

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНОЙ ПЛАЗМЫ НОСИТЕЛЕЙ ГРАФЕНА В СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Получены гидродинамические уравнения движения электронно-дырочной плазмы в графене, находящемся во внешних электрическом и магнитном полях. Сделано предположение, что время изменения внешних полей намного меньше времени локальной релаксации ферми-систем носителей, в связи с чем используется принцип локального равновесия. Показано, что сила Лоренца, действующая на поток носителей в магнитном поле, в 2 раза меньше аналогичной силы в классическом пределе (движение массовых заряженных частиц), что связано с особенностью энергетического спектра носителей в графене. Рассчитан спектр плазмонов во внешнем магнитном поле.

Ключевые слова: графен, конденсированное состояние, электронно-дырочная плазма, ферми-системы.

Актуальность исследования электронно-дырочной плазмы носителей графена обусловлена большой перспективностью использования нелинейных и неравновесных явлений для различных практических применений, и в частности в источниках и детекторах излучения терагерцового диапазона. Для расчета коллективных эффектов и поиска новых закономерностей эволюции плазменных систем наиболее удобными являются гидродинамические модели. Для графена до недавнего времени разработка таких моделей вызывала затруднения из-за линейности энергетического спектра носителей.

В данной работе получены гидродинамические уравнения для движения электронно-дырочной плазмы носителей в стационарных (или медленно изменяющихся) внешних электрическом и магнитном полях. При выводе гидродинамических уравнений предполагалась непрерывность энергетического спектра, что справедливо при $T \approx \Delta$ (Δ — энергия первого уровня Ландау), откуда с учетом $\mu \gg T$ определим температурную область применимости развитой гидродинамической теории и нижние значения химического потенциала (расчеты приведены ниже):

$$T \gg v_F \sqrt{\frac{e\hbar B_z}{2}}; \quad \mu \gg \frac{e\hbar v_F^2 B_z}{2T}.$$

Гидродинамическая модель плазмы носителей в графене. Энергетический спектр электронов (и дырок) в графене при малых энергиях и квазиимпульсах является линейным [1], т. е.

$$\varepsilon = v_F p,$$

где ε , p — энергия и квазиимпульс электрона в решетке графена; $v_F \approx 10^8$ см/с — характеристическая скорость Ферми. Из вида энергетических спектров следует, что все носители движутся с одной и той же скоростью v_F :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = v_F \frac{\mathbf{p}}{p}.$$

Кинетические уравнения для частиц в заданных внешних электрическом и магнитном полях имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + v_F \frac{\mathbf{p}}{p} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - e \left(\mathbf{E} + v_F \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{B}}{p} \right) \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = \\ = St\{f_e, f_e\} + St\{f_e, f_h\} + St_i\{f_e\}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_h}{\partial t} + v_F \frac{\mathbf{p}}{p} \frac{\partial f_h}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} - v_F \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{B}}{p} \right) \frac{\partial f_h}{\partial \mathbf{p}} = \\ = St\{f_h, f_h\} + St\{f_h, f_e\} + St_i\{f_h\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь f_e , f_h — функции распределения электронов и дырок; e — абсолютное значение заряда электрона; \mathbf{r} — радиус-вектор; \mathbf{E} , \mathbf{B} — векторы напряженности электрического поля и проекции индукции магнитного поля на нормаль к графеновому листу; $St\{f_e, f_e\}$, $St\{f_h, f_h\}$, $St\{f_e, f_h\}$ — интегралы столкновений, соответствующие упругому взаимодействию между различными носителями; $St_i\{f_e\}$, $St_i\{f_h\}$ — интегралы столкновений, отвечающие упругому рассеянию носителей на ионах (примесях, дефектах) в решетке. Процессами электронно-дырочной рекомбинации пренебрегаем, предполагая, что время рекомбинации много больше обратной частоты столкновений между носителями.

В соответствии с принципом локального равновесия [2] распределения Ферми — Дирака для электронов и дырок будут иметь следующий вид [3]:

$$f_e(\mathbf{p}) = \left[1 + \exp \left(\frac{\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v}_e - \mu_e}{T} \right) \right]^{-1} \approx f_e^0 - \frac{\partial f_e^0}{\partial \varepsilon} \mathbf{p}\mathbf{v}_e; \quad (3)$$

$$f_h(\mathbf{p}) = \left[1 + \exp \left(\frac{\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v}_h + \mu_h}{T} \right) \right]^{-1} \approx f_h^0 - \frac{\partial f_h^0}{\partial \varepsilon} \mathbf{p}\mathbf{v}_h, \quad (4)$$

где \mathbf{v}_e , \mathbf{v}_h — некоторые средние скорости дрейфового движения электронной и дырочной компонент; μ_e , μ_h — химические потенциалы электронов и дырок, T — температура в энергетических единицах. Распределения записаны для малой скорости дрейфа носителей.

