

В.Е. Карасик, И.М. Кириллов, Р.П. Краснов,  
В.И. Юдин

## ПРИМЕНЕНИЕ КВАНТОВО-КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ ПРИ РАСЧЕТАХ ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ СО<sub>2</sub>-ЛАЗЕРОВ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Предложен метод совместного расчета пространственной структуры и абсолютного значения мощности индуцированного излучения СО<sub>2</sub>-лазера, основанный на модифицированном выражении дифракционного интеграла Зоммерфельда и квантово-кинетической модели активной среды.*

**E-mail: i.m.kirillov@gmail.com**

**Ключевые слова:** дифракционный интеграл, активная среда, СО<sub>2</sub>-лазер.

С помощью метода интегральных уравнений, часто применяемого при расчете оптических свойств лазерных систем, можно рассчитывать резонаторы, образованные зеркалами практически произвольной формы и размеров. При этом метод интегральных уравнений позволяет учесть активную среду, заполняющую лазерный резонатор.

Модифицированное выражение дифракционного интеграла Зоммерфельда, допускающее поперечную неоднородность среды, предложено в работе [1]. В соответствии с этой работой будем считать, что в неоднородной активной среде, характеризующейся заданной зависимостью комплексного показателя преломления (КПП) от поперечных координат

$$n = n'(x, y) + in''(x, y), \quad (1)$$

в плоскости  $z = z'$  имеется отражающий непрозрачный экран с отверстием. Применим функцию излучения элементарного источника Гюйгенса в виде

$$G = \frac{e^{ikR}}{R} f(R), \quad (2)$$

где  $k$  — волновое число;  $f(R)$  — некоторая функция, подлежащая определению;

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Величины со штрихами и без них относятся соответственно к плоскости экрана и плоскости наблюдения.

Подставляя уравнение (2) в уравнение Гельмгольца с учетом зависимости (1), получаем

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2 \right) \frac{e^{ikR}}{R} f(R) = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) получим уравнение для  $f(R)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + 2ik \frac{\partial f}{\partial R} + k^2 (n^2 - 1) f = 0. \quad (4)$$

Вследствие большого значения волнового числа  $k$  первым слагаемым в уравнении (4) можно пренебречь, тогда уравнение (4) допускает приближенное решение:

$$f = \exp\left(-\frac{ikR}{2} + \frac{ik}{2} \int n^2 dR\right).$$

Введем обозначение

$$Q = \int n^2 dR. \quad (5)$$

Интеграл (5) вычисляется вдоль прямой, соединяющей две точки с координатами  $(x', y', z')$  и  $(x, y, z)$ . Зададим эту прямую в параметрическом виде:

$$x = x' + a_x t; \quad y = y' + a_y t; \quad z = z' + a_z t, \quad (6)$$

где компоненты направляющего вектора

$$a_x = x - x'; \quad a_y = y - y'; \quad a_z = z - z'. \quad (7)$$

Тогда можно записать

$$dR = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} dt = R dt.$$

Из уравнений (6) и (7) следует, что  $0 \leq t \leq 1$ , из интеграла (5) получаем

$$Q = R \int_0^1 n^2 (x' + a_x t; y' + a_y t) dt. \quad (8)$$

Теперь для функции  $f(R)$  имеем

$$f(R) = \exp\left(ik \frac{Q - R}{2}\right).$$

Пусть отверстие в экране будет круглым, а неоднородность КПП обладает цилиндрической симметрией. Примем, что зависимость КПП от координат имеет вид

$$n = n(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Переходя к цилиндрической системе координат, получаем

$$Q = R \int_0^1 n^2 [r^2 t^2 + r'^2 (t-1)^2 - 2rr'(t-1)t \cos(\varphi - \varphi')] dt.$$

Формальным повтором вывода Зоммерфельда [2] можно получить дифракционный интеграл для случая поперечно-неоднородной активной среды:

$$V(x, y) = \frac{(1+n^2)L}{2i\lambda} \int_{S'} U(x', y') \frac{e^{ik\frac{R+Q}{2}}}{R^2} dS', \quad (9)$$

где  $V$ ,  $U$  — амплитудно-фазовые распределения (АФР) поля соответственно в плоскости наблюдения и в плоскости экрана;  $L$  — расстояние от плоскости экрана до плоскости наблюдения;  $\lambda$  — длина волны излучения;  $S'$  — площадь отверстия в экране.

