УДК 519.718

Г. С. Садыхов, О. В. Елисеева, И. А. Бабаев

СРЕДНЯЯ НАРАБОТКА ДО КРИТИЧЕСКОГО ОТКАЗА ТЕХНОГЕННО-ОПАСНОГО ОБЪЕКТА: ПРЕДЕЛЬНЫЕ И НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Для техногенно-опасных объектов, критические отказы которых сосредоточены на заданном интервале времени, определен количественный показатель «средняя наработка до критического отказа». Установлены формула для его расчета, а также предельные и непараметрические оценки.

E-mail: gsadykhov@gmail.com

Ключевые слова: *критический отказ, средняя наработка до критического отказа, техногенно-опасный объект, предельные оценки, непараметрические оценки.*

Пусть $(\tau, \tau + l)$ — заданный опасный интервал времени эксплуатации техногенно-опасного объекта (ТОО), т. е. возможный отказ ТОО на этом периоде — критический, приводящий к авариям, катастрофам, чрезвычайным ситуациям и т. д. Тогда наработкой ТОО до критического отказа служит величина

$$\zeta_l(\tau) = \begin{cases} \zeta, & \text{если отказ произошел внутри интервала } (\tau, \tau + l); \\ \tau + l, & \text{если отказа внутри данного интервала не было,} \end{cases} \tag{1}$$

где ζ — наработка до критического отказа.

Случайная величина (1) — смешанная, так как у нее две составляющие: непрерывная, лежащая внутри интервала $(\tau, \tau + l)$, и дискретная, равная значению $\tau + l$. В связи с этим применение традиционных показателей «гамма-процентная наработка до отказа» и «средняя наработка до отказа» некорректно, поскольку продолжительность для первого показателя включает длительность периода приработки, а в состав второго дополнительно входит и длительность периода старения ТОО. Следовательно, в зависимости от продолжительности перечисленных периодов будет искажена наработка до критического отказа ТОО.

С учетом изложенного средняя наработка до критического отказа

$$\rho_l(\tau) = \left\langle \zeta_l(\tau) \right\rangle, \tag{2}$$

где $\langle\cdot\rangle$ — символ математического ожидания величины, заключенной внутри угловых скобок.

Формула расчета показателя $\rho_l(\tau)$. Для расчета показателя докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедлива следующая формула*:

$$\rho_l(\tau) = \tau + \frac{1}{P(\tau)} \int_{\tau}^{\tau+l} P(t)\,dt, \tag{3}$$

где $P(\cdot)$ *— вероятность безотказной работы объекта в течение времени, указанного внутри круглых скобок.*

Доказательство. Для дискретной части величины (1), равной выражению во второй строке, имеем

$$\Pr\left(\zeta_l\left(\tau\right) = \tau + l\right) = \frac{P(\tau + l)}{P(\tau)}, \tag{4}$$

где $\Pr(\cdot)$ — вероятность события, заключенного внутри скобок (от англ. probability).

Найдем функцию распределения для непрерывной части (1). Для этой цели, согласно формуле условных вероятностей, имеем

$$\Pr\left(\left(\zeta_l(\tau) < \tau + x\right) / \zeta > \tau\right) = \frac{F(\tau + x) - F(\tau)}{P(\tau)},$$

где $x \in (0, l)$, $F(x)$ — функция распределения случайной величины ζ.

Отсюда для функции распределения случайной величины (1) получим следующее выражение:

$$F_{\zeta_l(\tau)}(\tau + x) = \frac{F(\tau + x) - F(\tau)}{P(\tau)}.$$

Следовательно, плотность распределения непрерывной части (1)

$$f_{\zeta_l(\tau)}(\tau + x) = \frac{f(\tau + x)}{P(\tau)}, \quad x \in (0, l), \tag{5}$$

где $f(x)$ — плотность распределения случайной величины ζ.