Интегрируя уравнения (1), (2) по области

$$d\Gamma = 4 \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2},$$

где множитель 4 связан с двукратным спиновым и поверхностным вырождением, получаем уравнения непрерывности для электронной и дырочной компонент:

$$\frac{\partial \Sigma_e}{\partial t} + \frac{\partial \Sigma_e \mathbf{v}_e}{\partial \mathbf{r}} = 0; \quad \frac{\partial \Sigma_h}{\partial t} + \frac{\partial \Sigma_h \mathbf{v}_h}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (5)$$

В уравнениях (5) равновесное значение плотности носителей — электронов и дырок — на единицу поверхности графена

$$\Sigma_e = \int \frac{4d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \left[1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_e}{T}\right) \right];$$

$$\Sigma_h = \int \frac{4d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \left[1 + \exp\left(\frac{\varepsilon + \mu_h}{T}\right) \right].$$

Из уравнений (1), (2) после умножения на импульс \mathbf{p} и интегрирования по $d\Gamma$ следует уравнение Эйлера:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle p_e \rangle \mathbf{v}_e}{v_F} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial (\langle p_e \rangle v_F)}{\partial \mathbf{r}} - e \Sigma_e \mathbf{E} + \frac{1}{2} e \Sigma_e \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_z = \mathbf{F}_e; \quad (6)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle p_h \rangle \mathbf{v}_h}{v_F} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial (\langle p_h \rangle v_F)}{\partial \mathbf{r}} + e \Sigma_h \mathbf{E} - \frac{1}{2} e \Sigma_h \mathbf{v}_h \times \mathbf{B}_z = \mathbf{F}_h. \quad (7)$$

Следует обратить внимание на то, что вследствие линейности энергетического спектра носителей сила Лоренца, действующая на поток частиц с плотностью тока $\mathbf{j} = e \Sigma \mathbf{v}$, имеет вид

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{2} e \Sigma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_z = \frac{1}{2} \mathbf{j} \times \mathbf{B}_z,$$

что ровно в 2 раза меньше, чем в аналогичном выражении для классического электронного газа. Множитель $\frac{1}{2}$ получается при усреднении потоков частиц в различных направлениях и связан с тем, что все частицы движутся с одной и той же скоростью.

Уравнения для переноса энергии определим, умножая уравнения (1) и (2) на ε и интегрируя по $d\Gamma$:

$$\frac{\partial (v_F \langle p_e \rangle)}{\partial t} + \frac{3v_F}{2} \frac{\partial (\mathbf{v}_e \langle p_e \rangle)}{\partial \mathbf{r}} + e \Sigma_e \mathbf{v}_e \mathbf{E} = Q_e; \quad (8)$$

$$\frac{\partial (v_F \langle p_h \rangle)}{\partial t} + \frac{3v_F}{2} \frac{\partial (\mathbf{v}_h \langle p_h \rangle)}{\partial \mathbf{r}} - e \Sigma_h \mathbf{v}_h \mathbf{E} = Q_h. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) необходимо дополнить уравнением состояния, связывающим между собой плотность носителей на единицу площади

и средний модуль импульса:

$$\langle p \rangle = \frac{T^3}{\pi^2 \hbar^2 v_F^3} I_2 \left(\frac{\mu}{T} \right); \quad \Sigma = \frac{T^2}{\pi^2 \hbar^2 v_F^2} I_1 \left(\frac{\mu}{T} \right);$$

$$I_\alpha(z) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1 + \exp(x - z)} = -\Gamma(1 + \alpha) \text{Li}_{1+\alpha}(-e^z),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера; $\text{Li}_n(z)$ — полилогарифм.

Таким образом, равновесное уравнение состояния для электронной и дырочной компонент имеет вид

$$\frac{\langle p \rangle v_F}{\Sigma 2T} = \frac{\text{Li}_3(-e^{\frac{\mu}{T}})}{\text{Li}_2(-e^{\frac{\mu}{T}})} = f_1 \left(\frac{\mu}{T} \right).$$

