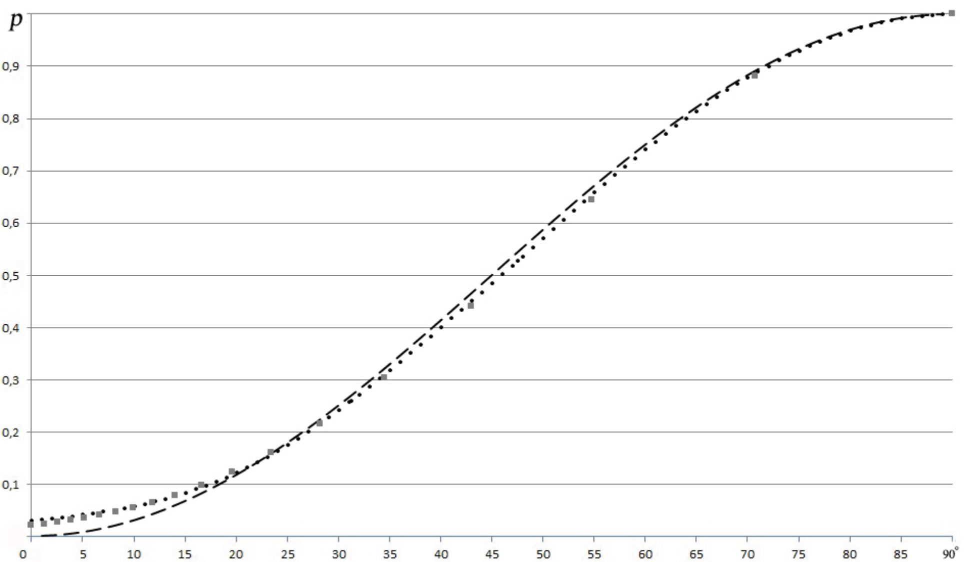
б

Рис. 1. Зависимость давления *p* от угла наклона σ при *b* / *a* = 1 / 2,

– – – — по формуле Ньютона; ····· — по предлагаемому методу;



в



г

полученная при М = 2 (*а*); 4 (*б*); 6 (*в*) и 20 (*г*):

■ ■ ■ — по табличным данным [3]

или

$$p^{\frac{1}{\gamma}}\sqrt{1-p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}=\frac{\gamma-1}{2\gamma\cdot r(\sigma)\left(\frac{f_*-f_0}{(\sigma_*-\sigma_0)^2}(\sigma-\sigma_0)^2+f_0\right)}. \qquad (14)$$

Уравнение (14) при фиксированном σ является нелинейным относительно p. Решив его, найдем распределение давления на интервале $[0;\sigma_0]$ как функцию σ.

Анализ результатов. Для примера приведем результаты расчетов по предложенному методу для эллипсоидов двух типов с отношением полуосей $b / a = 1 / 2$ (рис. 1) [3] и $b / a = 3 / 2$ (рис. 2) [4] при различных значениях числа Маха. Из сравнения расчетных данных с табличными [3, 4] видно, что при расчете давления на эллипсоиде с отношением полуосей $b / a = 1 / 2$ при низких значениях числа Маха можно получить удовлетворительный результат, используя формулу Ньютона. Однако при больших значениях числа Маха для эллипсоида с соотношением полуосей $b / a = 3 / 2$ имеется значительное рассогласование давления, рассчитанного по формуле Ньютона, с данными [3, 4]. В то же время предлагаемый метод в отношении всего представленного набора исходных параметров дает вполне приемлемые результаты для быстрой оценки давления на поверхности тела.