Тогда, согласно формуле (2), с учетом (4) и (5) имеем

$$\rho_l(\tau) = (\tau + l)\frac{P(\tau + l)}{P(\tau)} + \int_0^l (\tau + x)\frac{f(\tau + x)}{P(\tau)}\,dx. \tag{6}$$

Для второго слагаемого в выражении (6), применив интегрирование по частям, найдем

$$\frac{1}{P(\tau)}\int_0^l (\tau+x)f(\tau+x)dx = -\frac{1}{P(\tau)}\left((\tau+x)P(\tau+x)\Big|_0^l - \int_0^l P(\tau+x)dx \right),$$

откуда

$$\frac{1}{P(\tau)}\int_0^l (\tau+x)f(\tau+x)dx = -(\tau+l)\frac{P(\tau+l)}{P(\tau)} + \tau + \frac{1}{P(\tau)}\int_0^l P(\tau+x)dx.$$

Подставив найденное значение в выражение (6), получим искомую формулу (3).

Свойства показателя $\boldsymbol{\rho_l(\tau)}$. Формула (3) позволяет установить следующие свойства показателя (2).

1. Имеет место оценка

$$\tau < \rho_l(\tau) \le \tau + l,$$

причем оценка справа достижима тогда и только тогда, когда $P(\tau+l) = P(\tau)$.

2. Справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{\substack{l\to\infty \\ \tau\to+0}} \rho_l(\tau) = r,$$

где $r = \int_0^l P(t)dt$ — средняя наработка до отказа.

3. Имеет место формула

$$\frac{\partial\rho_l(\tau)}{\partial\tau} = \frac{P(\tau+l)}{P(\tau)} + \lambda(\tau)\big(\rho_l(\tau) - \tau\big), \tag{7}$$

где $\lambda(\tau)$ — интенсивность отказов,

$$\lambda(\tau) = -\frac{P'(\tau)}{P(\tau)}. \tag{8}$$

Первые два свойства очевидны, поэтому докажем третье свойство.

Действительно, взяв частную производную по переменной τ от правой части (3), имеем

$$\frac{\partial\rho_l(\tau)}{\partial\tau} = 1 + \frac{1}{P^2(\tau)}\left(P(\tau)\big(P(\tau+l) - P(\tau)\big) - P'(\tau)\int_\tau^{\tau+l} P(t)dt \right),$$

откуда с учетом выражения (8) получим формулу (7).

Нижние непараметрические оценки показателя $\boldsymbol{\rho_l(\tau)}$. 1. При $\tau > \tau_0$ имеет место следующая оценка:

$$\rho_l(\tau) > \rho_l(\tau_0). \tag{9}$$

В самом деле, поскольку правая часть выражения (7) положительна, то $\dfrac{\partial \rho_l(\tau)}{\partial \tau} > 0$. Следовательно, $\rho_l(\tau)$ как функция времени τ монотонно растет, откуда вытекает оценка (9).

Другими словами, зная оценку показателя $\rho_l(\tau)$ для более раннего периода времени τ_0, можно экстраполировать ее на более поздний срок.

В частности, из оценки (9) при $\tau > 0$ имеем

$$\rho_l(\tau) > \rho_l(0),$$

где $\rho_l(0)$ — средняя безотказная наработка ТОО на отрезке времени $(0, l)$:

$$\rho_l(0) = \int_0^l P(t)dt.$$

2. Для любой продолжительности $l > l_0$ имеет место следующая оценка:

$$\rho_l(\tau) > \rho_{l_0}(\tau). \tag{10}$$

Оценка (10) следует непосредственно из формулы (3).

Оценки (9) и (10) непараметрические, поскольку они справедливы для любого закона распределения наработок до отказа.

Предельные и асимптотические поведения показателя $\boldsymbol{\rho_l(\tau)}$. 1. Справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{l \to \infty} \big(\rho_l(\tau) - \tau \big) = R(\tau),$$

где $R(\tau) = \big\langle (\zeta - \tau) / \zeta > \tau \big\rangle$ — средний остаточный ресурс объекта сверх времени τ, равный [1]:

$$R(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_\tau^\infty P(t)dt. \tag{11}$$

Это соотношение вытекает непосредственно из формулы (3).