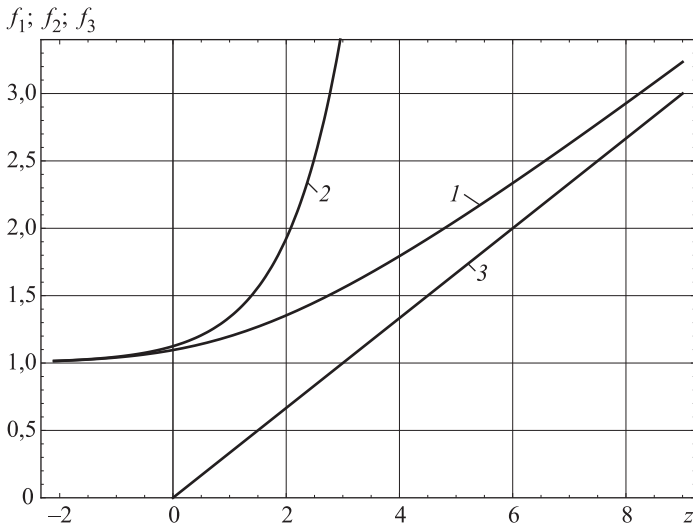
Плотность носителей и средний модуль импульса входят в уравнения движения и определяются равновесным распределением. Существенное отличие этого уравнения состояния от обычного для электронного газа обусловлено как видом энергетического спектра носителей, так и двумерностью задачи.

В предельных случаях

$$z \ll -1: \quad f_1(z) \rightarrow f_2(z) = 1 + \frac{1}{8} e^{\frac{1}{2}z};$$

$$z \gg 1: \quad f_1(z) \rightarrow f_3(z) = \frac{1}{3} z.$$

В точке Дирака ($\mu = 0$) $f_1(0) = 9\pi^{-2}\zeta(3) \approx 1,096$. Графики функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ и $f_3(z)$ представлены на рисунке.



Графики функций $f_1(z)$ (1), $f_2(z)$ (2) и $f_3(z)$ (3)

Гидродинамическая модель движения электронно-дырочной плазмы графена во внешнем электрическом и магнитном полях включа-

ет в себя уравнения (5)–(9), которые необходимо дополнить расчетом правых частей. Как показано в работе [3], для эффективных сил “трения” справедливы выражения

$$\mathbf{F}_e = -\beta_{eh}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_h) - \beta_{ei}\mathbf{v}_e;$$

$$\mathbf{F}_h = -\beta_{eh}(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_e) - \beta_{hi}\mathbf{v}_h.$$

Циклотронная частота. Рассмотрим пространственно-однородное состояние системы при отсутствии продольного внешнего поля \mathbf{E} . Тогда уравнения (6), (7) принимают вид

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle p_e \rangle \mathbf{v}_e}{v_F} \right) + \frac{1}{2} e \Sigma_e \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_z = \mathbf{F}_e; \quad (10)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle p_h \rangle \mathbf{v}_h}{v_F} \right) - \frac{1}{2} e \Sigma_h \mathbf{v}_h \times \mathbf{B}_z = \mathbf{F}_h. \quad (11)$$

Будем искать решение системы уравнений (10) и (11) в виде

$$\mathbf{v}_e = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_h = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Требование существования нетривиального решения системы уравнений (10) и (11) относительно амплитуд A_1 , A_2 , B_1 и B_2 приводит к дисперсионному уравнению

$$\det D = 0,$$

где матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3i\omega\langle p_e \rangle}{2v_F} + \beta_{eh} + \beta_{ei} & \frac{e\Sigma_e B_z}{2} & -\beta_{eh} & 0 \\ -\frac{e\Sigma_e B_z}{2} & \frac{3i\omega\langle p_e \rangle}{2v_F} + \beta_{eh} + \beta_{ei} & 0 & -\beta_{eh} \\ -\beta_{eh} & 0 & \frac{3i\omega\langle p_h \rangle}{2v_F} + \beta_{eh} + \beta_{hi} & -\frac{e\Sigma_h B_z}{2} \\ 0 & -\beta_{eh} & \frac{e\Sigma_h B_z}{2} & \frac{3i\omega\langle p_h \rangle}{2v_F} + \beta_{eh} + \beta_{hi} \end{pmatrix}.$$

В монополярном приближении $\mu \gg T$ можно рассматривать только уравнение (10), из которого следует, что скорость системы изменяется по направлению (прецессирует) по закону

$$\dot{\mathbf{v}}_e = -\omega_0 \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_z, \quad (12)$$

$$\omega_0 = \frac{ev_F \Sigma_e B_z}{3 \langle p_e \rangle} = \frac{eB_z}{m^*}, \quad m^* = 6T v_F^{-2} f_1 \left(\frac{\mu}{T} \right).$$

Используя найденные выше разложения для $f_1(z)$, находим связь между циклотронной массой и химическим потенциалом:

$$\mu = \frac{m^* v_F^2}{2}.$$

Отсюда следует, что электроны во время прецессии движутся вдоль поверхности Ферми, радиус которой определяется химическим потенциалом. Таким образом, циклотронная масса в униполярном случае не зависит от температуры.

Плазменные волны в монополярном газе носителей. Рассмотрим задачу о плазменных возмущениях в монополярном случае. Тогда можно считать концентрацию дырок пренебрежимо малой по сравнению с концентрацией электронов, силой электронно-дырочного течения можно пренебречь. Примем, что входящие в уравнения динамики и непрерывности величины возмущены, т. е.