При использовании предложенного дифракционного интеграла порядок действий при составлении системы интегральных уравнений остается тем же, что и в случае пустых резонаторов. Так, для одиночного линейного резонатора

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{[1+n^2(x, y)]L}{2i\lambda} \int_{S'} U(x', y') F_1(t) \frac{e^{ikR\frac{Q+1}{2}}}{R^2} dS'; \\ \chi U(x', y') &= \frac{[1+n^2(x', y')]L}{2i\lambda} \int_S V(x, y) F_2(t) \frac{e^{ikR\frac{Q+1}{2}}}{R^2} dS, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $V$ ,  $U$  — АФР поля на зеркалах резонатора;  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  — корректирующие функции, описывающие воздействие зеркал резонатора на оптическое поле.

Полученное выражение дифракционного интеграла для радиально-неоднородных активных сред позволяет построить модель газового лазера, с помощью которой можно совместно вычислять пространственное распределение индуцированного излучения и абсолютную мощность. При этом величиной, характеризующей влияние активной среды на излучение, является КПП. Очевидно, что для учета насыщения усиления активной среды мнимая часть КПП должна зависеть от интенсивности оптического излучения.

Решение системы уравнений (10) представляется возможным только методом последовательных итераций, причем значение мнимой части КПП следует рассчитывать заново на каждой итерации, используя полученное на предыдущей итерации значение интенсивности индуцированного оптического поля и какую-либо модель активной среды, задающую взаимосвязь между интенсивностью и усилением. Поскольку интенсивность изменяется при каждом прохождении волны индуцированного излучения через резонатор, достигается учет насыщения усиления активной среды.

Для нахождения зависимости усиления активной среды от интенсивности излучения в  $\text{CO}_2$ -лазерах целесообразно использовать квантово-кинетическую модель активной среды [3], учитывающую основные энергетические процессы, протекающие в рабочей смеси газов. Квантово-кинетическая модель связывает производные по времени от значений энергии, накопленной на различных колебательно-вращательных уровнях молекул газов, составляющих рабочую смесь, с другими параметрами, такими как интенсивность оптического излучения, форма ионизирующего импульса, температура, давление, состав смеси и др. Для определения зависимости усиления от интенсивности оптического поля следует рассмотреть стационарный режим, т. е. приравнять нулю производные по времени. При этом система обыкновенных дифференциальных уравнений квантово-кинетической модели переходит в систему нелинейных алгебраических уравнений, которая вследствие громоздкости и широкой известности здесь не приводится (см. работу [3]). Решение данной системы относительно инверсии населенностей лазерных уровней, определяющей усиление активной среды, может быть осуществлено с помощью известных методов.

Погонное усиление активной среды и мнимая часть КПП связаны с инверсией населенностей известными соотношениями:

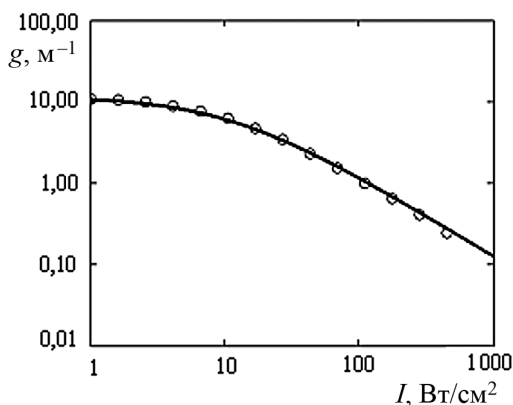
$$n'' = \frac{g}{2k} = \frac{\sigma_s \Delta N}{2k}.$$