2. Чтобы исследовать поведение показателя $\rho_l(\tau)$ как функцию времени τ при больших значениях, потребуется следующее утверждение.

Лемма. *Пусть интенсивность отказов по выражению (8) имеет предел*

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = L > 0 \tag{12}$$

для объекта, у которого ограничен средний ресурс:

$$r = \int_0^\infty P(t)dt < \infty. \tag{13}$$

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{P(\tau)} \int_\tau^{\tau+l} P(t)dt = \frac{1}{L}\left(1 - e^{-Ll}\right). \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку левая часть (14) при $\tau \to \infty$ в силу условия (13) есть неопределенность вида 0/0, то, раскрыв эту неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{P(\tau)} \int_\tau^{\tau+l} P(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{P(\tau+l) - P(\tau)}{P'(\tau)}.$$

Отсюда с учетом формул (8) и (12) имеем

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{P(\tau)} \int_\tau^{\tau+l} P(t)dt = \frac{1}{L}\left(1 - \lim_{\tau\to\infty} \frac{P(\tau+l)}{P(\tau)}\right). \tag{15}$$

Согласно [2],

$$P(z) = \exp\left(-\int_0^z \lambda(t)dt\right),$$

поэтому

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{P(\tau+l)}{P(\tau)} = \lim_{\tau\to\infty} \exp\left(-\int_\tau^{\tau+l} \lambda(t)dt\right).$$

Применив теорему о среднем значении интеграла, с учетом непрерывности экспоненциальной функции найдем

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{P(\tau+l)}{P(\tau)}=\exp\left(-l\lim_{\tau\to\infty}\lambda(\tau+\theta)\right),$$

где $\theta\in(0,l)$.

Далее, использовав условие (12), имеем

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{P(\tau+l)}{P(\tau)}=\exp\left(-Ll\right).$$

Подставив полученное соотношение в выражение (15), найдем искомое соотношение (14).

Доказанная лемма позволяет установить следующее утверждение.

Теорема 2. *В условиях леммы кривая функции* $y=\rho_l(\tau)$ *как переменная времени* τ *имеет наклонную асимптоту, уравнение которой выглядит следующим образом:*

$$y=\tau+b, \tag{16}$$

где

$$b=\frac{1}{L}\left(1-e^{-Ll}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Согласно формуле (3), имеем

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\rho_l(\tau)}{\tau}=1+\frac{1}{\tau P(\tau)}\int_{\tau}^{\tau+l}P(t)\,dt,$$

откуда с учетом соотношения (14) найдем

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\rho_l(\tau)}{\tau}=1.$$

Следовательно, угловой коэффициент k наклонной асимптоты $y=k\tau+b$ равен единице, т. е.

$$y=\tau+b,$$

где значение постоянной величины требуется найти из условия

$$b=\lim_{\tau\to\infty}\left(\rho_l(\tau)-\tau\right).$$

Использовав формулу (3), имеем

$$b = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{P(\tau)} \int_{\tau}^{\tau+l} P(t)dt,$$

откуда, согласно (14), находим (17), что и доказывает теорему.

В частности, если $L=\infty$, то в соответствии с (17) имеем $b=0$. Тогда уравнение наклонной асимптоты принимает следующий вид: $y=\tau$. Другими словами, при $L=\infty$ биссектриса первого координатного угла служит наклонной асимптотой для показателя $\rho_l(\tau)$ как функции времени τ.