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_\omega e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\omega e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)};$$

$$\langle p \rangle = \langle p \rangle_0 + p_\omega e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

где \mathbf{k} — волновой вектор возмущения. Уравнения динамики и непрерывности для рассматриваемого случая имеют вид (индексы электронной компоненты опущены)

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial \Sigma \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle p \rangle \mathbf{v}}{v_F} \right) + \frac{v_F}{2} \frac{\partial (\langle p \rangle)}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{2} e \Sigma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_z = 0. \quad (14)$$

Из уравнения непрерывности следует соотношение

$$\omega \Sigma_\omega = \Sigma_0 k_\alpha V_\alpha, \quad (15)$$

по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Благодаря уравнению состояния средний импульс и плотность электронов взаимосвязаны:

$$p_\omega = \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \Sigma_0}{\partial \mu} \right)^{-1} \Sigma_\omega = \bar{p} \Sigma_\omega.$$

После линеаризации уравнений (14) возникает следующая задача:

$$\begin{pmatrix} -3im\omega & e\Sigma_0 B & ik_1 v_F \bar{p} \\ -e\Sigma_0 B & -3im\omega & ik_2 v_F \bar{p} \\ \Sigma_0 k_1 & \Sigma_0 k_2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \Sigma_\omega \end{pmatrix} = 0.$$

Нетривиальное решение для вектора амплитуд возмущений существует только при условии вырождения матрицы. Последним условием определяется дисперсионное соотношение для плазменных волн в униполярной плазме графена:

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \lambda^2 k^2), \quad (16)$$

где введена “длина”

$$\lambda = \frac{1}{eB_z} \sqrt{\frac{3 \langle p \rangle}{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \mu} \right) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \mu} \right)^{-1}}.$$

С учетом уравнения состояния, используя равенство

$$\frac{\partial J(\alpha, z)}{\partial z} = -\Gamma(1 + \alpha) \text{Li}_\alpha(-e^z),$$

находим

$$\lambda = \frac{2T}{eB_z v_F^2} \sqrt{\frac{-3 \text{Li}_3(-e^{\frac{\mu}{T}})}{\ln(1 + e^{\frac{\mu}{T}})}}; \quad (17)$$

$$\omega_0 = \frac{eB_z v_F^2}{6T} \frac{\text{Li}_2(-e^{\frac{\mu}{T}})}{\text{Li}_3(-e^{\frac{\mu}{T}})}; \quad c = \lambda \omega_0 = \frac{v_F \text{Li}_2(-e^{\frac{\mu}{T}})}{\sqrt{-3 \text{Li}_3(-e^{\frac{\mu}{T}}) \ln(1 + e^{\frac{\mu}{T}})}}.$$

Кванты возмущений плазмы носителей в графене можно интерпретировать как газ массовых бозонов со спектром

$$\varepsilon^2 = m_B^2 c^4 + p^2 c^2; \quad m_B = \frac{\hbar \omega_0}{c^2} = \frac{e \hbar B_z}{2T} \frac{\ln(1 + e^{\frac{\mu}{T}})}{-\text{Li}_2(-e^{\frac{\mu}{T}})},$$

в то время как эффективная циклотронная масса

$$m^* = \frac{6T}{v_F^2} \frac{\text{Li}_3(-e^{\frac{\mu}{T}})}{\text{Li}_2(-e^{\frac{\mu}{T}})}.$$

Ширина энергетической щели

$$\Delta = 2m_B c^2 = 2\hbar \omega_0 = \frac{e \hbar v_F^2 B_z}{3T} \frac{\text{Li}_2(-e^{\frac{\mu}{T}})}{\text{Li}_3(-e^{\frac{\mu}{T}})}.$$

Рассматриваемое приближение со слабым электронно-дырочным взаимодействием относится к случаю $\mu \gg T$, откуда с большой точностью получаем

$$\Delta = \frac{e \hbar v_F^2 B_z}{2\mu}.$$

Заключение. Построена гидродинамическая модель электронно-дырочной плазмы носителей в графене в стационарных внешних электромагнитных полях. В случае, когда времена релаксации плазменной системы намного меньше характерных времен изменения внешних полей, справедлив принцип локального равновесия. Определен спектр плазменных возмущений во внешнем магнитном поле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wallace P. R. The Band Theory of Graphite // *Phys. Rev.* — 1947. — No. 71. — P. 622–634.
2. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Физическая кинетика*. — М.: Физматлит, 2002. — 536 с.
3. Hydrodynamic model for electron-hole plasma in graphene / D. Svintsov, V. Vyurkov, S. Yurchenko, T. Otsuji and V. Ryzhii // *J. Appl. Phys.* — 111, 083715 (2012); doi: 10.1063/1.4705382.

Статья поступила в редакцию 04.10.2012