Для оценки вида зависимости усиления активной среды от интенсивности оптического поля были проведены расчеты для типичного набора параметров рабочей смеси  $\text{CO}_2 : \text{N}_2 : \text{He} = 1 : 1 : 3$  с дополнительными упрощающими предположениями. Концентрацию электронов принимали фиксированной и равной  $10^{10} \text{ см}^{-3}$ . Скорости электронного возбуждения колебательных состояний считали постоянными. Диссоциацию молекул  $\text{CO}_2$  не учитывали. Использовали линию P(20) молекулы  $\text{CO}_2$  (длина волны 10,59 мкм), уширение линии принимали однородным при всех использованных значениях давления. Решение системы уравнений квантово-кинетической модели выполняли методом Ньютона.

При указанных допущениях полученная зависимость коэффициента усиления  $g$  среды от интенсивности  $I$  оптического поля с погрешностью не выше 5 % аппроксимируется формулой Ригрода:

$$g(I) = \frac{g_0}{1 + I/I_s}. \quad (11)$$

На рис. 1 приведены рассчитанная зависимость (кружки) и результат аппроксимации (сплошная линия).



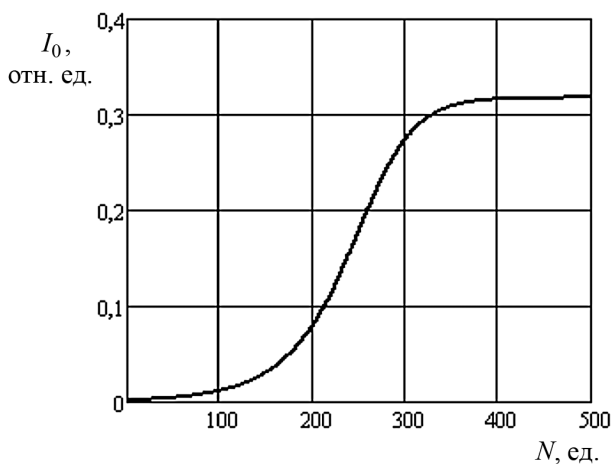
**Рис. 1.** Зависимость усиления среды от интенсивности оптического поля (сплошная линия — аппроксимация)

Выражение (11) использовалось для расчетов индуцированного излучения в оптическом резонаторе CO<sub>2</sub>-лазера. Для исследований численными методами был выбран плоскопараллельный резонатор с числом Френеля, равным единице.

Значение относительных потерь за полный оборот пустого резонатора составило 0,31964. При этом критическое погонное усиление среды  $g_{0n}$ , необходимое для развития генерации, равнялось 0,07267 м<sup>-1</sup>.

Для верификации предложенной модели расчет внутрирезонаторного поля проводили для двух значений коэффициента усиления среды  $g_0$ , равных соответственно 0,072 и 0,073 м<sup>-1</sup>, т. е. меньше и больше порогового усиления среды соответственно. Интенсивность насыщения  $I_s$  в обоих случаях составляла 1 Вт/см<sup>2</sup>. Использовали следующие значения начальной интенсивности: 1,000 и 0,001 Вт/см<sup>2</sup>.

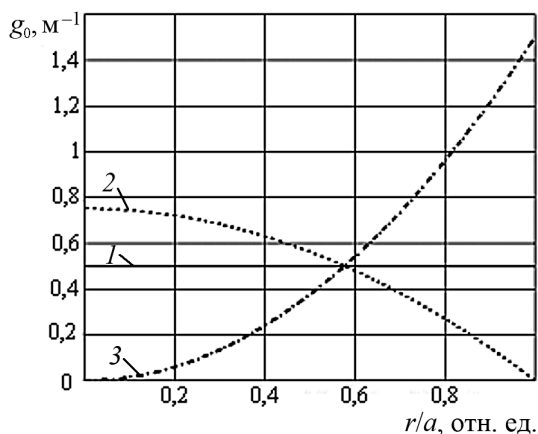
При  $g_0 = 0,072$  м<sup>-1</sup> установившееся значение потерь составило  $3,533 \cdot 10^{-3}$ , т. е. усиления активной среды недостаточно для установления стационарного режима генерации. На рис. 2 приведена зависимость интенсивности  $I_0$  оптического поля в центре выходного зеркала от номера  $N$  итерации при  $g_0 = 0,073$  м<sup>-1</sup> и начальной интенсивности 0,001 Вт/см<sup>2</sup>. Расчеты показали, что установившееся значение интенсивности оптического поля не зависит от его начальной интенсивности. Установившееся относительное распределение амплитуд и фаз