Отметим, что для экспоненциального закона распределения наработок до отказа ($P(t)=e^{-\lambda t}$, $\lambda>0=\text{const}$), согласно формуле (3),

$$\rho_l(\tau) = \tau + \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda l}\right). \tag{18}$$

В то же время, согласно равенствам (16) и (17), имеем в качестве наклонной асимптоты для кривой $\rho_l(\tau)$ следующее уравнение:

$$y = \tau + \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda l}\right). \tag{19}$$

Видно, что правые части уравнений (18) и (19) равны.

Следовательно, для экспоненциального закона распределения наработок до отказа уравнение кривой $\rho_l(\tau)$ как функция времени τ и уравнение ее наклонной асимптоты совпадают.

Чтобы построить график функции $y=\rho_l(\tau)$ для других классов распределений наработок до отказа, изменим формулу (3), приняв в ней $P(t)=\exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right)$. Тогда получим

$$\rho_l(\tau) = \tau + \int_0^l \left(\exp\left(-\int_{\tau}^{\tau+t} \lambda(u)du \right) dt \right),$$

откуда найдем

$$\frac{\partial \rho_l(\tau)}{\partial \tau} = 1 + \int_0^l \exp\left(-\int_{\tau}^{\tau+t} \lambda(u)du \right)\left(\lambda(\tau)-\lambda(\tau+t)\right)dt. \tag{20}$$

Из выражения (20), например, видно, что если $\lambda(t) \equiv \mathrm{const}$, то $\dfrac{\partial \rho_l(\tau)}{\partial \tau} = 1$. Этот вывод следует также из формулы (18).

Рассмотрим класс объектов, у которых интенсивность отказов $\lambda(t)$ как функция времени t монотонно растет. Этот класс интенсивно «стареющих» объектов наиболее опасен в эксплуатации. Поскольку для таких объектов $\lambda(\tau) < \lambda(\tau + t)$, то, согласно выражению (20), $\dfrac{\partial \rho_l(\tau)}{\partial \tau} < 1$. Другими словами, для интенсивно «стареющих» объектов угловой коэффициент касательной прямой, проведенной к кривой $\rho_l(\tau)$ в любой точке τ, имеет угол наклона к оси абсцисс меньше чем $\pi/4$.

Кроме того, функция $\rho_l(\tau)$, согласно (7), удовлетворяет условию $\dfrac{\partial \rho_l(\tau)}{\partial \tau} > 0$. Откуда следует, что функция $\rho_l(\tau)$ монотонно растет.

Если принять, что

$$L^{(\mathrm{c})} = \lim_{t \to \infty} \lambda^{(\mathrm{c})}(t),$$

где $\lambda^{(\mathrm{c})}(t)$ — интенсивность отказов «стареющего» объекта, то в соответствии с теоремой 2 уравнение наклонной асимптоты будет иметь вид

$$y = \tau + b^{(\mathrm{c})},$$

$$b^{(\mathrm{c})} = \frac{1}{L^{(\mathrm{c})}} \left(1 - e^{-L^{(\mathrm{c})} l}\right).$$

Объединив выводы, сделанные для интенсивно «стареющих» объектов, можно построить примерный график изменения показателя $\rho_l^{(\mathrm{c})}(\tau)$ как функцию времени τ и соответствующую наклонную асимптоту (рис. 1).

Точно так же, рассматривая класс объектов, у которых интенсивность отказов, напротив, монотонно убывает (класс «молодеющих» ТОО), будем иметь $\lambda(\tau) > \lambda(\tau + t)$, откуда, согласно уравнению (20), найдем $\dfrac{\partial \rho_l(\tau)}{\partial \tau} > 1$. Это означает, что угловой коэффициент касательной прямой, проведенной к кривой $\rho_l(\tau)$ в любой точке τ, имеет угол наклона к оси абсцисс больше чем $\pi/4$.