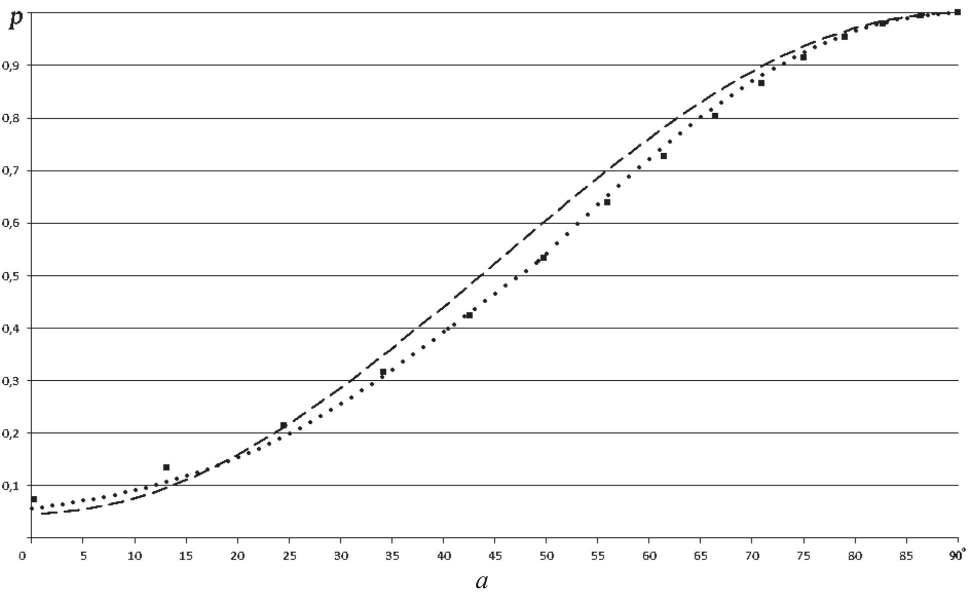
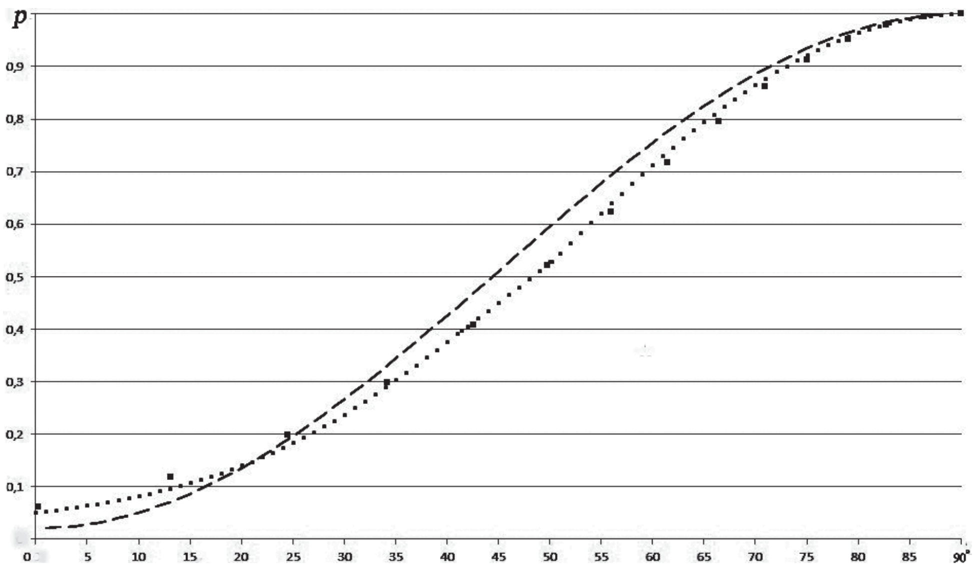
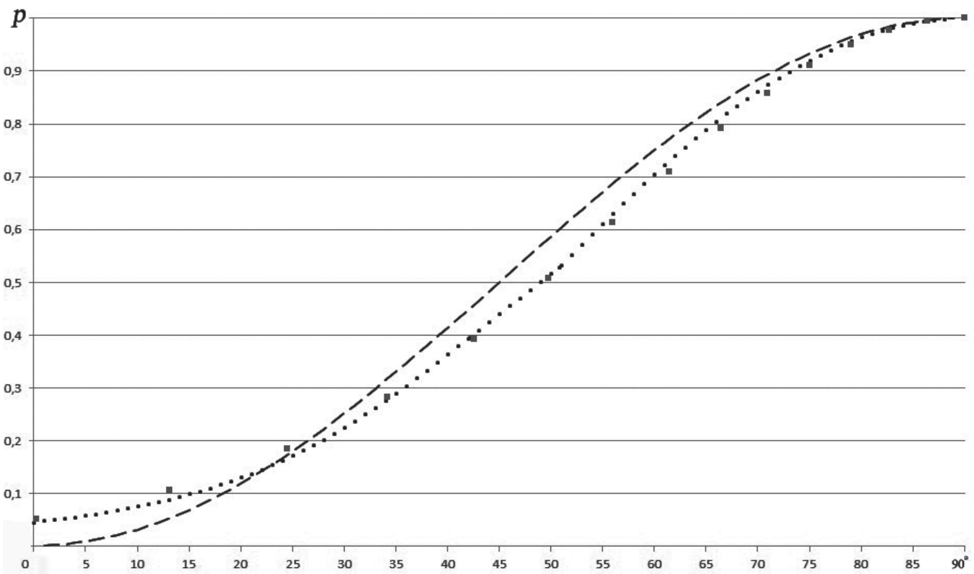


Рис. 2. Зависимость давления p от угла наклона σ для $b / a = 3 / 2$,

– – – — по формуле Ньютона; ····· — по предлагаемому методу;



б



в

полученная при M = 4 (*а*); 6 (*б*) и 20 (*в*):

▪▪▪ — по табличным данным [4]

Выводы. Новый метод позволяет определить давление и другие параметры течения газа на поверхности тела с достаточной для практики точностью; при этом не требуется существенных затрат времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котенев В. П. Определение положения звуковой точки на поверхности выпуклого затупленного тела // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естествознание. Спец. вып. Мат. моделирование. – 2011. – С. 150–153.
2. Покровский А. Н., Фролов Л. Г. Приближенные зависимости для определения давления на поверхности сферы или цилиндра при произвольном числе Маха набегающего потока // Механика жидкости и газа. – 1985. – № 2. – С. 185–190.
3. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. – М.: Наука, 1970.
4. Белоцерковский О. М. Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной // Расчетные формулы и таблицы полей течения. – М.: ВЦ АН СССР, 1961. – 56 с.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.