**Рис. 2. Зависимость интенсивности оптического поля на оси от номера итерации**

оптического поля в обоих случаях не отличалось от распределения, соответствующего пустому резонатору.

Для изучения влияния неоднородности распределения малосигнального усиления  $g_0$  на пространственную структуру индуцированного излучения были проведены расчеты внутриврезонаторного поля для трех различных пространственных распределений  $g_0$  по поперечному сечению резонатора. В первом случае усиление полагали постоянным и равным  $0,5 \text{ м}^{-1}$ . Во втором и третьем случаях принимали квадратичную зависимость усиления от радиальной координаты с ветвями парабол, направленными соответственно вниз и вверх. При этом усиление, усредненное по поперечному сечению активной среды, было равно  $0,5 \text{ м}^{-1}$  (рис. 3).

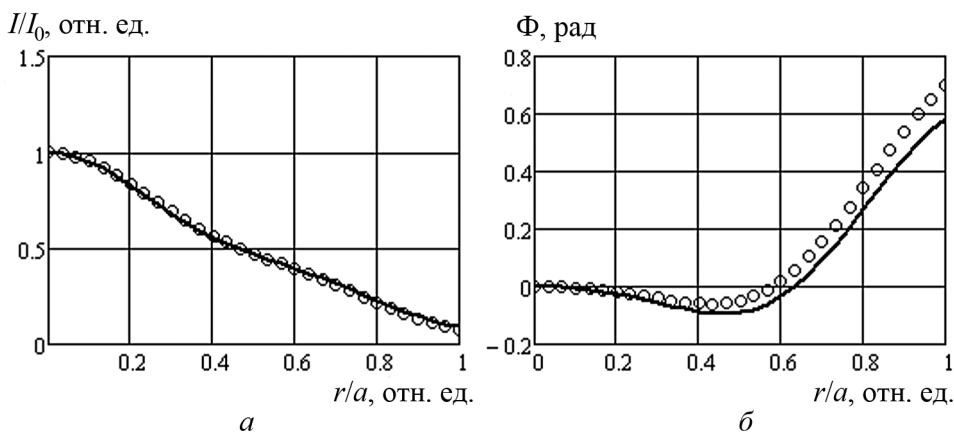


**Рис. 3. Пространственные распределения усиления активной среды по поперечному сечению резонатора:**

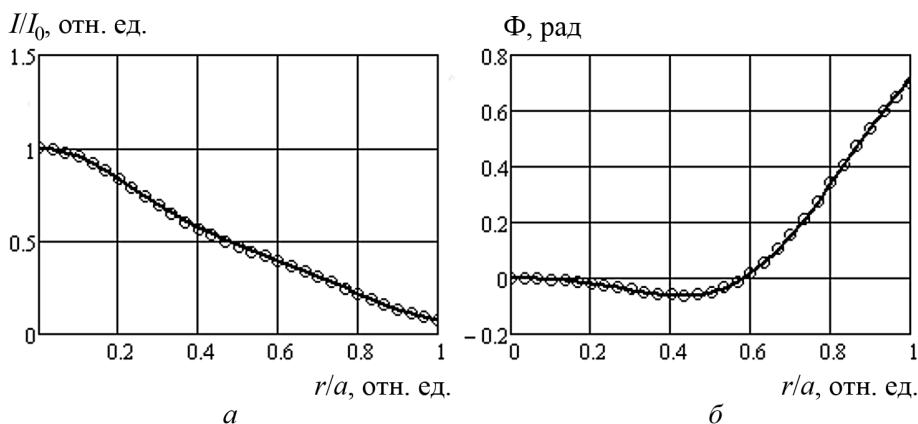
1 — равномерное распределение; 2, 3 — параболические распределения

На рис. 4—6 (кружками показаны соответствующие распределения в пустом резонаторе) приведены АФР оптического поля при усилениях, соответствующих АФР 1, 2 и 3 на рис. 3.