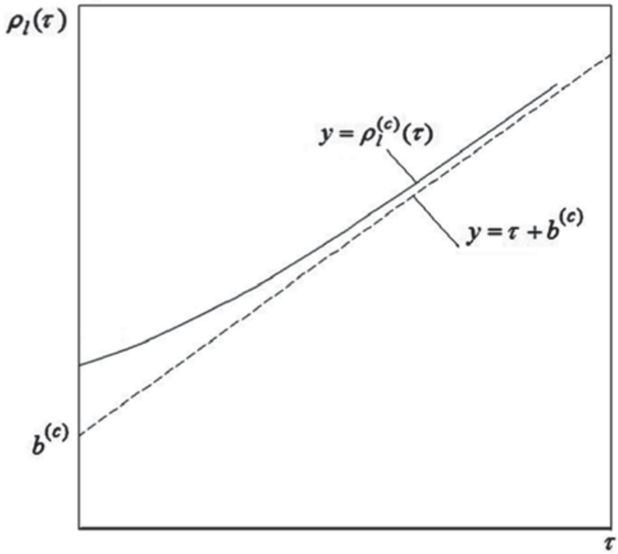

Рис. 1. Графики функции $\rho_l^{(c)}(\tau)$ и ее асимптоты

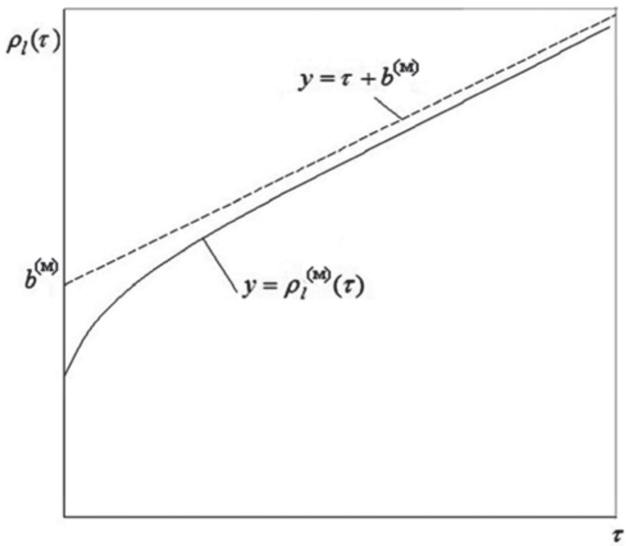

Рис. 2. Графики функции $\rho_l^{(м)}(\tau)$ и ее асимптоты

В то же время, согласно формуле (7), $\dfrac{\partial \rho_l(\tau)}{\partial \tau} > 0,$ что влечет монотонное возрастание $\rho_l(\tau)$ как функции времени τ.

Если принять, что

$$L^{(м)} = \lim_{t \to \infty} \lambda^{(м)}(t),$$

где $\lambda^{(\text{м})}(t)$ — интенсивность отказов «молодеющего» объекта, то, согласно теореме 2, уравнение наклонной асимптоты будет иметь вид

$$y = \tau + b^{(\text{м})},$$

$$b^{(\text{м})} = \frac{1}{L^{(\text{м})}}\left(1 - e^{-L^{(\text{м})}l}\right).$$

Выводы, сделанные для «молодеющих» объектов, позволяют построить примерный график показателя $\rho_l^{(\text{м})}(\tau)$ как функцию времени τ и соответствующую наклонную асимптоту (рис. 2).

Заключение. Определен показатель «средняя наработка до критического отказа» техногенно-опасного объекта, отказы которого сосредоточены на заданном интервале времени. Для введенного показателя получены формула его расчета, а также предельные и непараметрические оценки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (*проект № 10-08-00607-а*).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садыхов Г. С., Кузнецов В. И. Методы и модели оценок безопасности сверхназначенных сроков эксплуатации технических объектов. – М.: ЛКИ/URSS, 2007. – 144 с.
2. Садыхов Г. С., Некрасова О. В. Расчет показателей безопасности эксплуатации подсистемы с параллельно нагруженными элементами в составе техногенно-опасного объекта // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – № 1. – С. 107–113.

Статья поступила в редакцию 03.07.2012.