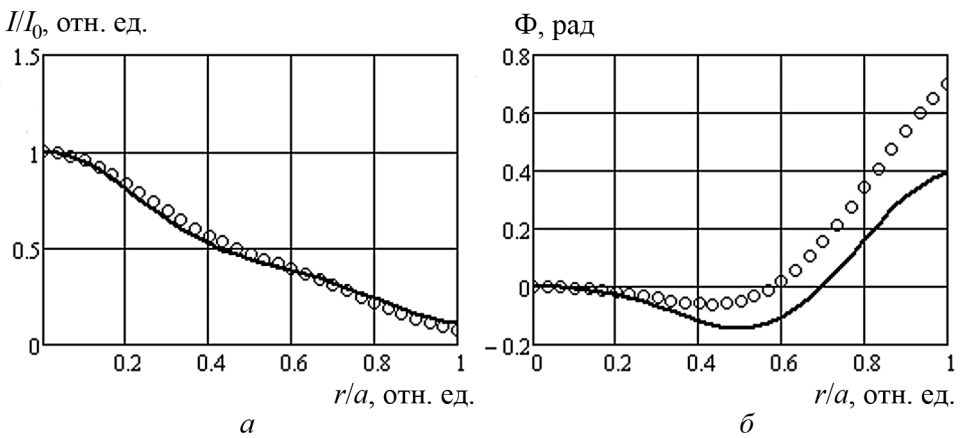
Из приведенных зависимостей следует, если характерные масштабы неоднородности активной среды и индуцированного излучения близки, форма поперечной неоднородности активной среды, заполняющей оптический резонатор, незначительно влияет на относительное распределение интенсивности внутрирезонаторного индуцированного оптического излучения. Более заметно искажается распределение фаз. Из распределения фаз видно, что возмущение распределения фаз соответствует увеличению радиуса кривизны волнового фронта индуцированного излучения. Это приводит к из-



**Рис. 4. Распределение интенсивности (а) и фазы (б) оптического поля при равномерном усилении среды в зависимости от относительной апертуры  $r/a$  резонатора**



**Рис. 5. Распределение интенсивности (а) и фазы (б) оптического поля при убывающем от оси усилении среды в зависимости от относительной апертуры  $r/a$  резонатора**



**Рис. 6. Распределение интенсивности (а) и фазы (б) оптического поля при возрастающем от оси усилении среды в зависимости от относительной апертуры  $r/a$  резонатора**

менению угла расходимости выходного излучения. Полученные данные качественно соответствуют известным.

Интенсивность индуцированного излучения на оси резонатора при равномерном распределении составила  $3,75 \text{ Вт/см}^2$ , при убывающем усилении от оси к краю —  $3,54 \text{ Вт/см}^2$ , а для возрастающего усилении от оси к краю —  $4,25 \text{ Вт/см}^2$ .

Таким образом, математическая модель, основанная на модифицированной записи дифракционного интеграла Зоммерфельда и квантово-кинетической модели активной среды  $\text{CO}_2$ -лазера, позволяет совместно вычислять пространственные и энергетические характеристики индуцированного излучения  $\text{CO}_2$ -лазеров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллов И. М., Юдин В. И. Применение дифракционного интеграла в задаче о радиально-неоднородных активных средах // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – Т. 5. – № 1. – С. 10–12.
2. Зоммерфельд А. Оптика: пер. с нем. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1956. – 583 с.
3. Смит К., Томсон Р. Численное моделирование газовых лазеров. – М.: Мир, 1981. – 515 с.

Статья поступила в редакцию 26.09.2012